Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae

Oldřich Horáček

Über eine Eigenschaft der verallgemeinerten Lösung des Poissonschen Problems (Vorläufige Mitteilung)

Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae, Vol. 6 (1965), No. 3, 347--352

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/105022

Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae
6, 3 (1965)

ÜBER EINE EIGENSCHAFT DER VERALLGEMEINERTEN LÖSUNG DES POISSONSCHEN PROBLEMS

(Vorläufige Mitteilung)

Oldřich HORÁČEK, Praha

Mit dem Symbol E_n bezeichnen wir den n -dimensionalen Euklidischen Raum mit den Koordinaten $[X_1, X_2, \dots, X_n]$; es sei Ω ein beschränktes Gebiet. Die Menge aller auf Ω unendlich differenzierbarer Funktionen bezeichnen wir mit $\mathcal{E}(\Omega)$ die Menge aller Funktionen aus $\mathcal{E}(\Omega)$ mit kompakten Trägern in Ω bezeichnen wir mit $\mathcal{D}(\Omega)$. Weiter sei $C^{(1),1}_{loc}(\Omega)$ die Menge aller stetigen Funktionen, deren erste Ableitungen auf jeder offenen Menge, deren Abschliessung in Ω liegt, die Lipschitz-Bedingung erfüllen. Ist $1 \leqq p$, so sei $W^{(1)}_p(\Omega)$ der Raum aller Funktionen, die mit ihnen ersten verallgemeinerten Ableitungen mit der p -ten Potenz auf Ω integrierbar sind. Schliesslich sei $\overset{\circ}{W}{}^{(1)}_p(\Omega)$ die Abschliessung von $\mathcal{D}(\Omega)$ in der Norm des Raumes $W^{(1)}_p(\Omega)$.

Ω wird vom Typus $\mathcal{N}^{(0),1}$ genannt, falls folgende Bedingungen erfüllt sind:

1) Es existieren m Koordinatensysteme in E_n und m Funktionen a_r, $r = 1, 2, \dots, m$ derart, dass jeder Punkt der Grenze mindestens in einem dieser Systeme in der Form

$$[X_{r1}, X_{r2}, \dots, X_{rn-1}, a_r(X_{r1}, X_{r2}, \dots X_{rn-1})]$$

(kurz $X_r, a_r(X_r)$) geschrieben werden kann. Wir nehmen an, dass die Funktionen a_r auf der Menge

$$G_r = \underset{X_r}{\mathcal{E}}(|X_r| < \alpha,\ 0 < \alpha)$$

die Lipschitz-Bedingung mit der Lipschitz-Konstante k erfüllen.

2) Es existiert eine Zahl $0 < \beta \leqq 1$ derart, dass die Punkte mit den Koordinaten $X_r \in G_r$, $a_r(X_r) - \beta < x_{rn} < a_r(X_r)$ innerhalb Ω und die Punkte mit den Koordinaten $X_r \in G_r$, $a_r(X_r) < x_{rn} < a_r(X_r) + \beta$ ausserhalb Ω liegen.

3) Es existiert eine Folge von Untergebieten Ω_h, $h = 1, 2, \ldots$ derart, dass $\Omega_h \subset \Omega_{h+1} \subset \ldots \subset \Omega$, $\lim\limits_{h\to\infty} \Omega_h = \Omega$. Dabei können die Grenzpunkte der Gebiete Ω_h in der Form $[X_r, a_{rh}(X_r)]$ geschrieben werden, wo a_{rh} in G_r unendlich differenzierbar sind, die Lipschitz-Bedingung mit der Lipschitz-Konstante k erfüllen und

$$\lim_{h\to\infty} \int_{G_r} \Big[\sum_{i=1}^{n-1}\Big(\frac{\partial a_{rh}}{\partial x_{ri}} - \frac{\partial a_r}{\partial x_{ri}}\Big)^2\Big]\, dX_r = 0\ ,$$

$$\lim_{h\to\infty} \Big(\sup_{X_r \in G_r} |a_{rh}(X_r) - a_r(X_r)|\Big) = 0\ ,$$

Ω wird vom Typus $\mathfrak{M}$ genannt, falls $\Omega_1 = \Omega$.

Ist $\Omega \in \mathfrak{N}^{(0),1}$, so sei $L_2(\dot{\Omega})$ der Raum aller fast überall auf Ω (d.h. fast überall auf G_r, $r = 1, 2, \ldots, m$) definierten Funktionen u für die

$$\|u\|_{L_p(\dot{\Omega})} = \Big(\int_{\dot{\Omega}} |u|^2\, dS\Big)^{\frac{1}{2}} < \infty\ ,$$

gilt. Das Integral rechts ist hier für $v \in L_1(\dot{\Omega})$ und für beliebige Einheitsteilung $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m$ auf $\dot{\Omega}$

folgenderweise definiert:

$$\int_{\dot\Omega} v\,dS = \sum_{k=1}^{m} \int_{G_k} v(X_k, a_k(X_k))\varphi_k(X_k, a_k(X_k))\sqrt{1+\sum_{i=1}^{n-1}\left(\frac{\partial a_k}{\partial x_{ki}}\right)^2}\,dX_k .$$

Definition 1 . Es sei $\Omega \in \mathfrak{N}^{(0),1}$, $K \subset \dot\Omega$, K abgeschlossen. Wir sagen, dass K die Eigenschaft V hat, falls entweder $K = \emptyset$ ist, oder eine stetige nichtnegative Funktion σ auf Ω existiert, für die $\sigma \in W_n^{(1)}(\Omega)$ gilt und zu jedem $0 < c$ eine solche Umgebung $\mathcal{U}$ von K existiert, dass auf $\mathcal{U} \cap \dot\Omega$ $c < \sigma$ gilt.

Ist $\Omega \in \mathfrak{N}^{(0),1}$, $K \subset \dot\Omega$, so bezeichnen wir

$$\pi(K) = \mathop{\mathcal{E}}_{X_k \in G_k}([X_k, a_k(X)] \in K) .$$

Definition 2. Es sei $\Omega \in \mathfrak{N}^{(0),1}$. Ω wird zulässig genannt, falls eine solche abgeschlossene Menge $K \subset \dot\Omega$ mit der Eigenschaft V existiert, dass $a_k \in C_{loc}^{(1),1}(G_k - \pi_k(K))$ für $k = 1, 2, \ldots, m$ gilt.

Das Problem der Existenz eines nichttrivialen zulässigen Gebietes Ω wird auf das Problem der Existenz eines σ aus der Definition 1 zurückgeführt. Wenn K einen einzigen Punkt Y enthält, so kann σ folgenderweise definiert werden:

$$\sigma(X, Y) = |\lg|X-Y||^{\alpha} .$$

Hier ist $X \in \Omega$ und $\alpha < \frac{n-1}{n}$.

Satz 1. Es sei Ω zulässig, $K \subset \dot\Omega$ eine abgeschlossene Mannigfaltigkeit mit der Eigenschaft V . Dann ist die Dimension von K gleich Null.

Definition 3. Es sei M abgeschlossen. Wir sagen, dass die n-Kapazität von M gleich Null ist, falls eine solche Folge von stetigen Funktionen $\psi_1, \psi_2, \dots$ existiert, dass $1 \leqq \psi_\ell$ auf M, $\psi_\ell \in W_n^{(1)}(E_n)$ und $\lim\limits_{\ell \to \infty} \psi_\ell = 0$ in $W_n^{(1)}(E_n)$ gilt.

Satz 2. Es sei M abgeschlossen. Dann ist die n-Kapazität von M genau dann gleich Null, wenn eine offene Kugel $\varkappa$, $M \subset \varkappa$ und eine stetige Funktion $\wp$ auf $\varkappa - M$ derart existiert, das $\wp \in W_n^{(1)}(\varkappa)$ und dass zu jeder Zahl $0 < c$ eine solche Umgebung $\mathcal{U}$ von M existiert, dass auf $\mathcal{U} \cap \varkappa$ $c < \wp$ gilt.

Ist $n = 2$, so sind die Mengen mit der Eigenschaft V aus der Definition 1 und deswegen auch die zulässigen Gebiete genügend beschrieben, denn der Begriff der 2-Kapazität ist mit dem in der Theorie partieller Differentialgleichungen benutzten Kapazitätsbegriff identisch.

Ein linearer Differenzialoperator zweiter Ordnung

$$D = -\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a^{ij}\frac{\partial}{\partial x_j}\right) + b$$

wird symmetrisch elliptisch auf Ω genannt, falls $a^{ij} = a^{ji}$ auf Ω gilt und falls eine solche Konstante $0 < c$ existiert, dass

$$c\,\delta^{ij}\xi_i\xi_j \leqq a^{ij}\xi_i\xi_j ,$$

(wobei $[\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n] \in E_n$ ist), und $0 \leqq b$ auf Ω gilt. Sind Funktionen $u, v \in W_2^{(1)}(\Omega)$ gegeben, setzen wir

$$(u, v)_D = \int_\Omega a^{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_j}\,d\Omega + \int_\Omega b\,u\,v\,d\Omega .$$

Ist $f \in L_2(\Omega)$, so nennen wir $v \in W_2^{(1)}(\Omega)$ eine verallgemeinerte Lösung des Poissonschen Problems $Dv = f$ auf Ω, $v = 0$ auf $\dot{\Omega}$, falls für jedes $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$

$$(v, \varphi)_D = (f, \varphi)_{L_2(\Omega)}$$

und $v \in \overset{\circ}{W}{}_2^{(1)}(\Omega)$ ist.

Ist $\Omega \in \mathfrak{N}^{(0),1}$, so existiert eine stetige lineare Abbildung R des Raumes $L_2(\Omega)$ in den Raum $L_2(\dot{\Omega})$, die jedem $f \in L_2(\Omega)$ die verallgemeinerten Ableitung der verallgemeinerten Lösung des Poissonschen Problems $Dv = f$ auf Ω, $v = 0$ auf $\dot{\Omega}$ nach der ausseren Konormal $\frac{\partial v}{\partial \nu}$ zuordnet. Ist $\Omega \in \mathfrak{M}$, so ist $\frac{\partial v}{\partial \nu} = a^{ij} \frac{\partial v}{\partial x_i} n_j$.

Satz 3. Es sei $\Omega \in \mathfrak{N}^{(0),1}$, $f \in L_2(\Omega)$, v_h sei die verallgemeinerte Lösung des Poissonschen Problems $Dv_h = f$ auf Ω_h, $v_h = 0$ auf $\dot{\Omega}_h$; v sei die verallgemeinerte Lösung des Poissonschen Problems $Dv = f$ auf Ω, $v = 0$ auf $\dot{\Omega}$. Dann $\lim_{h \to \infty} \frac{\partial v_h}{\partial \nu} = \frac{\partial v}{\partial \nu}$ schwach in $L_2(\dot{\Omega})$.

Satz 4. Es sei Ω zulässig, $f \in L_2(\Omega)$, v_h sei die verallgemeinerte Lösung des Poissonschen Problems $Dv_h = f$ auf Ω_h, $v_h = 0$ auf $\dot{\Omega}_h$. Dann existiert eine Konstante $0 < c$ und eine natürliche Zahl h_0 derart, dass für $h_0 \leq h$

$$\int_{\dot{\Omega}_h} \sigma \left(\frac{\partial v_h}{\partial \nu}\right)^2 dS \leq c$$

gilt.

Satz 5. Es sei Ω zulässig, $f \in L_2(\Omega)$, v_h sei die verallgemeinerte Lösung des Poissonschen Problems $Dv_k = f$ auf Ω_k, $v_k = 0$ auf $\dot{\Omega}_k$; v sei die verallgemeinerte Lösung des Poissonschen Problems $Dv = f$ auf Ω, $v = 0$ auf $\dot{\Omega}$. Dann $\lim_{k\to\infty} \frac{\partial v_k}{\partial \nu} = \frac{\partial v}{\partial \nu}$ in $L_2(\dot{\Omega})$.

Ist $g \in W_2^{(1)}(\Omega)$, so nennen wir ein $u \in W_2^{(1)}(\Omega)$ die verallgemeinerte Lösung des Dirichletschen Problems $Du = 0$ auf Ω, $u = g$ auf $\dot{\Omega}$, falls für jedes $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$

$$(u, \varphi)_D = 0$$

und $u - g \in \mathring{W}_2^{(1)}(\Omega)$ ist.

Aus dem Satz 5 ergibt sich die Eindeutigkeit der verallgemeinerten Lösung des Dirichletschen Problems, wenn die Randbedingungen schwach in $L_2(\dot{\Omega})$ konvergieren.

L i t e r a t u r :

J. NEČAS, O rešenijach eliptičeskich diferèncialnych uravnenij v častnych proizvodnych vtorovo porjadka s neograničennym integralom Dirichle. Czechoslovak Mathematical Journal, 10,1950, 283-298.

(Eingegangen 20.V.1965)