Luděk Granát

Metrische Eigenschaften der nichtabwickelbaren Monosysteme der Dimension $n+1$ im Euklidischen Raume E_{2n+1} (Vorläufige Mitteilung)

Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae, Vol. 7 (1966), No. 1, 113--116

Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae

7, 1 (1966)

METRISCHE EIGENSCHAFTEN DER NICHTABWICKELBAREN MONOSYSTEME DER DIMENSION $n+1$ IM EUKLIDISCHEN RAUME E_{2n+1}

(Vorläufige Mitteilung)

Luděk GRANÁT , Praha

Es sei im Euklidischen Raume E_{2n+1} eine Mannigfaltigkeit, die durch ein einparametriges System der n-dimensionalen Räume

$B_n(t) = [A(t), u_1(t), \dots, u_n(t)]$, $u_i(t)u_j(t) = \delta_{ij}$, $i, j = 1, \dots, n$,

gebildet ist, dabei ist

$$\det [A', u_1, \dots, u_n, u_1', \dots, u_n'] \neq 0 ,$$

gegeben. Diese Mannigfaltigkeit werden wir das nichtabwickelbare Monosystem nennen.

Es habe die charakteristische Gleichung der Matrix $E(t)$ für jedes t vom Intervall Ω einfache Wurzeln. Die Matrix $E(t)$ ist die Matrix der Koeffizienten der quadratischen Form $'v'(t) = \sum_{i,j}^{n} \alpha_i(t)\alpha_j(t)\,'u_i'(t)\,'u_j'(t)$, dabei ist $u_j'(t) = \sum_{i=1}^{n} {}^j a_i\, u_i(t) + {}'u_j'(t)$, wo $'u_j'(t)$ die Vektoren des Raumes $C_n(t)$, welcher zum Raume $B_n(t)$ im Raume $[A(t), u_1(t), \dots u_n(t), u_1'(t), \dots, u_n'(t)]$ total senkrecht ist, sind.

Wenn wir für $A(t)$ die Kehllinie des Monosystems V_{n+1} wählen, man kann das Bezugssystem $\{A(t), u_1(t), \dots \dots, u_{2n+1}(t)\}$ so bestimmen, dass die Relation $A' = \sum_{i=1}^{n} p_i u_i + \varepsilon \sqrt{1 - \sum_{i=1}^{n} p_i^2}\, u_{2n+1}$ gilt, wo $\varepsilon = \pm 1$ ist. Wenn wir unsere

Betrachtungen auf das Intervall $\bar{\Omega} \subset \Omega$ begrenzen, wo für alle $t \in \bar{\Omega}$ $r_i \neq 0$ $(i = 1, \dots, n)$ gilt und wenn wir eine bestimmte Orientation wählen, dann kann man nach [4] im E_{2n+1} ein bewegliches Bezugssystem $\{A(t), u_1(t), \dots$ $\dots, u_{2n+1}(t)\}$ so bestimmen, dass die Relationen

$$A' = \sum_{i=1}^{n} r_i u_i + \sqrt{1 - \sum_{i=1}^{n} r_i^2}\, u_{2n+1} ,$$

$$u'_m = \sum_{i=1}^{n} {}^m q_i u_i + c_m u_{n+m} , \quad {}^m q_i + {}^i q_m = 0 ,$$

$$u'_{n+m} = - c_m u_m + \sum_{i=1}^{n} {}^m r_i u_{n+i} + s_m u_{2n+1} , \quad {}^m r_i + {}^i r_m = 0 ,$$

$$u'_{2n+1} = - \sum_{i=1}^{n} s_i u_{n+i} ,$$

$$m = 1, \dots, n , \quad r_i > 0 , \quad c_i > 0$$

gelten.

Das gemeinsame Lot zweier windschiefer linearer Räume E_r und E_s, das mit jedem dieser Räume genau einen gemeinsamen Punkt hat, nennen wir die Achse dieser Räume. Den Abstand der Schnittpunkte der gegebenen Räume mit ihrer Achse nennen wir die Länge dieser Achse. Dann gilt:

Satz 1. Es sei L_h die Länge der Achse der Räume $B_n(t_0)$ und $B_n(t_0 + h)$. Dann gilt

$$\lim_{h \to 0} L_h / h = \sqrt{1 - \sum_{i=1}^{n} r_i^2} .$$

Satz 2. Es sei φ_i $(i = 1, \dots, n)$ der Winkel der Räume $B_n(t_0)$ und $B_n(t_0 + h)$. 1) Dann gilt

$$\lim_{h \to 0} | \sin \varphi_{h,i} / h | = c_i .$$

Wenn wir den Drall r des Monosystems ähnlich wie den

---

1) Die Definition des Winkels zweier Räume E_r und E_s siehe [5].

Drall der Regelfäche definieren, d.h. $\lim_{h \to 0} |L_h / \varphi_h|$, wo L_h die Länge der Achse der Räume $B_n(t_0)$ und $B_n(t_0 + h)$ und φ_h ihr Winkel ist [2], definieren, dann kann man unter Voraussetzungen welche am Anfang dieser Mitteilung angeführt sind, dem Monosystem V_{n+1} für jedes $T \in \bar{\Omega}$ eine Anzahl von n Dralle (die nicht verschieden sein müssen)

$$d_i = \frac{\sqrt{1 - \sum_{m=1}^{n} r_m^2}}{c_i}, \quad i = 1, \dots, n$$

zuordnen.

Satz 4. Für den Drall des Monosystems gilt $d_i = |\sin\phi|/c_i$, wo ϕ der Winkel der Tangente der Kehllinie im Punkt $A(t)$ mit dem Raum $B_n(t)$ ist.

Satz 5. Für den Winkel $\psi(t)$, welchen der Tangentialraum des Monosystems V_{n+1} im Punkt $X(t) = A(t) + \sum_{i=1} v_i u_i(t)$ mit dem Tangentialraum desselben Monosystems im Punkt $A(t)$ bildet, gilt

$$tg^2\psi = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{v_i}{d_i}\right)^2$$

Betrachten wir weiter die Regelfläche V_2, die durch die Geradem $P_1(t) = [A(t), u_{2n+1}(t)]$ gebildet ist. Ihre Kehllinie unter Voraussetzung $\sum_{i=1}^{n} s_i^2 \neq 0$ fällt mit der Kehllinie des Monosystems V_{n+1} zusammen. Für den Drall $\hat{r}$ der Regelfläche V_2 gilt die Relation

$$\hat{r} = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} r_i^2}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} s_i^2}}$$

Die Beweise der angeführten Behauptungen werden in der Zeitschrift Časopis pro pěstování matematiky veröffentlicht.

----

2) Vergleiche [1], S. 355.

L i t e r a t u r :

[1] V. HLAVATÝ: Diferenciální geometrie křivek a ploch a tensorový počet. Praha 1937.

[2] M. JŮZA: Ligne de striction sur une généralisation à plusieurs dimensions d'une surface réglée. Czech.Math.J. 12(87),1962,243-250.

[3] M. JŮZA: Le système complet d'invariants d'un monosystème à trois dimensions dans l'espace euclidien à cinq dimensions. Czech.Math.J. 12(87),1962,401-403.

[4] A. JŮZOVÁ: Euklidovské invarianty monosystémů. Časop. pěst. mat. 88(1963),1-13.

[5] Č. VITNER: O úhlech lineárních podprostorů v E_n. Čas.pěst.mat.87(1962),415-422.

(Received December 15, 1965)