Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae

J. I. Grivanov

Замечание о сходимости почти всюду и по мере

Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae, Vol. 7 (1966), No. 3, 297--300

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/105063`

Terms of use:

© Charles University in Prague, Faculty of Mathematics and Physics, 1966

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* `http://project.dml.cz`

Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae
7, 3 (1966)

ЗАМЕЧАНИЕ О СХОДИМОСТИ ПОЧТИ ВСЮДУ И ПО МЕРЕ

Ю.И. ГРИБАНОВ, Казань

Пусть (X, Σ, μ) - пространство с вполне конечной мерой [1]. Мы считаем $\mu(X) > 0$ исключая тем самым из рассмотрения тривиальный случай $\mu(X) = 0$. Рассматриваются почти всюду конечные измеримые функции, заданные на X. Известно, что из сходимости почти всюду (к почти всюду конечной функции) вытекает сходимость по мере. Если $X = [0, 1]$ и μ -мера Лебега на X, то из сходимости по мере не вытекает сходимость почти всюду ([2], стр. 108-109). Целью настоящей заметки является указание критерия совпадения сходимости почти всюду со сходимостью по мере.

Множество $E \in \Sigma$ называется атомом пространства X, если $\mu(E) > 0$ и если из $F \subseteq E$ и $F \in \Sigma$ вытекает, что либо $\mu(E) = \mu(F)$, либо $\mu(F) = 0$. Два атома считаются равными, если один из них отличается от другого лишь на множество нулевой меры. Пространство X может содержать не более чем счетное число различных атомов. Мера μ называется чисто атомической, если пространство X не содержит ни одного измеримого множества положительной меры без атомов. Если мера μ чисто атомична, то пространство X представимо в виде объединения конечного или счетного числа различных атомов. Известно, что если измеримое множество E не содержит атомов, то, каково бы ни было неотрицательное число $\alpha \leq \mu(E)$, всегда можно найти такое измеримое множество $F \subseteq E$, что $\mu(F) = \alpha$ ([1], стр. 171, п.2).

Теорема. Для того, чтобы сходимость почти всюду совпадала со сходимостью по мере, необходимо и достаточно, чтобы μ была чисто атомической мерой.

Необходимость. Нужно показать, что если μ не является чисто атомической мерой, то из сходимости по мере не вытекает сходимость почти всюду. Не нарушая общности дальнейших рассуждений, можно считать, что само пространство X не содержит ни одного атома. Разобьем пространство X на два измеримых множества X_1 и X_2 половиной меры: $\mu(X_1) = \mu(X_2) = \frac{1}{2}\mu(X)$. Каждое из множеств X_1 и X_2 в свою очередь разобьем на два измеримых подмножества половиной меры X_{11}, X_{12}, X_{21} и X_{22}. Продолжая этот процесс дробления множеств, мы на n-ом этапе получим 2^n попарно непересекающихся множеств $X_{k_1,k_2,\dots,k_n}$, $k_1, k_2, \dots, k_n = 1$ или 2, таких, что $X_{k_1,\dots,k_{n-1},1} \cup X_{k_1,\dots,k_{n-1},2} = X_{k_1,\dots,k_{n-1}}$ и $\mu(X_{k_1,\dots,k_n}) = \frac{1}{2^n}\mu(X)$. Через $\varphi_E(x)$ мы будем обозначать характеристическую функцию множества E. Определим последовательность функций $f_n(x)$, полагая $f_1(x) = \varphi_{X_1}(x)$, $f_2(x) = \varphi_{X_2}(x)$, $f_3(x) = \varphi_{X_{11}}(x)$, $f_4(x) = \varphi_{X_{12}}(x)$, $f_5(x) = \varphi_{X_{21}}(x), \dots$. При любом n функция $f_n(x) = \varphi_{X_{k_1,\dots,k_m}}(x)$, где m, а также $k_1,\dots,k_m$ зависят от выбора n, причем $m \to \infty$ при $n \to \infty$. При любом $\sigma > 0$, $\sigma < 1$, множество $X(f_n \geq \sigma) = X_{k_1,\dots,k_m}$. Поэтому $\mu(X(f_n \geq \sigma)) = \mu(X_{k_1,\dots,k_m}) \to 0$, т.е.

последовательность функций $f_n(x) \to 0$ по мере. Однако последовательность функций $f_n(x) \not\to 0$ почти всюду, так как $\underline{\lim}_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ и $\overline{\lim}_{n\to\infty} f_n(x) = 1$ при любом $x \in X$. Таким образом, если μ не является чисто атомической мерой, то из сходимости по мере не вытекает сходимость почти всюду.

<u>Достаточность</u>. Пусть μ является чисто атомической мерой. Тогда пространство X представлено в виде объединения конечного или счетного числа различных атомов E_n. Для определённости будем считать, что пространство X представимо в виде объединения счетного числа различных атомов E_n. Любая измеримая почти всюду конечная функция $f(x)$ однозначно (с точностью до функции, равной нулю почти всюду, которой в рассматриваемом случае мы можем пренебречь) представима в виде $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \varphi_{E_n}(x)$, где α_n - некоторые числа. Так как из сходимости почти всюду следует сходимость по мере, то для доказательства достаточности теоремы нам следует только установить, что из $f_m(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^{(m)} \varphi_{E_n}(x) \to f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \varphi_{E_n}(x)$ по мере вытекает $\lim_{m\to\infty} \alpha_n^{(m)} = \alpha_n$ при любом $n = \overline{1,\infty}$. Так как $f_m(x) \to f(x)$ по мере, то и про любом $n = \overline{1,\infty}$ последовательность функций $f_m(x)\varphi_{E_n}(x) \to f(x)\varphi_{E_n}(x)$ по мере, т.е. при любом $\sigma > 0$ $\lim_{m\to\infty} \mu(X(|f_m\varphi_{E_n} - f\varphi_{E_n}| \geq \sigma)) = 0$. Множество $X(|f_m\varphi_{E_n} - f\varphi_{E_n}| \geq \sigma)$ с точностью до множества нулевой меры совпадает с множеством $E_n(|f_m - f| \geq \sigma)$. Итак, $\lim_{m\to\infty} \mu(E_n(|f_m - f| \geq \sigma)) = 0$. На множестве E_n функция $f_m(x)$ ($f(x)$) принимает значение равное $\alpha_n^{(m)}$ (α_n). Следовательно, при всех достаточно

больших $m \geqslant M(\sigma, n)$ оказывается $|\alpha_n^{(m)} - \alpha_n| < \sigma$. Таким образом, $\lim_{m \to \infty} \alpha_n^{(m)} = \alpha_n$ при любом $n = \overline{1, \infty}$, что и требовалось установить для завершения доказательства теоремы.

Литература

[1] П. ХАЛМОШ: Теория меры. ИИЛ, 1953.

[2] И.П. НАТАНСОН: Теория функций вещественной переменной. ГТТИ, 1957.

(Received April 5, 1966)