Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae

Helmut Röhrl

Über die Kohomologie berechenbarer Fréchet Garben

Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae, Vol. 10 (1969), No. 4, 625--640

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/105257

Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae
10, 4 (1969)

ÜBER DIE KOHOMOLOGIE BERECHENBARER FRÉCHET GARBEN

Helmut RÖHRL , San Diego x)

In [4] beschreibt A. Grothendieck eine auf A. Weil [8] zurückgehende Methode zur Berechnung von Kohomologiegruppen von Garben wie folgt. Es sei X ein parakompakter topologischer Raum, $\mathfrak{U}$ eine lokal-endliche offene Überdeckung von X und Φ eine Familie von Trägern auf X. Es sei ferner $\mathcal{F}$ eine Garbe von abelschen Gruppen über X und

$$\mathcal{A}^*: \mathcal{A}^0 \xrightarrow{d} \mathcal{A}^1 \xrightarrow{d} \dots$$

eine Auflösung von $\mathcal{F}$.

$$C^*_\Phi(\mathfrak{U}, \mathcal{A}^n): C^0_\Phi(\mathfrak{U}, \mathcal{A}^n) \xrightarrow{\delta} C^1_\Phi(\mathfrak{U}, \mathcal{A}^n) \xrightarrow{\delta} \dots$$

bezeichne den $\mathfrak{U}$-Kokettenkomplex von $\mathcal{A}^n$ mit Trägern in Φ (zur Definition siehe [2],s.205, und die Bemerkung anschliessend an die Definition) und

$$\Gamma_\Phi(X, \mathcal{A}^*): \Gamma_\Phi(X, \mathcal{A}^0) \xrightarrow{d} \Gamma_\Phi(X, \mathcal{A}^1) \xrightarrow{d} \dots$$

den zur Auflösung $\mathcal{A}^*$ gehörigen Schnittkomplex. Es sei $E^q_{\mathfrak{U}}$ die Untergruppe von

$$C^0_\Phi(\mathfrak{U}, \mathcal{A}^{q-1}) \times \dots \times C^{q-1}_\Phi(\mathfrak{U}, \mathcal{A}^0) \quad ,$$

deren Elemente $w = (w^{q-1}, \dots, w^0)$ den Bedingun-

----

x) Research sponsored by the Air Force Office of Scientific Research,Office of Aerospace Research,United States Air Force, under AFOSR Grant AF-AFOSR 68-1572.

gen

$$\delta w^{q-p} = d w^{q-p-1} , \qquad 1 \leq p \leq q-1 ,$$

genügen. Man rechnet leicht nach, dass zu jedem derartigen Element $w = (w^{q-1}, \dots, w^{0})$ sowohl genau ein Element $u(w) \in Z^{q}(\Gamma_{\Phi}(X, A^{*}))$ als auch genau ein Element $v(w) \in Z^{q}_{\Phi}(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ existieren, für welche

$$\delta u(w) = d w^{q-1} \quad \text{und} \quad d v(w) = \delta w^{0}$$

gelten; hier bezeichnen $\delta : \Gamma_{\Phi}(X, \mathcal{A}^{q}) \longrightarrow C^{0}_{\Phi}(X, \mathcal{A}^{q})$ und $d : C^{q}_{\Phi}(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \longrightarrow C^{q}_{\Phi}(\mathfrak{U}, \mathcal{A}^{0})$ die naheliegenden Homomorphismen. Das heisst, man erhält ein Diagramm

$$\begin{array}{ccc} & E^{q}_{\mathfrak{U}} & \\ {\scriptstyle u}\swarrow & & \searrow{\scriptstyle v} \\ Z^{q}(\Gamma_{\Phi}(X, \mathcal{A}^{*})) & & Z^{q}_{\Phi}(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \end{array}$$

Der zentrale Satz in [4] lautet dann wie folgt

<u>Satz 1</u>: Es sei X ein parakompakter topologischer Raum, $\mathcal{F}$ eine Garbe von abelschen Gruppen über X und $\mathcal{A}^{*}$ eine Auflösung von $\mathcal{F}$. Es sei ferner q eine natürliche Zahl derart, dass es für jedes $x \in X$ und für jede Umgebung U von x eine Umgebung V von x, welche U enthält, so gibt, dass die kanonischen Abbildungen

(1) $\quad H^{p}(\Gamma_{\Phi}(U, \mathcal{A}^{*})) \longrightarrow H^{p}(\Gamma_{\Phi}(V, \mathcal{A}^{*})), \quad 1 \leq p \leq q ,$

gleich der Nullabbildung sind. Dann gibt es beliebig feine, lokal-endliche offene Überdeckungen $\mathfrak{U}$ von X, für welche die Abbildung $u: E^q_{\mathfrak{U}} \longrightarrow Z^q(\Gamma_\Phi(X, \mathcal{A}^*))$

surjektiv ist. Für eine derartige Überdeckung lässt sich des weiteren eine lokal-endliche offene Verfeinerung $\mathfrak{V}$ finden derart, dass jedes $w \in E^q_{\mathfrak{U}}$ mit $u(w) \in B^q(\Gamma_\Phi(X, \mathcal{A}^*))$ unter der Komposition

$$E^q_{\mathfrak{U}} \longrightarrow H^q_\Phi(\mathfrak{U}, F) \longrightarrow H^q_\Phi(\mathfrak{V}, F)$$

in die Null übergeht. Folglich lässt sich die resultierende Abbildung

$$H^q(\Gamma_\Phi(X, \mathcal{A}^*)) \longrightarrow H^q_\Phi(X, \mathcal{F})$$

durch $H^q_\Phi(\mathfrak{V}, \mathcal{F})$ faktorisieren.

Beweis: Der elementare Beweis, welcher in [4] nicht gegeben ist, soll der Vollständigkeit halber hier geführt werden. Dazu benötigen wir die nachstehende Konstruktion. Es sei $\mathfrak{V} = \{V_i\}_{i \in I}$ eine lokal-endliche offene Überdeckung von X. Nach dem Schrumpfungssatz gibt es eine offene Überdeckung $\widetilde{\mathfrak{V}} = \{\widetilde{V}_i\}_{i \in I}$ von X derart, dass $\overline{\widetilde{V}}_i \subset V_i$ gilt für jedes $i \in I$. Nun lässt sich für jedes $x \in X$ eine offene Umgebung U_x so bestimmen, dass

(i) $x \in \widetilde{V}_i$ (bzw. $x \in V_i$) impliziert $U_x \subset \widetilde{V}_i$ (bzw. $U_x \subset V_i$),

(ii) $U_x \cap \widetilde{V}_i \neq \emptyset$ impliziert $U_x \subset V_i$.

Zu jedem U_x gibt es eine offene Umgebung V_x von x, für welche (i) statthat. Da X parakompakt ist, gibt es eine lokal-endliche Verfeinerung $\mathfrak{V}' = \{V'_j\}_{j \in J}$ von $\{U_x\}_{x \in X}$. Ist $\tau : J \longrightarrow X$ eine Verfeinerungsabbildung, so ist (1) offenbar erfüllt für $V = V'_j$ und $\mathfrak{U} = \mathfrak{U}_{\tau(j)}$.

Nun zum Beweis der ersten Behauptung! Es sei $\mathfrak{V}^0$ eine lokal-endliche offene Überdeckung von X und w^q ein Element von $Z^q(\Gamma_\Phi(X, \mathcal{A}^*))$, d.h. ein Element von $\Gamma_\Phi(X, \mathcal{A}^q) = C_\Phi^{-1}(\mathfrak{V}^0, \mathcal{A}^q)$ mit $dw^q = 0$. Nehmen wir an, wir hätten induktiv eine lokal-endliche Verfeinerung $\mathfrak{V}^p$ von $\mathfrak{V}^0$ und Elemente

$$w^{q-p} \in C_\Phi^{p-1}(\mathfrak{V}^{p_0}, \mathcal{A}^{q-p}), \quad p = 0, \dots, p_0 ,$$

so konstruiert, dass

$$(2) \qquad \delta w^{q-p} = dw^{q-p-1}, \quad p = 0, \dots, p_0 - 1 ,$$

gilt. Da δ und d vertauschbar sind, ergibt sich

$$(3) \qquad d(\delta w^{q-p_0}) = 0 .$$

Wir bilden nun nach dem oben angegebenen Verfahren die Verfeinerung $\mathfrak{V}^{p_0+1} = (\mathfrak{V}^{p_0})'$ von $\mathfrak{V}^{p_0}$. Unter einer Verfeinerungsabbildung gehen die Elemente w^{q-p} in Elemente $\overline{w}^{q-p} \in C_\Phi^{p-1}(\mathfrak{V}^{p_0+1}, \mathcal{A}^{q-p})$, $p = 0, \dots, p_0$, über, für welche wiederum (2) und damit (3) erfüllt ist. In der obigen Bezeichungsweise gibt es zu jedem p_0-Simplex $V^{p_0+1}_{j_0 \dots j_{p_0}}$ des Nervs von $\mathfrak{V}^{p_0+1}$ ein $\mathfrak{U}_\varkappa$, welches dieses Simplex enthält. Die Bedingung (ii) hat dann zur Folge, dass $\mathfrak{U}_\varkappa$ in einem p_0-Simplex des Nervs von $\mathfrak{V}^{p_0}$ enthalten ist. Dies besagt, dass $(\delta \overline{w}^{q-p_0})_{j_0 \dots j_{p_0}}$ durch Beschränkung eines Elements von $Z^{q-p_0}(\Gamma_\Phi(\mathfrak{U}_x, \mathcal{A}^*))$ erhalten werden kann und damit wegen (1) von der Form $dw^{q-p_0-1}_{j_0\dots j_{p_0}}$ ist; hierbei ist $w^{q-p_0-1}_{j_0\dots j_{p_0}}$ ein geeignetes Element von $\Gamma_\Phi(V^{p_0+1}_{j_0\dots j_{p_0}}, \mathcal{A}^{q-p_0-1})$. Nach endlich vielen Schritten erhält man schliesslich ein Element $w \in E^q_{\mathfrak{U}}$ mit $\mu(w) = w^q$.

Die zweite Behauptung ergibt sich in ähnlicher Weise. Gilt nämlich $\mu(w) \in B^q(\Gamma_\Phi(X, \mathcal{A}^*))$, d.h. gibt es ein Element $\bar{w}^{q-1} \in \Gamma_\Phi(X, \mathcal{A}^{q-1})$ mit $\mu(w) = d\bar{w}^{q-1}$, so konstruiert man wie oben zu einer geeigneten Verfeinerung $\mathfrak{V}$ der gegebenen Überdeckung $\mathfrak{U}$ Elemente

$$\bar{w}^{q-p} \in C^{p-2}_\Phi(\mathfrak{V}, \mathcal{A}^{q-p}), \qquad p = 1, \dots, q,$$

derart, dass die Bedingungen

(4) $\quad w^0 = \delta\bar{w}^0$ und $w^{q-p} - \delta\bar{w}^{q-p} = dw^{q-p-1}, \; p = 1,\dots,q-1$

erfüllt sind; hierbei wurden die Bilder der ursprünglichen Komponenten w^{q-p} von w unter der Verfeinerungsabbildung $C^{p-1}_\Phi(\mathfrak{U}, \mathcal{A}^{q-p}) \longrightarrow C^{p-1}_\Phi(\mathfrak{V}, \mathcal{A}^{q-p})$ wiederum mit w^{q-p} bezeichnet. Da

$$d\nu(w) = \delta w^0 = \delta(w^0 - \delta\bar{w}^0)$$

und wegen (4) weiterhin

$$d(w^0 - \delta\bar{w}^0) = dw^0 - d\delta\bar{w}^0 = \delta(w^1 - d\bar{w}^0) = \delta^2 w^1 = 0$$

gilt, hat man endlich für ein geeignetes Element

$\tilde{w}^0 \in C^{q-1}_\Phi(\mathfrak{V}, \mathcal{F})$

$$dv(w) = \delta(w^0 - \delta\tilde{w}^0) = \delta d\tilde{w}^0 = d\delta\tilde{w}^0 \ ,$$

womit die zweite Behauptung erwiesen ist.

Die abschliessend angegebene Faktorisierung ist eine triviale Folgerung der vorangehenden Feststellungen.

Für den Rest dieser Arbeit beschränken wir uns auf Garben $\mathcal{F}$, welche Φ-berechenbar bis zu einem gegebenen Grade q sind. Hierunter verstehen wir mit A. Grothendieck [4] die Eigenschaft, dass es für jeden Punkt x von X und für jede offene Umgebung U von x eine Umgebung $V \subset U$ von x gibt, für welche die natürlichen Homomorphismen

$$H^p_\Phi(U, \mathcal{F}) \longrightarrow H^p_\Phi(V, \mathcal{F}) \ , \qquad 1 \leq p \leq q \ ,$$

die Nullmorphismen sind. Wir ergänzen diese Definition, indem wir jede Garbe als berechenbar bis zum Grade 0 ansehen. Für derartige Garben hat man (siehe [4], Corollaire 2, und [2], Chap.II,Theoreme 5.10.1) den

<u>Satz 2</u>: Es sei X ein parakompakter topologischer Raum und $\mathcal{F}$ eine Garbe von abelschen Gruppen über X, welche Φ-berechenbar bis zum Grade q ist. Dann gibt es beliebig feine, lokal-endliche Überdeckungen $\mathfrak{U}$ von X derart, dass für eine geeignete lokal-endliche Verfeinerung $\mathfrak{V}$ von $\mathfrak{U}$ der kanonische Homomorphismus $H^q_\Phi(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \longrightarrow H^q_\Phi(X, \mathcal{F})$ einen Isomorphismus des Kobildes von $H^q_\Phi(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \longrightarrow H^q_\Phi(\mathfrak{V}, \mathcal{F})$ auf $H^q_\Phi(X, \mathcal{F})$ induziert.

Beweis: Wählen wir für $\mathcal{A}^*$ die Standard Auflösung $\mathcal{C}^*(X, \mathcal{F})$ von $\mathcal{F}$ (siehe [2],S.167), so ist die Berechenbarkeit von $\mathcal{F}$ bis zum Grade q äquivalent mit der Voraussetzung (1) von Satz 1, weshalb die Aussage dieses Satzes anwendbar wird. Für welke Garben $\mathcal{A}^n$ ist jedoch der Kokettenkomplex $C^*_\Phi(\mathcal{U}, \mathcal{A}^n)$ exakt (siehe [2], Chap.II,Theoreme 5.2.3). Somit ist die Abbildung $\nu : E^q_{\mathcal{U}} \longrightarrow Z^q_\Phi(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ surjektiv und ein einfaches Diagrammargument führt zur Aussage von Satz 2.

Mit Hilfe dieses Satzes leitet Grothendieck bekannte Endlichkeitsaussagen über die Kohomologie analytisch-kohärenter Garben über kompakten komplexen Räumen her. Wir wollen Satz 2 benützen, um ein Ergebnis von Y.T. Siu [6] auf <u>Fréchet Garben</u> zu verallgemeinern. Dabei versteht man unter einer Fréchet Garbe eine Garbe $\mathcal{F}$ von reellen Vektorräumen über dem topologischen Raume X derart, dass für jede offene Teilmenge U von X der Vektorraum $\mathcal{F}(U)$ die Struktur eines reellen Fréchet Raumes besitzt und dass für jede Inklusion $U' \subset U$ der Homomorphismus $\mathcal{F}(U) \longrightarrow$ $\longrightarrow \mathcal{F}(U')$ stetig ist. Wir interessieren uns für die algebraische Dimension $\dim_{\mathbb{R}} H^q_\Phi(X, \mathcal{F})$ der reellen Vektorräume $H^q_\Phi(X, \mathcal{F})$. Nennen wir die Familie Φ von Trägern abgeschlossen gegenüber abzählbaren Vereinigungen, falls es zu jeder Folge $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ in Φ ein Element $A \in \Phi$ mit $\cup A_n \subset A$ gibt, so gilt

Satz 3: Es sei X ein lokal kompakter, im Unendlichen abzählbarer topologischer Raum, Φ eine Familie von Trägern auf X, welche gegenüber abzählbaren Vereinigungen abgeschlossen ist, und $\mathcal{F}$ eine Fréchet Garbe über X, welche Φ-berechenbar bis zum Grade q ist. Dann gilt $\dim_{\mathbb{R}} H^q_\Phi(X, \mathcal{F}) \neq \aleph_0$.

Beweis: Für die in Satz 2 auftretenden lokalendlichen, und damit abzählbaren, Überdeckungen $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{V}$ von X bilden wir Kokettengruppen

$$C^p(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) = \prod \Gamma(U_{i_0 \dots i_p}, \mathcal{F}) \text{ und } C^p(\mathfrak{V}, \mathcal{F}) = \prod \Gamma(V_{j_0 \dots j_p}, \mathcal{F}).$$

Da $\mathcal{F}$ eine Fréchet Garbe ist, trägt jeder Faktor dieser Produkte die Struktur eines Fréchet Raumes. Die eben erwähnten Kokettengruppen sind dann als abzählbare Produkte von Fréchet Räumen wiederum Fréchet Räume. Die getroffene Voraussetzung über Φ hat zur Folge, dass sowohl $C^p_\Phi(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ als auch $C^p_\Phi(\mathfrak{V}, \mathcal{F})$ ein abgeschlossener Unterraum von $C^p(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ bzw. $C^p(\mathfrak{V}, \mathcal{F})$ und damit selbst ein Fréchet Raum ist. Man überzeugt sich leicht, dass sowohl die Koränder

$$\delta^p: C^p_\Phi(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \to C^{p+1}_\Phi(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \text{ und } \delta^p: C^p_\Phi(\mathfrak{V}, \mathcal{F}) \to C^{p+1}_\Phi(\mathfrak{V}, \mathcal{F})$$

als auch die durch eine gegebene Verfeinerungsabbildung von $\mathfrak{U}$ nach $\mathfrak{V}$ induzierten Homomorphismen

$$C^p_\Phi(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \longrightarrow C^p_\Phi(\mathfrak{V}, \mathcal{F})$$

stetig ist. Da der Kern eines stetigen Homomorphismus zwischen Fréchet Räumen in der induzierten Topologie ein Fréchet Raum ist, tragen auch die Kozyklengruppen

$Z^r_\Phi(\mathfrak{U},\mathcal{F})$ und $Z^r_\Phi(\mathfrak{V},\mathcal{F})$ in kanonischer Weise eine Fréchet Struktur. Die induzierten Homomorphismen

$C^{q-1}_\Phi(\mathfrak{U},\mathcal{F}) \longrightarrow Z^q_\Phi(\mathfrak{U},\mathcal{F})$ und $C^{q-1}_\Phi(\mathfrak{V},\mathcal{F}) \longrightarrow Z^q_\Phi(\mathfrak{V},\mathcal{F})$

bzw.

$$Z^q_\Phi(\mathfrak{U},\mathcal{F}) \xrightarrow{\psi} Z^q_\Phi(\mathfrak{V},\mathcal{F})$$

sind wiederum stetig. Nach Satz 2 ist $H^q_\Phi(X,\mathcal{F})$ isomorph zum Kobild $H^q_\Phi(\mathfrak{U},\mathcal{F}) \longrightarrow H^q_\Phi(\mathfrak{V},\mathcal{F})$. Offensichtlich ist dieses Kobild isomorph zum Kobild von

$Z^q_\Phi(\mathfrak{U},\mathcal{F}) \to H^q_\Phi(\mathfrak{U},\mathcal{F}) \to H^q_\Phi(\mathfrak{V},\mathcal{F}) = Z^q_\Phi(\mathfrak{U},\mathcal{F}) \to Z^q_\Phi(\mathfrak{V},\mathcal{F}) \to H^q_\Phi(\mathfrak{V},\mathcal{F})$.

Das letztere ist aber isomorph zu

$$Z^q_\Phi(\mathfrak{U},\mathcal{F})/\psi^{-1}(\delta^{q-1}C^{q-1}_\Phi(\mathfrak{V},\mathcal{F})).$$

Bezeichnet man (siehe [4]) mit F den Vektorraum

$\{(x,c): x \in Z^q_\Phi(\mathfrak{U},\mathcal{F})\ \&\ c \in C^{q-1}_\Phi(\mathfrak{V},\mathcal{F})\ \&\ \psi x = \delta^{q-1}c\}$,

so induziert die Produktstruktur auf $Z^q_\Phi(\mathfrak{U},\mathcal{F}) \times C^{q-1}_\Phi(\mathfrak{V},\mathcal{F})$ eine kanonische Fréchet Struktur auf $\mathcal{F}$. Offenbar ist die Projektion von $\mathcal{F}$ zur ersten Koordinate ein stetiger Homomorphismus von $\mathcal{F}$ in $Z^q_\Phi(\mathfrak{U},\mathcal{F})$, dessen Bild mit $\psi^{-1}(\delta^{q-1}C^{q-1}_\Phi(\mathfrak{V},\mathcal{F}))$ übereinstimmt. Damit folgt aber unsere Behauptung aus der reellen Version von Theorem 4 in [6].

Satz 3 führt nun zum folgenden Korollar, welches unter Benutzung tiefliegender Ergebnisse über elliptische Operatoren von Y.T. Siu [6] für komplexe Mannigfaltigkeiten bewiesen wurde.

Korollar 1: Es sei $\mathcal{O}_X$ ein im Unendlichen abzählbarer (nicht notwending reduzierter) komplexer Raum und $\mathcal{M}$ ein kohärenter $\mathcal{O}_X$-Modul. Dann gilt für jede ganze Zahl $q \geq 0$, $\dim_{\mathbb{C}} H^q(X, \mathcal{M}) \neq \aleph_0$.

Beweis: Bekanntlich [3] ist $\mathcal{M}$ eine Fréchet Garbe, welche auf Grund von "Théorème B" berechenbar ist. - Es sei darauf hingewiesen, dass hier die Verwendung von Satz 2 sehr einfach durch eine Anwendung des Lerayschen Lemmas umgangen werden kann.

Verstehen wir wie in [7] unter einem reellen Raum einen geringten Raum, der lokal isomorph ist zu einer kohärenten reell-analytischen Menge $A \subset W = W^\circ \subset \mathbb{R}^n$ versehen mit $({}_n\mathcal{O}_{\mathbb{R}} / \mathcal{J}) \mid A$ als Strukturgarbe - wobei wie üblich $\mathcal{J}$ kohärent ist und A als genaue Nullstellenmenge besitzt - , so erhalten wir die reelle Version von Korollar 1.

Korollar 2: Es sei $\mathcal{O}_Y$ ein im Unendlichen abzählbarer (nicht notwendig reduzierter) reeller Raum und $\mathcal{N}$ ein kohärenter $\mathcal{O}_Y$-Modul. Dann gilt für jede ganze Zahl $q \geq 0$, $\dim_{\mathbb{R}} H^q(X, \mathcal{N}) \neq \aleph_0$.

Beweis: $\mathcal{N}$ ist wiederum eine Fréchet Garbe, welche auf Grund der reellen Version von "Théorème B" (siehe [1]) berechenbar ist.

Korollar 3: Es sei X ein im Unendlichen abzählbarer clc_F^q Raum und F ein reeller Fréchet Raum. Dann ist für jede ganze Zahl q, $\dim_{\mathbb{R}} H^q(X, F) \neq \aleph_0$.

__Beweis__: Da X im Unendlichen abzählbar ist, ist die konstante Garbe F eine Fréchet Garbe. Die Voraussetzung clc_F^q ist nicht anderes als die Berechenbarkeit von F bis zum Grade q.

__Korollar 4__: Es sei X ein im Unendlichen abzählbarer topologischer Raum, welcher dem ersten Abzählbarkeitsaxiom (über die Existenz abzählbarer Umgebungsbasen) genügt. Es sei ferner

$$\mathcal{A}^* : \mathcal{A}^0 \longrightarrow \mathcal{A}^1 \longrightarrow \dots \longrightarrow \mathcal{A}^q \longrightarrow \mathcal{A}^{q+1}$$

eine Auflösung der Garbe $\mathcal{F}$ vermittels Garben reeller Vektorräume. Es gelte

(i) $\mathcal{A}^0, \dots, \mathcal{A}^q$ sind feine, reelle Fréchet Garben,

(ii) alle Homomorphismen $\mathcal{A}^{p-1} \longrightarrow \mathcal{A}^p$, $p \leq q$, sind stetig (d.h. für jede offene Menge $\mathcal{U}$ ist die induzierte Abbildung $\mathcal{A}^{p-1}(\mathcal{U}) \longrightarrow \mathcal{A}^p(\mathcal{U})$ ein stetiger $\mathbb{R}$-Homomorphismus),

(iii) für jede offene Menge $\mathcal{U}$ ist der Kern von $\mathcal{A}^q(\mathcal{U}) \longrightarrow \mathcal{A}^{q+1}(\mathcal{U})$ abgeschlossen.

Dann gilt $\dim_{\mathbb{R}} H^q(X, \mathcal{F}) \neq \aleph_0$.

__Beweis__: Analog zum Beweis von Théorème 3 in [4].

Verwendet man anstelle des in [4] benützten Kompaktheitssatzes von Schwartz das im Beweis von Satz 3 verwendete Resultat von Siu, so lässt sich Lemme 2 in [4] wie folgt übertragen:

__Lemma__: Es sei X ein lokal kompakter topologischer Raum, der dem zweiten Abzählbarkeitsaxiom genügt. Es sei ferner $\mathcal{F}$ eine reelle Fréchet Garbe über X und q eine positive Zahl so, dass für eine offene Überdeckung $\mathfrak{U}$ von X der kanonische Homomorphismus $H^q(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \longrightarrow H^q(X, \mathcal{F})$ surjektiv ist. Dann gilt $\dim_{\mathbb{R}} H^q(X, \mathcal{F}) \neq \aleph_0$.

<u>Beweis:</u> Die Voraussetzungen über X haben zur Folge, dass X metrisierbar und im Unendlichen abzählbar ist.

Damit erhält man, wiederum Grothendiecks Argument folgend,

<u>Satz 4</u>: Es sei X ein lokal kompakter topologischer Raum, der dem zweiten Abzählbarkeitsaxiom genügt. Es sei ferner

$$\mathcal{A}^* : \mathcal{A}^0 \longrightarrow \mathcal{A}^1 \longrightarrow \dots \longrightarrow \mathcal{A}^q \longrightarrow \mathcal{A}^{q+1}$$

eine Auflösung der Garbe $\mathcal{F}$ vermittels Garben reeller Vektorräume. Es gelte

(i) $\mathcal{A}^0, \dots, \mathcal{A}^q$ sind reelle Fréchet Garben,

(ii) wie in (ii), Korollar 4,

(iii) wie in (iii), Korollar 4,

(iv) die kanonische Abbildung $H^q(\Gamma(X, \mathcal{A}^*)) \longrightarrow H^q(X, \mathcal{F})$ ist surjektiv.

Dann gilt $\dim_{\mathbb{R}} H^q(X, \mathcal{F}) \neq \aleph_0$.

Korollar 1 führt zu (siehe auch [6], Theorem B)

<u>Satz 5</u>: Es sei $\mathcal{O}_X$ ein reduzierter, irreduzibler, und im Unendlichen abzählbarer komplexer Raum der Dimension 2. Ferner gelte $\dim_{\mathbb{C}} H^1(X, \mathcal{O}_X) \leq \aleph_0$.

Ist für jedes kohärente Ideal $\mathcal{J}$, dessen Nullstellenmenge diskret ist, die gemeinsame Nullstellenmenge von $\Gamma(X, \mathcal{J})$ diskret, dann ist $\mathcal{O}_X$ holomorph vollständig.

<u>Beweis</u>: Aus dem Maximumprinzip und unserer Annahme über kohärente Ideale folgt, dass keine 1-dimensionale analytische Teilmenge von X kompakt ist. Damit ergibt sich aus einem Satz von R. Narasimhan [5], dass jeder 1-dimensionale komplexe Unterraum von X holomorph vollständig ist. Wir behaupten nun, dass $\mathcal{O}_X$ holomorph konvex ist. Es sei also S eine Teilmenge von X, welche keine Häufungspunkte besitzt. Bezeichnet man mit $\mathcal{J}$ das zu S gehörige kohärente Ideal, so folgt aus Dimensionsgründen, dass die durch die Inklusion $j : \mathcal{J} \longrightarrow \mathcal{O}_X$ induzierte Abbildung $H^1(X, j)$: $H^1(X, \mathcal{J}) \longrightarrow H^1(X, \mathcal{O}_X)$ surjektiv ist. Nach Voraussetzung gibt es in $\Gamma(X, \mathcal{J})$ ein von Null verschiedenes Element f. Da $\mathcal{O}_X$ als reduziert und irreduzible angenommen wurde, ist der Garbenhomomorphismus $f : \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{J}$ "Multiplikation mit f" eine Injektion. Die exakte Garbensequenz $0 \longrightarrow \mathcal{O}_X \xrightarrow{f} \mathcal{J} \rightarrow$ $\longrightarrow \mathcal{J}/f\,\mathcal{O}_X \longrightarrow 0$ führt dann zur exakten Sequenz

$$H^1(X, \mathcal{O}_X) \xrightarrow{H^1(X,f)} H^1(X, \mathcal{J}) \longrightarrow H^1(X, \mathcal{J}/f\,\mathcal{O}_X) \ .$$

$\mathcal{J}/f\,\mathcal{O}_X$ ist aber ein kohärentes $\mathcal{O}_X/f\,\mathcal{O}_X$ -Ideal. Da die Beschränkung von $\mathcal{O}_X/f\,\mathcal{O}_X$ auf die Nullstellenmenge von f ein 1-dimensionaler komplexer Raum und somit holomorph vollständig ist, erhalten wir die Surjektivität von $H^1(X, f)$. Weil $H^1(X, \mathcal{O}_X)$ nach Korollar 1 endlich-dimensional ist, folgern wir schliesslich, dass $H^1(X, j)$ und damit auch $H^1(X, f)$ ein Isomorphismus ist. Damit ist aber $\Gamma(X, \mathcal{O}_X) \longrightarrow \Gamma(S, \mathcal{O}_X/\mathcal{J})$ als surjektiv erkannt und somit die behauptete holomorphe Konvexität sichergestellt. Diese wiederum hat nach dem Quotientensatz von K.W. Wiegmann [9] die Existenz einer holomorphen, surjektiven, eigentlichen und diskreten Abbildung von $\mathcal{O}_X$ auf einen holomorph vollständigen Raum zur Folge. Also ist nach einem Resultat von [5] $\mathcal{O}_X$ selbst holomorph vollständig.

Eine weitere Folgerung von Satz 1 ist

<u>Satz 6</u>: Es sei $\mathcal{O}_X$ ein im Unendlichen abzählbarer (nicht notwendig reduzierter) komplexer Raum derart, dass für jedes kohärentes Ideal $\mathcal{J}$ mit diskreter Nullstellenmenge $\dim_{\mathbb{C}} H^1(X, \mathcal{J}) \leq \aleph_0$ gilt. Dann ist $\mathcal{O}_X$ holomorph prävollständig.

<u>Beweis</u>: Ist $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine Punktfolge in X ohne Häufungspunkt und bezeichnet $\mathcal{J}$ die zugehörige kohärente Idealgarbe, so hat Korollar 1 zusammen mit der obigen Bedingung zur Folge, dass das Bild von $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ in $\Gamma(X, \mathcal{O}_X/\mathcal{J})$ endliche Kodimension aufweist. Das besagt aber, dass es ein Element von $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ gibt, welches auf der gegebenen Punktfolge unbeschränkt ist.

$\mathcal{O}_X$ ist also holomorph konvex. Der Quotientensatz von K.W. Wiegmann [9] weist dann die Algebra $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ als Steinsch und damit $\mathcal{O}_X$ selbst als holomorph prävollständig nach.

Korollar: Es sei $\mathcal{O}_X$ ein im Unendlichen abzählbarer, holomorph separabler (nicht notwendig reduzierter) komplexer Raum. Dann ist $\mathcal{O}_X$ holomorph vollständig genau wenn für jedes kohärente Ideal $\mathcal{J}$ mit diskreter Nullstellenmenge $\dim_{\mathbb{C}} H^1(X, \mathcal{J}) \leq \aleph_0$ gilt.

Beweis: Die Notwendigkeit der angegebenen Bedingung folgt unmittelbar aus "Théorème B". Ist umgekehrt die angegebene Bedingung erfüllt, so erweist sich die im Beweise von Satz 6 benützte Quotientenabbildung aufgrund der geforderten holomorphen Separabilität als eine Homöomorphie der unterliegenden topologischen Räume (siehe den Beweis des Quotientensatzes in [9]). Da der Quotient von $\mathcal{O}_X$ holomorph vollständig ist, wie wir im Beweise von Satz 6 sahen, ist $\mathcal{O}_X$ selbst holomorph vollständig.

R e f e r e n z e n

[1] H. CARTAN: Variétés analytiques réelles et variétés analytiques complexes. Bull.Soc.Math. France 85(1957),77-99.

[2] R. GODEMENT: Théorie des faisceaux. Hermann,Paris 1958.

[3] H. GRAUERT: Ein Theorem der analytischen Garbentheorie und Modulräume komplexer Struktu-

ren. Publ.Math.IHES 5(1960),233-292.

[4] A. GROTHENDIECK: Théorèmes de finitude pour la cohomologie des faisceaux. Bull. Soc.Math.France 84(1956),1-7.

[5] R. NARASIMHAN: A note on Stein spaces and their normalizations. Ann.Scuola Norm.Sup. Pisa 16(1962),327-333.

[6] Y.T. SIU: Non-countable dimensions of cohomology groups of analytic sheaves and domains of holomorphy. Math.Ztsch.102 (1967),17-29.

[7] A. TOGNOLI: Proprietà globali degli spazi analitici reali. Ann.Mat.Pura Appl.75 (1967),143-218.

[8] A. WEIL: Sur les théorèmes de de Rham. Comment. Math.Helv.26(1952),119-145.

[9] K.W. WIEGMANN: Über Quotienten holomorph konvexer Räume. Math.Z.97(1967),251-258.

University of California
at San Diego
U.S.A.

(Oblatum 22.9.1969)