Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae

Ladislav Procházka

Расширения расщепляемых групп при помощи полных примарных групп

Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae, Vol. 7 (1966), No. 4, 429--445

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/105076

Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae

7,4 (1966)

РАСШИРЕНИЯ РАСЩЕПЛЯЕМЫХ ГРУПП ПРИ ПОМОЩИ ПОЛНЫХ ПРИМАРНЫХ ГРУПП

Ладислав ПРОХАЗКА (Ladislav PROCHÁZKA), Praha

Под словом группа будем всюду понимать группу абелеву, буква p будет всегда представлять некоторое простое число. Если G - группа и n - натуральное число, то $G[n]$ обозначает подгруппу всех $g \in G$, для которых $ng = 0$. Группа G называется p-полной, если $pG = G$. Подгруппу H группы G будем называть p-сервантной в G, если $H \cap p^k G = p^k H$ для всякого натурального числа k.
Ясно, что подгруппа H группы без кручения G является p-сервантной в G в точности тогда, когда $(G/H)[p] = 0$. В заключение условимся обозначать символом G_t периодическую часть группы G.

Целью этой заметки является определение необходимых и достаточных условий, которым должна удовлетворять расщепляемая группа H для того, чтобы каждое ее расширение G при помощи полной примарной группы было опять группой расщепляемой.

<u>Лемма 1</u>. Пусть G_0 - группа вида $G_0 = \sum_{i=1}^{\infty} \{y_i\} \dotplus T$, где $O(y_i) = \infty$ $(i = 1, 2, \dots)$ и $T = \sum_{i=1}^{\infty} \{x_i\}$, $O(x_i) = p^{2i}$ $(i = 1, 2, \dots)$. Если определим в G_0 еще соотношения

(1) $$p\, y_{i+1} = y_i - x_i \quad (i = 1, 2, \dots),$$

то таким образом полученная группа G будет нерасщепляема и $G_t = T$. Притом подгруппа $H = \{y_1\} \dotplus T$ группы G_0 служит также подгруппой для G и $G/H \cong C(p^\infty)$.

Доказательство. Пусть $\{a_i\}$ – циклические группы порядка p^{2i} $(i = 1, 2, \ldots)$, пусть $U = \sum_{i=1}^{\infty}{}^{*} \{a_i\}$ и пусть $T_2 = \sum_{i=1}^{\infty} \{a_i\}$. Если положим

$$b_i = \langle 0, \ldots, 0, a_i, p a_{i+1}, p^2 a_{i+2}, \ldots \rangle \quad (i = 1, 2, \ldots),$$

то $O(b_i) = \infty$ $(i = 1, 2, \ldots)$ и

$$p b_{i+1} = b_i - a_i \quad (i = 1, 2, \ldots).$$

В [1] (смотри § 50, пример 2) было доказано, что подгруппа $H_2 = \{T_2, b_1, b_2, \ldots\}$ группы U является нерасщепляемой группой с периодической частью T_2. Легко убедимся в том, что каждый элемент $h \in H_2$ вида $h = a + n_1 b_1 + \ldots + n_k b_k$, где $a \in T_2$ и n_i – такие целые числа, что $(n_k, p) = 1$, обладает бесконечным порядком. Это зная, можем индукцией по k доказать, что для целых чисел $m_1, m_2, \ldots, m_k$ и элемента $a \in T_2$ имеет место соотношение $a + m_1 b_1 + \ldots + m_k b_k = 0$ в точности тогда, когда существуют целые числа $u_1, u_2, \ldots, u_{k-1}$ (для $k > 1$) такие, что

$$a + m_1 b_1 + \ldots + m_k b_k = \sum_{i=1}^{k-1} u_i (p b_{i+1} - b_i + a_i),$$

или, если $a = 0$ и $m_1 = 0$ (для $k = 1$). Это значит, что отображение φ группы H_2 в G определенное соотношением

$$\left(\sum_{i=1}^{k} u_i a_i + \sum_{j=1}^{h} v_j b_j\right)\varphi = \sum_{i=1}^{k} u_i x_i + \sum_{j=1}^{h} v_j y_j\,),$$

где u_i, v_j – целые числа, является изоморфизмом группы H_2 на группу G. Так как $T_2\varphi = T$, то $T = G_t$. Из (1) следует, что бесконечная циклическая группа $\{y_i\}$ служит подгруппой в G и, следовательно, то-же самое можно утверждать о группе $H = \{y_i\} \dotplus T$. Из соотношений (1) вытекает также изоморфизм $G/H \cong C(p^\infty)$.

Лемма 2. Пусть H - группа вида $H = A \dotplus \sum_{i=1}^{\infty} \{x_i\}$, где $O(x_i) = p^{2i}$ $(i = 1, 2, \dots)$ и A - группа без кручения такая, что $pA \neq A$. Тогда существует нерасщепляемое расширение G группы H при помощи группы $C(p^\infty)$ такое, что $G_t = \sum_{i=1}^{\infty} \{x_i\}$.

Доказательство. Так как $pA \neq A$, то можно выбрать элемент $y_1 \in A - pA$. Теперь определим группу G_0 соотношением

$$G_0 = A \dotplus \sum_{i=2}^{\infty} \{y_i\} \dotplus \sum_{i=1}^{\infty} \{x_i\},$$

где $O(y_i) = \infty$ $(i = 2, 3, \dots)$ и прибавим к ней условия (1). Таким образом построенная группа G содержит, очевидно, группу $H = A \dotplus \sum_{i=1}^{\infty} \{x_i\}$ в качестве подгруппы. Если положим $H^* = \{y_i, x_i \ (i = 1, 2, \dots)\}$ (подгруппу H^* строим в G), то по лемме 1 H^* - нерасщепляемая группа, $H_t^* = \sum_{i=1}^{\infty} \{x_i\} = T$, и кроме того

(2) $$H^*/(\{y_i\} \dotplus T) \cong C(p^\infty).$$

Пусть $g \in G - H$; тогда $g = h + n_2 y_2 + \dots + n_k y_k$, где $h \in H$ и n_i $(i = 2, \dots, k)$ - удобные целые числа. В силу (1) можем всегда предполагать, что $(n_k, p) = 1$. Для $k = 2$ имеем (смотри (1)) $p^3 g = p^3 h + p^2 n_2 y_1$. Итак, если $O(g) < \infty$, то $0 = p^3 m g = p^3 m h + p^2 m n_2 y_1$ для некоторого натурального числа m. Так как $h \in H = A \dotplus T$ и $y_1 \in A$, из последнего соотношения следует существование элемента $a \in A$ такого, что $p^3 m a = p^2 m n_2 y_1$, или, $n_2 y_1 = pa \in pA$. Но $y_1 \notin pA$ и $(n_2, p) = 1$, значит,

$n_2 y_1 \notin pA$ и мы получим противоречие. Следовательно, если $k = 2$, то $O(g) = \infty$. Индукцией по k можно теперь доказать, что $O(g) = \infty$ для каждого $g \in G - H$. Этим мы уже доказали, что $G_t = H_t = T$. Но отсюда следует, что группа G нерасщепляема, так как если бы T служила прямым слагаемым для всей группы G, то T бы служила прямым слагаемым для подгруппы H^*. В частности, $G \neq H$, или, $G/H \neq 0$.

Из определения G и H^* вытекает, что $G = \{H, H^*\}$, следовательно,

(3) $$0 \neq G/H = \{H, H^*\}/H \cong H^*/(H \cap H^*).$$

Так как $\{y_1\} \dotplus T \subseteq H \cap H^*$, то в силу (2) будет или $H^*/(H \cap H^*) = 0$, или же $H^*/(H \cap H^*) \cong C(p^\infty)$. Но в силу (3) имеем $H^*/(H \cap H^*) \neq 0$, значит, $H^*/(H \cap H^*) \cong C(p^\infty)$. Отсюда и из (3) уже следует требуемое соотношение $G/H \cong C(p^\infty)$.

Лемма полностью доказана.

Если f – некоторый групповой гомоморфизм, то символ $\operatorname{Ker} f$ представляет его ядро.

<u>Лемма 3</u>. Пусть L_0 – подгруппа группы L и φ – гомоморфизм некоторой группы G_0 на группу L_0. Тогда существуют расширение G группы G_0 и гомоморфизм ψ группы G на L так, что ψ является продолжением гомоморфизма φ и $\operatorname{Ker} \psi = \operatorname{Ker} \varphi$.

<u>Доказательство</u>. Группу G_0 будем считать подгруппой некоторой полной группы D_0. Пусть m – бесконечное кардинальное число такое, что $m > (\operatorname{card} G_0) \times (\operatorname{card} L)$, и пусть D_1 – полная группа, являющаяся прямой суммой

m экземпляров аддитивной группы рациональных чисел и m экземпляров группы $C(p^{\infty})$ для каждого простого числа p. Теперь положим $D = D_0 \dot{+} D_1$; итак, $G_0 \subseteq D$.

Символом $\mathfrak{M}$ обозначим систему всех пар $[U; \vartheta]$, где U - подгруппа в D содержащая G_0, и ϑ -гомоморфизм группы U в L служащий продолжением гомоморфизма φ и такой, что $Ker\, \vartheta = Ker\, \varphi$. Ясно, что $[G_0; \varphi] \in \mathfrak{M}$. Если $[U_i; \vartheta_i] \in \mathfrak{M}$ $(i = 1, 2)$, то положим $[U_1; \vartheta_1] \leqq [U_2; \vartheta_2]$ в точности тогда, когда $U_1 \subseteq U_2$ и ϑ_2 служит продолжением для ϑ_1. Отношением $\leqq$ множество $\mathfrak{M}$ полуупорядочено и удовлетворяет условиям леммы Цорна. Следовательно, в $\mathfrak{M}$ имеется по крайней мере один максимальный элемент. Пусть это будет $[G; \psi]$.

Теперь докажем, что $G\psi = L$. Предположим наоборот, что $G\psi = L^* \subsetneqq L$ и пусть $u \in L - L^*$. Будем различать два случая.

Пусть $\{u\} \cap L^* = 0$. Так как $Ker\, \psi = Ker\, \varphi \subseteq G_0$ и $G/Ker\, \psi \cong L^* \subseteq L$, то

$$card\, G \leqq (card\, G_0) \times (card\, L) < m ,$$

и, следовательно, существует $d \in D$ так, что $O(d) = O(u)$ и притом $\{d\} \cap G = 0$. Если положим $U = \{G, d\}$, то отображение ϑ, определенное формулой $(g + kd)\vartheta = g\psi + ku$ для $g \in G$ и целых чисел k, будет гомоморфизмом группы U на $L^* \dot{+} \{u\}$, продолжающим гомоморфизм ψ. Если $(g + kd)\vartheta = 0$, то необходимо $ku = 0$ и $g\psi = 0$, следовательно, $kd = 0$, или, $g + kd = g \in Ker\, \psi$. Отсюда вытекает, что $Ker\, \vartheta = Ker\, \psi = Ker\, \varphi$.

Итак, $[U;\vartheta]\in\mathfrak{M}$, $[G;\psi]\leqq[U;\vartheta]$ и притом $[G;\psi]\neq$ $\neq[U;\vartheta]$. Значит, мы получили противоречие с максимальностью элемента $[G;\psi]$ в $\mathfrak{M}$.

Пусть $\{u\}\cap L^*\neq 0$ и пусть n - наименьшее натуральное число, для которого $nu\in L^*$; тогда можно представить каждый элемент $l\in\{L^*, u\}$ единственным образом в виде суммы $l=l^*+ku$, где $l^*\in L^*$ и $0\leqq k<n$. Пусть $g_0\in G$ такой эелемент, что $g_0\psi=nu\in L^*$ и пусть элемент $d_1\in D$ удовлетворяет соотношению $nd_1=$ $=g_0$. По тем-же причинам как в предшествующей части можно выбрать $d_2\in D$ так, что $O(d_2)=n$ и одновременно

(4) $$\{G, d_1\}\cap\{d_2\}=0.$$

Если положим $d=d_1+d_2$, то будет $nd=nd_1=g_0\in G$ и в силу (4), n - наименьшее натуральное число, для которого $nd\in G$. Это значит, что каждый элемент $v\in V=$ $=\{G, d\}$ можно представить в точности единственным образом в виде $v=g+kd$, где $g\in G$ и $0\leqq k<n$. Теперь ясно, что отображение ϑ определенное формулой $(g+kd)\vartheta=g\psi+ku$ для $g\in G$ и $0\leqq k<n$ является гомоморфизмом группы V на $\{L^*, u\}$; притом ϑ служит продолжением гомоморфизма ψ. Если $0=(g+kd)\vartheta=g\psi+ku$, то в силу неравенства $0\leqq k<n$ будет $k=0$, или, $g+kd=g\in G$. Это значит, что $\mathrm{Ker}\,\vartheta=\mathrm{Ker}\,\psi=\mathrm{Ker}\,\varphi$, или, $[V;\vartheta]\in\mathfrak{M}$. Но так как $G\subsetneqq V$, то мы приходим опять к противоречию.

Это значит, что должно быть $G\psi=L$ и лемма доказана.

Для упрощения речи условимся называть группу G $\mathfrak{T}$-группой, если G является прямой суммой полной группы и группы с ограниченными порядками элементов.

Лемма 4. Пусть H – такая расщепляемая группа, что H/H_t не является p-полной, и одновременно p-примарное слагаемое группы H_t не является $\mathfrak{T}$-группой. Тогда существует нерасщепляемое расширение G группы H при помощи группы $C(p^\infty)$.

Доказательство. Пусть $H = A \dot{+} H_t$, пусть T_p – p-примарное слагаемое группы H_t и пусть B_p – некоторая базисная подгруппа в T_p. Так как T_p не является $\mathfrak{T}$-группой, то B_p не обладает ограниченными порядками элементов, следовательно, B_p можно гомоморфно отобразить на группу $T = \sum_{i=1}^{\infty} \{x_i\}$, где $O(x_i) = p^{2i}$ $(i = 1, 2, \dots)$. По теореме 32.1 из [1] B_p служит гомоморфным образом для группы T_p и, следовательно, для всей H_t. Это значит, что существует гомоморфизм η группы H_t на группу T. ж) Положим $H^* = A \dot{+} T$ и определим гомоморфизм φ группы H на H^* следующим образом: для $h \in H$, $h = a + b$, где $a \in A$ и $b \in H_t$, положим $h\varphi = a + b\eta$. Ясно, что $\operatorname{Ker} \varphi \subseteq H_t$. По лемме 2 существует нерасщепляемое расширение G^* группы H^* при помощи группы $C(p^\infty)$. Применяя лемму 3 получим расширение G группы H и гомоморфизм ψ группы G на G^*, служащий продолжением гомоморфизма φ, и такой, что $\operatorname{Ker} \psi = \operatorname{Ker} \varphi$. Из $G/\operatorname{Ker} \psi \cong G^*$ следует нерасщепляемость группы $G/\operatorname{Ker} \psi$. Но так как $\operatorname{Ker} \psi =$

ж) Смотри также доказательство теоремы 50.3 из [1].

$= Ker \varphi \leq H_t \leq G_t$, то по лемме 50.2 из [1] сама группа G также нерасщепляема.

Если теперь ψ^* представляет изоморфизм группы $G/Ker\,\psi$ на группу G^* определенный для каждого $g \in G$ формулой $(g + Ker\,\psi)\psi^* = g\psi$, то $(H/Ker\,\psi)\psi^* = H^*$, так как для $h \in H$ имеем $h\psi = h\varphi \in H^*$. Отсюда

$$G/H \cong (G/Ker\,\psi)/(H/Ker\,\psi) \cong G^*/H^* \cong C(p^\infty),$$

и лемма полностью доказана.

<u>Лемма 5</u>. Пусть H – расщепляемая группа, для которой группа H/H_t p-полна. Тогда каждое расширение G группы H при помощи p-примарной группы является расщепляемой группой.

<u>Доказательство</u>. Если $H = A \dotplus H_t$, то положим $G^* = \{A, G_t\} = A \dotplus G_t$; итак, имеем $G/G^* \cong (G/G_t)/(G^*/G_t)$. Так как $G^*/G_t \cong A \cong H/H_t$, то G^*/G_t является p-полной подгруппой в G/G_t, значит, подгруппа G^*/G_t p-сервантна в G/G_t. Ясно, что G/G_t – группа без кручения, следовательно, $((G/G_t)/(G^*/G_t))[p] = 0$, или также $(G/G^*)[p] = 0$. Из отношения $H \leq G^*$ и p-примарности группы G/H следует p-примарность группы G/G^*. Итак, равенство $(G/G^*)[p] = 0$ влечет с собою равенство $G/G^* = 0$, или, $G = G^* = A \dotplus G_t$. Этим лемма доказана.

Если G – группа с ограниченными порядками элементов, то символом $E(G)$ будем обозначать наименьшее натуральное число n, для которого $nG = 0$; в каждом другом случае полагаем $E(G) = \infty$.

Лемма 6. Пусть Q - подгруппа p-примарной группы P такая, что $P/Q \cong C(p^k)$ $(0 \leqq k \leqq \infty)$. Если Q - γ-группа, то группа P также вудет γ-группой. Притом если $P/Q \cong C(p^\infty)$ и $Q = R \dot{+} D$, где группа D полна и $E(R) < \infty$, то $P = D^* \dot{+} S$, где D^* - полная группа и $E(S) \leqq E(R)$.

Доказательство. Группу Q представим в виде $Q = D \dot{+} R$, где группа D полна и $E(R) < \infty$. Полная группа D служит абсолютным прямым слагаемым для P, и так как $D \cap \cap R = 0$, то можно писать $P = D \dot{+} S_0$, где $R \subseteq S_0$. Отсюда имеем

(5) $$P/Q = (D \dot{+} S_0)/(D \dot{+} R) \cong S_0/R \cong C(p^k).$$

Если $k < \infty$, то из соотношения $E(R) < \infty$ и (5) следует, что также $E(S_0) < \infty$. Итак, P является γ-группой.

Пусть теперь $k = \infty$. Так как $E(R) < \infty$, то в силу (5) группа S_0 не является редуцированной (смотри [2], лемму 19). Если $\mathfrak{X}$ - максималная полная подгруппа группы S_0, то в силу (5) должно быть $\mathfrak{X} \cong C(p^\infty)$; итак,

(6) $$P = D \dot{+} S_0 = D \dot{+} \mathfrak{X} \dot{+} S, \quad S \subseteq S_0,$$

где S - редуцированная группа. Так как $E(\mathfrak{X} \cap R) \leqq E(R) < \infty$ и так как $\mathfrak{X} \cap R \subseteq \mathfrak{X}$, то группа $\mathfrak{X} \cap R$ конечна, следовательно,

(7) $$\{\mathfrak{X}, R\}/R \cong \mathfrak{X}/(\mathfrak{X} \cap R) \cong C(p^\infty).$$

Из включения $\{\mathfrak{X}, R\} \subseteq S_0$ и из (7) и (5) следует равенство $\{\mathfrak{X}, R\}/R = S_0/R$, или, $\{\mathfrak{X}, R\} = S_0$. Так как $S_0 = \mathfrak{X} \dot{+} S$, то

$$S \cong S_0/\mathfrak{X} = \{\mathfrak{X}, R\}/\mathfrak{X} \cong R/(R \cap \mathfrak{X}),$$

или, как легко видеть, $E(S) \leq E(R)$. Отсюда и из (6) следует утверждение леммы для $k = \infty$. Этим лемма полностью доказана.

О p-примарной группе P скажем, что она - конечного ранга, если P является прямой суммой конечного числа групп вида $C(p^k)$ $(1 \leq k \leq \infty)$.

<u>Лемма 7</u>. Пусть Q - подгруппа p-примарной группы P такая, что группа P/Q - конечного ранга. Если Q - $\mathfrak{T}$ - группа, то P также будет $\mathfrak{T}$-группой.

<u>Доказательство</u>. Лемму можно доказать индукцией по числе прямых слагаемых вида $C(p^k)$ $(1 \leq k \leq \infty)$ группы P/Q, пользуясь леммой 6.

<u>Теорема 1</u>. Всякое расширение G расщепляемой группы H при помощи полной p-примарной группы конечного ранга будет расщепляемой группой в точности тогда, если или группа H/H_t p-полна, или p-примарное слагаемое группы H_t является $\mathfrak{T}$-группой.

<u>Доказательство</u>. Пусть G - произвольное расширение расщепляемой группы H при помощи полной p-примарной группы конечного ранга. Если группа H/H_t p- полна, то в силу леммы 5 группа G расщепляема. Итак, пусть Q (соотв. P) - p-примарное слагаемое группы H_t (соотв. G_t), и пусть Q является $\mathfrak{T}$-группой. Так как

$$G_t/H_t = G_t/(G_t \cap H) \cong \{G_t, H\}/H \leq G/H,$$

то должно быть $G_t/H_t \cong P/Q$, или P/Q - p-примарная группа конечного ранга. Следовательно, в силу леммы 7 P является $\mathfrak{T}$-группой. Если теперь применим теорему 5 из [3], то получим, что группа G опять расщепляема.

Если группа H не удовлетворяет ни одному из условий теоремы, то по лемме 4 существует нерасщепляемое расширение G группы H при помощи группы $C(p^{\infty})$. Теорема полностью доказана.

Теперь будем заниматься случаем, когда выпущено условие конечности ранга факторгруппы G/H.

<u>Лемма 8</u>. Пусть Q – подгруппа p-примарной группы P такая, что группа P/Q полна. Если Q – $\mathfrak{Y}$-группа, то P также будет $\mathfrak{Y}$-группой.

<u>Доказательство</u>. Группу Q представим в виде $Q = R \dot{+} D$, где группа D полна и $E(R) < \infty$. Символом $\mathfrak{M}$ обозначим систему всех подгрупп H группы P, представимых в виде $H = S \dot{+} D^*$, где группа D^* полна и $E(S) \leq E(R) = k$, и таких, что $Q \leq H$. Ясно, что $Q \in \mathfrak{M}$. Если $\mathfrak{L} = (H_\iota \ (\iota \in I))$ – непустая цепь в $\mathfrak{M}$, то покажем, что $\bigcup_{\iota \in I} H_\iota = H \in \mathfrak{M}$. В самом деле, пусть $H_\iota = S_\iota \dot{+} D_\iota^*$, где группа D_ι^* полна и $E(S_\iota) \leq k \ (\iota \in I)$. Пусть D^* – максимальная полная подгруппа в H и пусть $H = S \dot{+} D^*$. Очевидно, $D_\iota^* \leq D^*$ для каждого $\iota \in I$. Если $s \in S$, то $s \in H$, значит, существует $\iota \in I$ такое, что $s \in H_\iota = S_\iota \dot{+} D_\iota^*$. Так как $E(S_\iota) \leq k$, то $ks \in D_\iota^* \leq D^*$, итак, $ks \in S \cap D^* = 0$, или, $ks = 0$. Это значит, что $E(S) \leq k$, и, следовательно, $H \in \mathfrak{M}$. По лемме Цорна существует в $\mathfrak{M}$ максимальный элемент; пусть это будет $H_0 = S_0 \dot{+} D_0$. Так как $Q \leq H_0$, то группа P/H_0 должна быть полной. Но если бы было $P/H_0 \neq 0$, то существовала бы подгруппа H_1

группы P такая, что $H_0 \subseteq H_1$ и $H_1/H_0 \cong C(p^{\infty})$. По лемме 6 можно было бы писать $H_1 = S_1 \dotplus D_1^*$, где группа D_1^* полна и $E(S_1) \leqq E(S_0) \leqq k$; итак, $H_1 \in \mathfrak{M}$. Это противоречит выбору подгруппы $H_0 \in \mathfrak{M}$, значит, должно быть $H_0 = P$. Но этим лемма доказана.

<u>Лемма 9</u>. Пусть A - подгруппа группы без кручения B такая, что группа B/A p-примарна. Если группа A/pA конечна, то группа B/A обладает конечным рангом.

<u>Доказательство</u>. Пусть B_0 - подгруппа в B такая, что $A \subseteq B_0$ и $B_0/A = (B/A)[p]$. Если положим $pB_0 = A_0$, то имеем $pA \subseteq pB_0 = A_0 \subseteq A$ и, следовательно, группа A/A_0 конечна, так как группа A/pA конечна. В силу того, что A - группа без кручения, имеем $A/A_0 \cong pA/pA_0$, или, группа pA/pA_0 также конечна. Из изоморфизма

$$A_0/pA \cong (A_0/pA_0)/(pA/pA_0)$$

и из конечности групп A_0/pA и pA/pA_0 уже следует конечность группы $A_0/pA_0 = pB_0/pA_0$ и также группы B_0/A_0, так как $B_0/A_0 \cong pB_0/pA_0$. Ис включения $A_0 \subseteq A \subseteq B_0$ получаем теперь конечность группы $B_0/A = (B/A)[p]$, или, группа B/A обладает конечным рангом.

<u>Лемма 10</u>. Пусть Q - подгруппа полной p-примарной группы P такая, что группа P/Q обладает конечным рангом. Тогда $Q = R \dotplus D$, где группа D полна и R конечна.

<u>Доказательство</u>. Группу Q можно представить в виде

$Q = R \dotplus D$, где группа D полна и R редуцирована. Так как D служит абсолютным прямым слагаемым для P и $R \cap D = 0$, то $P = P^* \dotplus D$, где $R \leq P^*$; итак, группа P^* полна. Имеем $P/Q \cong P^*/R$, или, группа P^*/R обладает конечным рангом. Но отсюда уже легко вывести, что группа R должна быть конечной, и лемма доказана.

<u>Лемма 11</u>. Пусть H – расщепляемая группа такая, что группа $H/\{pH, H_t\}$ конечна и p-примарное слагаемое группы H_t является $\mathfrak{Y}$-группой. Тогда каждое расширение G группы H при помощи полной p-примарной группы является расщепляемой группой.

<u>Доказательство</u>. Пусть G – произвольное расширение группы H при помощи полной p-примарной группы и пусть $H = A \dotplus H_t$. Так как $\{pH, H_t\} = pA \dotplus H_t$, то

$$H/\{pH, H_t\} = (A \dotplus H_t)/(pA \dotplus H_t) \cong A/pA,$$

итак, в силу предположения, группа A/pA конечна. Если положим $H^* = A \dotplus G_t$, то $H \leq H^*$ и, следовательно, G/H^* – полная p-примарная группа. Так как G/G_t – группа без кручения и $H^*/G_t \cong A$, то из изоморфизма

$$(G/G_t)/(H^*/G_t) \cong G/H^*$$

при помощи леммы 9 получаем, что группа G/H^* обладает конечным рангом. Отсюда и из соотношения

$$G/H^* \cong (G/H)/(H^*/H)$$

в силу леммы 10 следует, что p-примарная группа H^*/H является прямой суммой группы полной и конечной. Если P (соотв. Q) обозначает p-примарное слагаемое группы G_t (соотв. H_t), то имеем

$$H^*/H = (A \dotplus G_t)/(A \dotplus H_t) \cong G_t/H_t \cong P/Q,$$

или, P/Q является прямой суммой группы полной и конечной. Если теперь применим лемму 8 и лемму 7, то получим, что P является $\mathcal{T}$-группой. Так как G/H^* - p-примарная группа конечного ранга и $H^* = A \dotplus G_t$, то по теореме 5 из [3] группа G расщепляема.

Теперь мы уже в состоянии доказать следующую теорему.

<u>Теорема 2</u>. Всякое расширение G расщепляемой группы H при помощи полной p-примарной группы будет расщепляемой группой в точности тогда, если выполнено по крайней мере одно из следующих двух условий:

1) группа H/H_t p-полна;

2) группа $H/\{pH, H_t\}$ конечна и p-примарное слагаемое группы H_t является $\mathcal{T}$-группой.

<u>Доказательство</u>. Пусть выполнено некоторое из условий 1), 2) и пусть G - произвольное расширение группы H при помощи полной p-примарной группы. Тогда группа расщепляема, как следует или из леммы 5, или же из леммы 11.

Пусть теперь невыполнено ни одно из условий 1), 2). Если p-примарное слагаемое группы H_t не является $\mathcal{T}$-группой, то в силу леммы 4 существует нерасщепляемое расширение G группы H при помощи группы $C(p^\infty)$. Теперь будем предполагать, что группа $H/\{pH, H_t\}$ бесконечна. Если положим $H = A \dotplus H_t$, то $\{pH, H_t\} = pA \dotplus H_t$, или, $H/\{pH, H_t\} \cong A/pA$; следовательно, группа A/pA бесконечна. Итак, в A можно выбрать бесконечную последовательност элементов $y_0^{(i)}$

$(i=0,1,2,\dots)$ таких, что для целых чисел $m_0, m_1, \dots, m_k$ имеет место соотношение $m_0 y_0^{(0)} + m_1 y_0^{(1)} + \dots + m_k y_0^{(k)} \in pA$ в точности тогда, когда $p \mid m_i$ $(i=0,1,\dots,k)$. Пусть G_0 - группа определенная формулой

$$G_0 = A \dotplus H_t \dotplus \sum_{i=1}^{\infty} \{x_i\} \dotplus \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \{y_j^{(k)}\} \quad ,$$

где $O(x_i) = p^i$ $(i=1,2,\dots)$, и $O(y_j^{(k)}) = \infty$ $(j,k=1,2,\dots)$, и пусть G^* - группа, которая возникла из G_0 прибавлением следующих соотношений:

$$(8) \quad \begin{cases} a) \; p y_1^{(k)} = y_0^{(k)} + x_k & (k=1,2,\dots), \\ b) \; p y_{j+1}^{(k)} = y_j^{(k)} & (j,k=1,2,\dots). \end{cases}$$

Из соотношений (8) видно, что подгруппа $H^* = A \dotplus H_t \dotplus \sum_{i=1}^{\infty} \{x_i\}$ группы G_0 служит опять подгруппой для группы G^*, следовательно, $H_t \dotplus \sum_{i=1}^{\infty} \{x_i\} \subseteq G_t^*$. Если $g \in G^* - H^*$, то g Можно представить в виде

$$(9) \qquad g = a + b + \sum_{i=1}^{n} (m_1^{(i)} y_1^{(k_i)} + \dots + m_{r(i)}^{(i)} y_{r(i)}^{(k_i)}),$$

где $a \in A$, $b \in H_t \dotplus \sum_{i=1}^{\infty} \{x_i\}$, $k_i \neq k_j$ для $i \neq j$ и $m_j^{(i)}$ $(j=1,\dots,r(i);\ i=1,2,\dots,n)$ - удобные целые числа; притом в силу (8) можно предполагать, что $p \nmid m_{r(i)}^{(i)}$ $(i=1,2,\dots,n)$. Пусть $\max(r(i),\dots,r(n)) = 1$; итак,

$$g = a + b + m_1^{(1)} y_1^{(k_1)} + \dots + m_1^{(n)} y_1^{(k_n)},$$

где $p \nmid m_1^{(i)}$ $(i=1,2,\dots,m)$. Если положим $b^* = pb + m_1^{(1)} x_{k_1} + \dots + m_1^{(n)} x_{k_n}$, то в силу (8) a) имеем

$$(10) \quad pg = pa + b^* + m_1^{(1)} y_0^{(k_1)} + \dots + m_1^{(n)} y_0^{(k_n)} \in H^*.$$

Так как $p \nmid m_1^{(i)}$ $(i=1,2,\dots,n)$, то

$$m_1^{(1)} y_0^{(k_1)} + m_1^{(2)} y_0^{(k_2)} + \dots + m_1^{(n)} y_0^{(k_n)} \notin pA$$

и следовательно,

$$0 \neq pa + m_1^{(1)} y_0^{(k_1)} + \dots + m_1^{(n)} y_0^{(k_n)} \in A.$$

Отсюда и из (10) уже следует, что $O(pg) = \infty$, или, $O(g) = \infty$. Индукцией по числе $\max(\varkappa(1), \varkappa(2), \dots, \varkappa(n))$ можно теперь доказать, что $O(g) = \infty$ для каждого $g \in G^* - H^*$. Это значит, что $G_t^* \subseteq H^*$, или, $G_t^* = H_t \dotplus \sum_{i=1}^{\infty} \{x_i\}$.

Из соотношений (8) следует, что

$$G^* = \{H, y_j^{(k)} \ (j, k = 1, 2, \dots,)\};$$

но отсюда и из (8) вытекает, что G^*/H – полная p-примарная группа. Если группа G^* нерасщепляема, то доказательство теоремы уже завершено. Итак, пусть группа G^* расщепляема и пусть $G^* = A^* \dotplus G_t^* = A^* \dotplus H_t \dotplus \sum_{i=1}^{\infty} \{x_i\}$.

Убедимся в том, что группа A^* не является p-полной. Пусть наоборот $pA^* = A^*$. Тогда существует для каждого $g \in G^*$ натуральное число $N(g)$ такое, что для каждого натурального числа n уравнение $p^n x = p^{N(g)} g$ разрешимо в G^*. Значит, если $N = N(y_0^{(0)})$, то существует $g_0 \in G^*$ так, что $p^{N+1} g_0 = p^N y_0^{(0)}$. Так как $y_0^{(0)} \notin pA$, то $g_0 \in G^* - H^*$ и, следовательно, элемент g_0 можно представить в виде (9), где $p \nmid m_{\varkappa(i)}^{(i)}$ $(i = 1, 2, \dots, n)$. В силу того, что $p^{N+1} g_0 \in H^*$, должно быть $1 \leqq \max(\varkappa(1), \dots, \varkappa(n)) = M \leqq N + 1$. Пусть нумерация сделана так, что $M = \varkappa(1) = \dots = \varkappa(t)$ и $\varkappa(i) < M$ для $t + 1 \leqq i \leqq n$. Пользуясь (8), из (9) несложным путем получим, что

(11) $$p^M g_0 = pa_0 + b_0 + m_1 y_0^{(k_1)} + \dots + m_t y_0^{(k_t)},$$

где $a_0 \in A$, $b_0 \in G_t$ и m_i $(i = 1, 2, \dots, t)$ – такие целые числа, что $p \nmid m_i$ $(i = 1, 2, \dots, t)$. Если положим $M^* = N + 1 - M$, то $0 \leqq M^* \leqq N$, и из (11) следует равенство

$$p^N y_0^{(0)} = p^{N+1} g_0 = p^{M^*+1} a_0 + p^{M^*} b_0 + p^{M^*} \sum_{i=1}^{t} m_i y_0^{(k_i)} ;$$

но это уже равенство в группе H^*. Значит, $p^{M^*} b_0 = 0$, или,

$$p^N y_0^{(0)} = p^{M^*+1} a_0 + p^{M^*} \sum_{i=1}^{t} m_i y_0^{(k_i)} .$$

Но A является группой без кручения, следовательно, из последнего равенства имеем

$$\sum_{i=1}^{t} m_i y_0^{(k_i)} - p^{N-M^*} y_0^{(0)} = p(-a_0) \in pA ,$$

и это противоречит выбору элементов $y_0^{(i)}$ $(i = 0, 1, 2, \dots)$, так как $p \nmid m_i$ $(i = 1, 2, \dots, t)$. Этим доказано, что должно быть $pA^* \neq A^*$. Так как p -примарное слагаемое группы $G_t^* = H_t \dotplus \sum_{i=1}^{\infty} \{x_i\}$ не является $\mathcal{V}$ -группой, то по лемме 4 существует нерасщепляемое расширение G группы G^* при помощи группы $C(p^\infty)$. Но так как G^*/H - полная p -примарная группа и $G/G^* \cong C(p^\infty)$, то G/H также будет полной p -примарной группой.

Таким образом мы доказали, что если невыполнено ни одно из условий 1), 2), то существует нерасщепляемое расширение G группы H при помощи полной p -примарной группы. Теорема полностью доказана.

Л и т е р а т у р а

[1] L. FUCHS: Abelian groups, Budapest 1958.

[2] Л. ПРОХАЗКА: Об однородных абелевых группах без кручения, Чехосл.мат.жур.,14(89),1964,171-202.

[3] Л. ПРОХАЗКА: Заметка о расщепляемости смешанных абелёвых групп, Чехосл.Мат.Жур.,10(85), 1960,479-492.

(Received June 1, 1966)