Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae

Osvald Demuth

Об интегрируемости производных от конструктивных функций

Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae, Vol. 11 (1970), No. 4, 667--691

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/105307

Commentationes Mathematicae Universitatis Caroline
11,4 (1970)

ОБ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ ПРОИЗВОДНЫХ ОТ КОНСТРУКТИВНЫХ ФУНКЦИЙ

О. ДЕМУТ, Прага

В классической математике верно следующее утверждение: Пусть $\mathcal{F}$ функция, неубывающая на сегменте $0 \Delta 1$. Тогда существует интегрируемая по Лебегу функция f, которая является почти всюду на $0 \Delta 1$ производной от $\mathcal{F}$. При этом выполнено $\int_0^1 f(x)dx \leq \mathcal{F}(1) - \mathcal{F}(0)$ ([4], стр. 231).

В примерах 1 - 3 и теоремах 2 и 3 настоящей работы показано, как дело обстоит в конструктивной математике.

В статье пользуемся определениями и результатами из [5] - [7], в частности понятием интегрируемости функций по Лебегу [5], свойствами $\mathfrak{M}_1$ [5] и $\mathfrak{N}_1$ [6], которые являются конструктивными аналогами понятия измеримости функций, пространствами L_1 и $\mathcal{S}$ [7].

В дальнейшем буквы k, l, m, n и q служат переменными для натуральных чисел (НЧ), i и j - переменными для целых чисел, a - для рациональных чисел (РЧ), а u, x, y и z - для конструктивных действительных чисел (КДЧ).

Функциями называем всюду определенные конструктивные функции действительной переменной f такие, что
$\forall x\,((x \leq 0 \supset f(x) = f(0))\,\&\,(1 \leq x \supset f(x) = f(1)))$.

Последовательность неперекрывающихся рациональных сегментов, содержащихся в сегменте $0 \Delta 1$, назовем $\mathcal{S}$-множеством, а КДЧ z мерой этого множества, если частные суммы длин сегментов этой последовательности сходятся к z.

Если $\mathcal{Y}$ S-множество, а x КДЧ, то посредством $x \in \mathcal{Y}$ обозначим: не может не существовать сегмент последовательности $\mathcal{Y}$, содержащий x.

Замечание 1 из [9] показывает, что мы можем S-множествами пользоваться вместо ${}^{(1)}S_{\sigma}$-множеств, использованных в [5] - [7], и что для любых S-множеств $\mathcal{Y}$ и $\mathcal{G}$ существует S-множество $\mathcal{U}$ такое, что мера $\mathcal{U}$ не больше суммы мер $\mathcal{Y}$ и $\mathcal{G}$ и верно $\forall x (x \in \mathcal{U} \equiv \neg\neg(x \in \mathcal{Y} \vee \vee x \in \mathcal{G}))$.

λ - нормальный алгорифм [1] такой, что $\forall z p (\lambda(z,p) \simeq max(min(z,p),-p))$.

<u>Обозначения</u>. Пусть $\mathcal{F}$ функция, $\{F_n\}_n$ - последовательность ступенчатых остовов, x и z КДЧ.

1) Посредством $D(z, \mathcal{F}, x)$ обозначим: z является значением производной от функции $\mathcal{F}$ в точке x (определение приведено в [2], стр.363).

2) $P(z, \{F_n\}_n, x)$ обозначает: последовательность КДЧ $\{\vartheta(F_n\, x)\}_n$ определена и сходится к z.

3) Для возрастающей последовательности НЧ $\{k_l\}_l$ мы посредством $\mathcal{A}(\mathcal{F}, \{k_l\}_l)$ обозначим: для всякого НЧ l и любой системы неперекрывающихся рациональных сегментов $\{c_i \Delta d_i\}_{i=1}^{h}$ выполнено

$$\left(\sum_{i=1}^{h} |c_i \Delta d_i| < \frac{1}{2^{k_l}} \supset \sum_{i=1}^{h} |\mathcal{F}(d_i) - \mathcal{F}(c_i)| < \frac{1}{2^l}\right).$$

4) $\mathcal{A}(\mathcal{F})$ обозначает: существует возрастающая последовательность НЧ $\{k_l\}_l$ такая, что $\mathcal{A}(\mathcal{F}, \{k_l\}_l)$.

Верность следующего утверждения очевидна.

Лемма 1. Пусть $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ функции, а $\{k_l\}_l$ возрастающая последовательность НЧ. Тогда

1) если $\mathcal{A}(\mathcal{F}, \{k_l\}_l)$, то для всякой системы неперекрывающихся рациональных сегментов $\{a_j \Delta b_j\}_{j=1}^{t}$ выполнено $\sum_{j=1}^{t} |\mathcal{F}(b_j) - \mathcal{F}(a_j)| < 2^{k_1}$;

2) если $\mathcal{A}(\mathcal{F}, \{k_l\}_l)$ и для всяких НЧ m и рационального сегмента $a \Delta b$, содержащегося в $0 \Delta 1$, существует система неперекрывающихся рациональных сегментов $\{c_i \Delta d_i\}_{i=1}^{s}$ такая, что $\forall i (1 \leq i \leq s \supset a \leq c_i < d_i \leq b)$ и $|\mathcal{G}(b) - \mathcal{G}(a)| < \sum_{i=1}^{s} |\mathcal{F}(d_i) - \mathcal{F}(c_i)| + \frac{1}{m}$, то $\mathcal{A}(\mathcal{G}, \{k_{l+1}\}_l)$;

3) если $\mathcal{F}$ абсолютно непрерывная функция, то $\mathcal{A}(\mathcal{F})$;

4) если выполнено $\mathcal{A}(\mathcal{F})$, а $\{c_k \Delta d_k\}_k$ S-множество, то ряд $\sum_k |\mathcal{F}(d_k) - \mathcal{F}(c_k)|$ сходится.

Пример 1. Существует функция $\mathcal{F}$ такая, что

1) $\mathcal{F}$ возрастает на сегменте $0 \Delta 1$,

2) $\forall x y (x \in 0\Delta 1 \ \& \ y \in 0 \Delta 1 \supset |\mathcal{F}(x) - \mathcal{F}(y)| \leq |x - y|)$ и, следовательно, верно $\mathcal{A}(\mathcal{F}, \{l\}_l)$ и

3) $\mathcal{F}$ не является дифференцируемой ни в одной точке сегмента $0 \Delta 1$.

Доказательство. Требуемая функция построена в [8].

Пример 2. (Ср.[3],стр.182.) Существуют функция f и неубывающая функция $\mathcal{F}$ такие, что

1) $0 \leq f \leq 1$,

2) $\forall x (D(f(x), \mathcal{F}, x))$,

3) $\forall x y (|\mathcal{F}(x) - \mathcal{F}(y)| \leq |x - y|)$ и, следовательно, $\mathcal{A}(\mathcal{F}, \{l\}_l)$.

4) $\neg L_1(f) \ \& \ \neg \mathcal{R}_1(f)$ и

5) $\mathcal{F}$ не является абсолютно непрерывной.

Замечание. Доказательство примера 2 содержится в работе, которая готовится к печати.

Пример 3. Существуют функция f и неубывающая функция $\mathcal{F}$ такие, что

1) $0 \leq f \,\&\, \mathcal{H}_1(f)$,

2) $\forall x\,(\mathcal{D}(f(x), \mathcal{F}, x))$ и

3) $\neg\, L_1(f)$.

Доказательство. Пусть Φ точное дизъюнктное рациональное сегментное покрытие сегмента $0 \Delta 1$ ([2], стр.460-476), для которого выполнено $\forall n\,(\sum_{k=1}^{n} |\Phi_k| < \frac{1}{2})$. Тогда ряд $\sum_k |\Phi_k|$ не сходится и имеет место

(1) $\forall x\,(0 \leq x \leq 1 \supset \exists k\, \ell\,(\mathcal{Э}n(\Phi_k) = \mathcal{Э}\lambda(\Phi_\ell) \,\&\, \mathcal{Э}\lambda(\Phi_k) \leq x \leq \mathcal{Э}n(\Phi_\ell)))$.

Мы для всякого НЧ k определим $c_k \rightleftharpoons \frac{1}{2} \cdot (\mathcal{Э}\lambda(\Phi_k) + \mathcal{Э}n(\Phi_k))$ и $\Omega_k \rightleftharpoons (c_k - \frac{1}{2^{k+1}} \cdot |\Phi_k|) \Delta (c_k + \frac{1}{2^{k+1}} \cdot |\Phi_k|)$.

Тогда $\{\Omega_k\}_k$ - последовательность дизъюнктных рациональных сегментов, ряд $\sum_k |\Omega_k|$ мажорируется рядом $\sum_k \frac{1}{2^k}$ и, следовательно, сходится и для любого НЧ n выполнено $\sum_{k=n+1}^{\infty} |\Omega_k| < \frac{1}{2^n}$.

Пусть для всякого НЧ k - f_k и $\mathcal{F}_k$ функции такие, что для всякого КДЧ x выполнено

$$f_k(x) = \frac{2^{2k+1}}{|\Phi_k|} \cdot \left(|x - c_k + \frac{1}{2^{k+1}} \cdot |\Phi_k|| + |x - c_k - \frac{1}{2^{k+1}} \cdot |\Phi_k|| - 2 \cdot |x - c_k|\right)$$

и

$$\mathcal{F}_k(x) = \frac{2^{2k}}{|\Phi_k|} \cdot \left(|x - c_k + \frac{1}{2^{k+1}} \cdot |\Phi_k|| \cdot (x - c_k + \frac{1}{2^{k+1}} \cdot |\Phi_k|) + \right.$$
$$\left. + |x - c_k - \frac{1}{2^{k+1}} \cdot |\Phi_k|| \cdot (x - c_k - \frac{1}{2^{k+1}} \cdot |\Phi_k|) - 2 \cdot |x - c_k| \cdot (x - c_k)\right) + \mathcal{Э}\lambda(\Phi_k) + \frac{1}{2} \cdot |\Phi_k| .$$

Тогда f_k и $\mathcal{F}_k$ равномерно непрерывны и имеет место

$0 \leq f_k \,\&\, \forall x((x \leq \partial\lambda(\Omega_k) \vee \partial m(\Omega_k) \leq x) \supset f_k(x) = 0)\,\&$

$\&\, \mathcal{F}_k(\partial\lambda(\Phi_k)) = \mathcal{F}_k(\partial\lambda(\Omega_k)) = \partial\lambda(\Phi_k) \,\&\, \mathcal{F}_k(\partial m(\Omega_k)) =$

$= \mathcal{F}_k(\partial m(\Phi_k)) = \partial m(\Phi_k) \,\&\, \forall x(D(f_k(x), \mathcal{F}_k, x))$.

Ввиду (1) существуют функции f и $\mathcal{F}$ такие, что

$$\forall k x(x \in \Phi_k \supset f(x) = f_k(x) \,\&\, \mathcal{F}(x) = \mathcal{F}_k(x)) .$$

Легко показать, что выполнено

$\forall x(0 < f(x) \equiv \exists k(\partial\lambda(\Omega_k) < x < \partial m(\Omega_k))) \,\&\, f =$

$= \sum_k f_k \,\&\, 0 \leq f \,\&\, \forall x(D(f(x), \mathcal{F}, x)) \,\&\, \forall x y(x \leq y \supset \mathcal{F}(x) \leq \mathcal{F}(y))$

и

(2) $\forall k(\mathcal{F}(\partial m(\Omega_k)) - \mathcal{F}(\partial\lambda(\Omega_k)) = |\Phi_k|)$.

Для всякого НЧ n пусть $g_n \rightleftharpoons \sum_{k=1}^{n} f_k$, $\mathcal{Y}^n$ S -множество, образованное последовательностью сегментов

$\{\Omega_k\}_{k=n+1}^{\infty}$. Тогда g_n равномерно непрерывная функция, мера $\mathcal{Y}^n$ меньше чем $\frac{1}{2^n}$, выполнено

$\forall k x((1 \leq k \leq n \,\&\, x \in \Phi_k \vee n < k \,\&\, (\partial\lambda(\Phi_k) \leq x \leq \partial\lambda(\Omega_k) \vee$

$\vee\, \partial m(\Omega_k) \leq x \leq \partial m(\Phi_k))) \supset g_n(x) = f(x))$

и, следовательно, $\forall x(\neg(x \in \mathcal{Y}^n) \supset g_n(x) = f(x))$.

Отсюда по теореме 4 из [6] следует $\mathcal{H}_1(f)$.

Допустим, что $L_1(f)$. Тогда согласно 2) из [5] и следствию 3 из [2], стр. 383, функция $\mathcal{F}$ абсолютно непрерывна. Из этого следует по лемме 1 сходимость ряда

$\sum_k |\mathcal{F}(\partial m(\Omega_k)) - \mathcal{F}(\partial\lambda(\Omega_k))|$, т.е. ряда $\sum_k |\Phi_k|$ (ср. (2)).

Однако, как мы знаем, ряд $\sum_k |\Phi_k|$ не сходится и мы, таким образом, доказали $\neg L_1(f)$.

Теорема 1. Пусть $\{F_n\}_n$ последовательность ступенчатых остовов и пусть для почти всех КДЧ x из $0 \Delta 1$ последовательность КДЧ $\{\vartheta(F_n\, x)\}_n$ определена и сходится. Если существуют последовательность элементов из L_1 – $\{\{G_n^p\}_n\}_p$ и КДЧ w такие, что для всякого НЧ p выполнено $\{\lambda_0(F_n, p)\}_n = \{G_n^p\}_n \,\&\, \int_0^1 |\{G_n^p\}_n| \leq w$, то существует $\{H_n\}_n \in S$ такое, что $\{H_n\}_n = \{F_n\}_n$.

Сначала мы докажем следующее утверждение.

Лемма 2. Пусть $\{G_n\}_n$ последовательность ступенчатых остовов, а v КДЧ, для которых выполнено $\{G_n\}_n \in$ $\in L_1 \,\&\, \int_0^1 |\{G_n\}_n| < v$.

Тогда для всякого НЧ m существуют S-множество $\mathcal{G}^m$ и равномерно непрерывная функция h_m такие, что

а) мера $\mathcal{G}^m$ меньше чем $\frac{1}{2^m}$ и

б) $\forall x\,(0 \leq x \leq 1 \,\&\, \neg(x \in \mathcal{G}^m) \supset P(h_m(x), \{G_n\}_n, x) \,\&\, |h_m(x)| < v \cdot 2^{m+2})$.

Доказательство. Согласно определению L_1, лемме 1 и теоремам 1 и 2 из [7] верно $L_1(|\{G_n\}_n|)$,

$$(3) \qquad \forall n\,(\int_0^1 |G_n \mp G_{n+1}|_0 < \frac{1}{2^n})$$

и существуют абсолютно непрерывная функция g и S-множество $\mathcal{G}^1$ меры меньшей чем $\frac{1}{2^{m+2}}$ такие, что последовательность функций $\{\mathcal{E}_{G_n}\}_n$ равномерно сходится к g и выполнено

$$(4) \; \forall x\,(x \in 0 \Delta 1 \,\&\, \neg(x \in \mathcal{G}^1) \supset \exists z\,(D(z, g, x) \,\& \\ \& \, P(z, \{G_n\}_n, x))).$$

Пусть для всякого НЧ n – $G_n \rightleftharpoons a_0^n \gamma\, a_1^n \ldots$

$\ldots \curlyvee a^n_{\ell_n} \curlyvee w^n_1 \curlyvee w^n_2 \ldots \curlyvee w^n_{\ell_n}$.

Очевидно, существует последовательность 1-полигональных остовов [5] $\{{}^{\langle 1\rangle}H_n\}_n$ такая, что

(5) $\forall n i z (1 \le i \le \ell_{n+2} \,\&\, z \int_{a^{n+2}_{i-1} \Delta a^{n+2}_i} |w^{n+2}_i - \tilde{\mathcal{R}}_{{}^{\langle 1\rangle}H_n}| \supset z < \frac{1}{\ell_{n+2} \cdot 2^{n+3}})$

и, следовательно, ввиду $\forall \; (\tilde{\mathcal{Z}}_{G_{n+2}}(0) = \tilde{\mathfrak{J}}_{{}^{\langle 1\rangle}H_n}(0) = 0)$ выполнено $\forall n (|\tilde{\mathcal{Z}}_{G_{n+2}} - \tilde{\mathfrak{J}}_{{}^{\langle 1\rangle}H_n}| < \frac{1}{2^{n+3}})$. Таким образом, последовательность функций $\{\tilde{\mathfrak{J}}_{{}^{\langle 1\rangle}H_n}\}_n$ равномерно сходится к $\mathcal{G}$.

Заметим, что для всякого 1-полигонального остова ${}^{\langle 1\rangle}H$ верно

$$\forall z (z \int_{0\Delta 1} |\tilde{\mathcal{R}}_{{}^{\langle 1\rangle}H}| \supset \int_{0\Delta 1} M_0({}^{\langle 1\rangle}H) \le 2 \cdot z) .$$

Итак, мы на основании (3) и (5) получаем

$$\forall m (\int_{0\Delta 1} M_0({}^{\langle 1\rangle}H_n \mp {}^{\langle 1\rangle}H_{n+1}) < \frac{1}{2^n}) .$$

Пусть ℓ НЧ, для которого выполнено $1 < v \cdot 2^{\ell} \,\&\, m+2 < \ell$. Согласно 4) из [5] и теоремы 1 из [6] существуют равномерно непрерывная функция h_m и S -множество $\mathcal{G}^2$ меры меньшей чем $\frac{1}{2^{\ell}} \le \frac{1}{2^{m+3}}$ такие, что $\forall z (z \int_{0\Delta 1} |h_m - \tilde{\mathcal{R}}_{{}^{\langle 1\rangle}H_{2\ell}}| \supset z < \frac{1}{2^{\ell+2}})$ и

(6) $\forall x (x \in 0\Delta 1 \,\&\, \neg (x \in \mathcal{G}^2) \supset \mathcal{D}(h_m(x), \mathcal{G}, x))$.

Но тогда ввиду (5) и леммы 1 из [7], если u_1 и u_2 КДЧ такие, что $u_1 \int_{0\Delta 1} |h_m| \,\&\, u_2 \int_{0\Delta 1} |h_m - \tilde{\mathcal{R}}_{{}^{\langle 1\rangle}H_{2\ell}}|$, то

$$u_1 < u_2 + \frac{1}{2^{\ell+3}} + \mathring{\int_0^1} |G_{2\ell+2}|_0 < \frac{3}{2^{\ell+3}} + \int_0^1 |\{G_m\}_m| + $$
$$+ \int_0^1 ||\{G_m\}_m| - |G_{2\ell+2}|_0| < \frac{3}{2^{\ell+3}} + v + \frac{1}{2^{\ell+3}} < 2 \cdot v .$$

Существует НЧ p, для которого выполнено

(7) $\forall xy(|x-y| \le \frac{1}{p} \supset |h_m(x)-h_m(y)| < \frac{v}{4})$.

Согласно теореме 1.3 из [2],стр.399, можно построить нормальный алгорифм [1] $\mathfrak{A}$ такой, что

$$\forall j(1 \le j \le p \supset !\mathfrak{A}(j) \& (\mathfrak{A}(j) = \Lambda \supset |h_m(\frac{j}{p})| < $$
$$< (2^{m+2}-\frac{1}{4})\cdot v) \& (\mathfrak{A}(j) \ne \Lambda \supset (2^{m+2}-\frac{1}{2})\cdot v < |h_m(\frac{j}{p})|)).$$

Следовательно, мы ввиду (7) получаем

$$\forall jx(1 \le j \le p \& \frac{j-1}{p} \le x \le \frac{j}{p} \supset (\mathfrak{A}(j) = \Lambda \supset$$
(8) $$\supset |h_m(x)| < 2^{m+2}\cdot v) \& (\mathfrak{A}(j) \ne \Lambda \supset$$
$$\supset (2^{m+2}-1)\cdot v < |h_m(x)|)).$$

Таким образом, если $\{j_i\}_{i=1}^{s}$ возрастающая система всех НЧ j таких, что $1 \le j \le p \& \mathfrak{A}(j) \ne \Lambda$, то $(2^{m+2}-1)\cdot v \cdot \sum_{i=1}^{s} |\frac{j_i-1}{p} \Delta \frac{j_i}{p}| < u_1 < 2\cdot v$ и, следовательно,

$$\sum_{i=1}^{s} |\frac{j_i-1}{p} \Delta \frac{j_i}{p}| < \frac{8}{7}\cdot\frac{1}{2^{m+1}}.$$

Пусть $\mathcal{G}^m$ S -множество, которое является объединением S -множеств $\mathcal{G}^1$ и $\mathcal{G}^2$ и системы рациональных сегментов $\{\frac{j_i-1}{p} \Delta \frac{j_i}{p}\}_{i=1}^{s}$ (эта система может оказаться пустой). Тогда мера $\mathcal{G}^m$ меньше чем $\frac{1}{2^m}$ и ввиду (4),(6) и (8) и ввиду свойств системы $\{j_i\}_{i=1}^{s}$ выполнена тоже часть б) утверждения леммы.

<u>Доказательство теоремы 1</u>. Пусть k, m_0 и m НЧ такие, что $w < m_0 \& m = k + m_0 + 2$. Тогда $\int_0^1 |\{G_m^{m\cdot 2^{m+2}}\}_m| < m$ и согласно лемме 2 существуют S -множество $\mathcal{G}^k$ и равномерно непрерывная функция g_k такие, что мера $\mathcal{G}^k$ меньше чем $\frac{1}{2^m}$ и

$$\forall x(x\in 0\Delta 1\;\&\;\neg(x\in \mathcal{G}^{k})\supset P(g_k(x),\{G_m^{m\cdot 2^{m+2}}\}_m,x)\;\&$$
(9)
$$\&\;|g_k(x)|<m\cdot 2^{m+2})\ .$$

По предположению нашей теоремы существуют S -множества $\mathcal{G}^{0,k}$ и $\mathcal{G}^{1,k}$ меры меньшей чем $\frac{1}{2^m}$, для которых выполнено

$$\forall x(x\in 0\Delta 1\;\&\;\neg(x\in \mathcal{G}^{0,k})\supset \exists z(P(z,\{F_m\}_m,x)))\;\&$$
(10)
$$\&\;\forall x(x\in 0\Delta 1\;\&\;\neg(x\in \mathcal{G}^{1,k})\supset \exists z(P(z,\{\lambda_0(F_m,$$
$$m\cdot 2^{m+2})\}_m,x)\;\&\;P(z,\{G_m^{m\cdot 2^{m+2}}\}_m,x)))\ .$$

Мы построим S -множество $\mathcal{G}^{k}$, которое является объединением S -множеств $\mathcal{G}^{k}$, $\mathcal{G}^{0,k}$ и $\mathcal{G}^{1,k}$. Тогда мера $\mathcal{G}^{k}$ меньше чем $\frac{1}{2^{k+1}}$ и ввиду (9) и (10) для всякого КДЧ x, для которого верно $x\in 0\Delta 1\;\&\;\neg(x\in \mathcal{G}^{k})$, получаем $P(g_k(x),\{G_m^{m\cdot 2^{m+2}}\}_m,x)\;\&\;P(g_k(x),$
$\{\lambda_0(F_m,m\cdot 2^{m+2})\}_m,x)\;\&\;\exists z(P(z,\{F_m\}_m,x))\;\&\;|g_k(x)|<m\cdot 2^{m+2}$
и, следовательно, $P(g_k(x),\{F_m\}_m,x)$.

Таким образом, для всякого НЧ k существуют S -множество $\mathcal{G}^{k}$ меры меньшей чем $\frac{1}{2^{k+1}}$ и равномерно непрерывная функция g_k такие, что
$\forall x(x\in 0\Delta 1\&\neg(x\in \mathcal{G}^{k})\supset P(g_k(x),\{F_m\}_m,x))$.

Согласно замечанию 1 из [9] для всякого НЧ k существует S -множество $\mathcal{C}\mathcal{Y}^{k}$ меры меньшей чем $\frac{1}{2^k}$, для которого выполнено

$$\forall x(x\in \mathcal{C}\mathcal{Y}^{k}\equiv\neg\neg\exists \ell(k\le \ell\;\&\;x\in \mathcal{G}^{\ell}))\ .$$

Пусть k и ℓ НЧ, а x КДЧ такое, что $x\in 0\Delta 1\;\&$
$\&\neg(x\in \mathcal{C}\mathcal{Y}^{k})$. Тогда $\neg(x\in \mathcal{G}^{k})\;\&\;\neg(x\in \mathcal{G}^{k+\ell})$ и, следовательно, $P(g_k(x),\{F_m\}_m,x)\;\&\;P(g_{k+\ell}(x),\{F_m\}_m,x)$

и мы приходим к $q_k(x) = q_{k+l}(x)$.

Для завершения доказательства достаточно использовать теорему 4 из [7].

На основании предыдущей теоремы и теоремы 5 из [7] сразу получаем следующее утверждение.

<u>Следствие</u>. Пусть f функция такая, что $\mathfrak{M}_1(f)$ ([5]). Если существует КДЧ w , для которого выполнено

$$\forall p\, z\, (z \int\limits_{0\Delta 1} |max(min(f,p),-p)| \supset z \leq w) ,$$

то $\mathfrak{N}_1(f)$.

<u>Лемма 3</u> . Пусть $\mathcal{F}$ функция, $\mathcal{A}(\mathcal{F})$, t НЧ, v КДЧ, $\mathcal{G}$ S -множество меры меньшей чем $\frac{1}{2^t}$, а $\{a_i \Delta b_i\}_{i=1}^{s}$ система неперекрывающихся рациональных сегментов, содержащихся в $0\Delta 1$ такие, что для всякой системы неперекрывающихся рациональных сегментов $\{c_k \Delta d_k\}_{k=1}^{l}$ выполнено

$$(\sum_{k=1}^{l} |c_k \Delta d_k| < \frac{1}{2^t} \supset \sum_{k=1}^{l} |\mathcal{F}(d_k) - \mathcal{F}(c_k)| < v) .$$

Тогда существует система неотрицательных КДЧ $\{v_i\}_{i=1}^{s}$ такая, что

1) $\sum\limits_{i=1}^{s} v_i \leq v$,

2) если $\forall x (x \in 0\Delta 1 \& \neg(x \in \mathcal{G}) \supset \exists z (0 \leq z \& D(z, \mathcal{F}, x)))$,

то $\forall i (1 \leq i \leq s \supset \mathcal{F}(b_i) - \mathcal{F}(a_i) \geq -v_i)$ и

3) если $\forall x (x \in 0\Delta 1 \& \neg(x \in \mathcal{G}) \supset \exists z (z \leq 0 \& D(z, \mathcal{F}, x)))$,

то $\forall i (1 \leq i \leq s \supset \mathcal{F}(b_i) - \mathcal{F}(a_i) \leq v_i)$.

<u>Доказательство</u>. 1)а) Пусть S -множество $\mathcal{G}$ образовано последовательностью сегментов $\{\alpha_k^0 \Delta \beta_k^0\}_k$. Тогда существует НЧ m_0 такое, что ряд $\sum\limits_k |\alpha_k^0 \Delta \beta_k^0|$ сходится к КДЧ, меньшему чем $\frac{1}{2^t} - \frac{1}{2^{m_0}}$.

Мы для всяких НЧ k и i, $1 \leq i \leq s$, определим

$\alpha_0^i \Delta \beta_0^i \rightleftharpoons a_i \Delta (a_i + \frac{1}{2^{m_0+3}} \cdot (b_i - a_i))$,

$\alpha_1^i \Delta \beta_1^i \rightleftharpoons (b_i - \frac{1}{2^{m_0+3}} \cdot (b_i - a_i)) \Delta b_i$ и

$\alpha_{k+1} \Delta \beta_{k+1} \rightleftharpoons (\alpha_k^0 - \frac{1}{2^{m_0+2+k}}) \Delta (\beta_k^0 + \frac{1}{2^{m_0+2+k}})$.

Тогда $\sum_{i=1}^{s} (|\alpha_0^i \Delta \beta_0^i| + |\alpha_1^i \Delta \beta_1^i|) \leq \frac{1}{2^{m_0+2}}$, ряд $\sum_k |\alpha_{k+1} \Delta \beta_{k+1}|$ сходится к КДЧ, меньшему чем $\frac{1}{2^t} - \frac{1}{2^{m_0+1}}$ и выполнено

(11) $\forall x (x \in \mathcal{Y} \supset \exists k (\alpha_{k+1} < x < \beta_{k+1}))$.

б) Пусть i НЧ, $1 \leq i \leq s$, а Φ точное дизъюнктное рациональное сегментное покрытие сегмента $0 \Delta 1$ ([2], стр.461-2) такое, что $\sum_{k=1}^{n} |\Phi_k| \xrightarrow[n \to \infty]{} 1$. (Существование такого покрытия следует из теорем 4.1 и 4.2 из [2], стр. 424-30).

Мы для всякого НЧ k определим

$\Theta_k^i \rightleftharpoons (\alpha_0^i + \ni\ell(\Phi_k) \cdot (\beta_0^i - \alpha_0^i)) \Delta (\alpha_0^i + \ni m(\Phi_k) \cdot (\beta_0^i - \alpha_0^i))$.

Построим последовательность неперекрывающихся рациональных сегментов $\{c_k^i \Delta d_k^i\}_k$ и возрастающие последовательности НЧ $\{n_p^i\}_p$ и $\{q_p^i\}_p$. Положим $n_0^i \rightleftharpoons 0$.

α) Пусть q_1^i НЧ такое, что все края сегментов $a_i \Delta b_i$, $\alpha_0^i \Delta \beta_0^i$, $\alpha_1^i \Delta \beta_1^i$ и Θ_1^i представимы в виде $\frac{j}{q_1^i}$, где j целое число.

На первом шаге мы включим в нашу последовательность все сегменты $\frac{j-1}{q_1^i} \Delta \frac{j}{q_1^i}$, где j пробегает те НЧ, для которых выполнено $(\frac{j-1}{q_1^i} \Delta \frac{j}{q_1^i} \subset \Theta_1^i \vee \frac{j-1}{q_1^i} \Delta \frac{j}{q_1^i} \subset \alpha_1^i \Delta \beta_1^i \;\&$ $\& \; \frac{j-1}{q_1^i} \Delta \frac{j}{q_1^i} \subset \beta_0^i \Delta b_i)$, и занумеруем их в порядке включения. Посредством n_1^i мы обозначим число сегментов, включенных на первом шаге.

β) Пусть p НЧ, пусть мы уже сделали p шагов, построим НЧ q_p^i и n_p^i и пока включили в нашу последовательность и занумеровали сегменты $c_k^i \Delta d_k^i$ $(1 \leq k \leq n_p^i)$ и пусть $\{c_k^i \Delta d_k^i\}_{k=1}^{n_p^i}$ - система неперекрывающихся рациональных сегментов, содержащихся в $a^i \Delta b^i$ и

$$\forall k (1 \leq k \leq n_p^i \supset \exists j \ell (c_k^i = \frac{j}{q_p^i} \& d_k^i = \frac{\ell}{q_p^i})) .$$

Мы построим НЧ q_{p+1}^i такое, что $2 \cdot q_p^i$ делит q_{p+1}^i и все краи сегментов $\alpha_0^i \Delta \beta_0^i$, $\alpha_{p+1} \Delta \beta_{p+1}$ и Θ_{p+1}^i представимы в виде $\frac{j}{q_{p+1}^i}$, где j целое число.

На $(p+1)$-ом шаге мы включим в нашу последовательность все сегменты $\frac{j-1}{q_{p+1}^i} \Delta \frac{j}{q_{p+1}^i}$, где j пробегает те НЧ, для которых выполнено

$$(\frac{j-1}{q_{p+1}^i} \Delta \frac{j}{q_{p+1}^i} \subset \Theta_{p+1}^i \vee \frac{j-1}{q_{p+1}^i} \Delta \frac{j}{q_{p+1}^i} \subset \alpha_{p+1} \Delta \beta_{p+1} \& \frac{j-1}{q_{p+1}^i} \Delta$$

$$\Delta \frac{j}{q_{p+1}^i} \subset \beta_0^i \Delta b_i \& \forall k (1 \leq k \leq n_p^i \supset \frac{j}{q_{p+1}^i} \leq c_k \vee d_k \leq \frac{j-1}{q_{p+1}^i})) ,$$

и занумеруем их в порядке включения. Если m - число сегментов, включенных на этом шаге, то мы определим

$$n_{p+1}^i \rightleftharpoons n_p^i + m .$$

Таким образом, построенная нами последовательность $\{c_k^i \Delta d_k^i\}_k$ является S-множеством, содержащимся в сегменте $a_i \Delta b_i$. Ввиду (11) выполнено $\forall x (a_i < x < b_i \& \& x \in \mathcal{Y} \supset \exists k \ell (c_k^i < x < d_k^i \vee d_k^i = c_\ell^i \& c_k^i < x < d_\ell^i))$ и, следовательно, ввиду $a_i = \alpha_0^i < \beta_0^i < \alpha_1^i < \beta_1^i = b_i$

$$(12)\ \forall x (a_i \leq x \leq b_i \& \forall k \ell ((x \leq c_k^i \vee d_k^i \leq x) \& \& (d_k^i = c_\ell^i \supset (x \leq c_k^i \vee d_\ell^i \leq x))) \supset \neg (x \in \mathcal{Y})) .$$

Кроме того, для всякого НЧ p число $2 \cdot q^i_p$ делит q^i_{p+1}, все края сегментов системы $\{c^i_k \Delta d^i_k\}_{k=1}^{n^i_p}$ представимы в виде $\frac{j}{q^i_p}$, где j целое число, и $\forall k (n^i_{p-1} < k \leq n^i_p \supset$ $\supset \exists j (\frac{j-1}{q^i_p} = c^i_k \& \frac{j}{q^i_p} = d^i_k))$. Следовательно, для всяких НЧ p и j выполнено

(13) $$\forall k (n^i_p < k \& max(c^i_k, \frac{j-1}{q^i_{p+1}}) < min(d^i_k, \frac{j}{q^i_{p+1}}) \supset$$
$$\supset \frac{j-1}{q^i_{p+1}} \leq c^i_k < d^i_k \leq \frac{j}{q^i_{p+1}}).$$

Из $\mathcal{a}(\mathcal{F})$ следует согласно лемме 1 сходимость ряда $\sum\limits_k |\mathcal{F}(d^i_k) - \mathcal{F}(c^i_k)|$. Его сумму обозначим посредством v_i.

в) Из б) следует, что сегменты последовательностей $\{c^i_k \Delta d^i_k\}_k$ $(1 \leq i \leq s)$ не перекрываются и, следовательно, ввиду а) ряд $\sum\limits_k \sum\limits_{i=1}^{s} |c^i_k \Delta d^i_k|$ сходится к КДЧ, меньшему чем $\frac{1}{2^t}$. Но тогда из предположений нашей леммы следует $\sum\limits_{i=1}^{s} v_i = \sum\limits_{i=1}^{s} \sum\limits_{k=1}^{\infty} |\mathcal{F}(d^i_k) - \mathcal{F}(c^i_k)| =$ $= \sum\limits_{k=1}^{\infty} \sum\limits_{i=1}^{s} |\mathcal{F}(d^i_k) - \mathcal{F}(c^i_k)| \leq v$.

г) Пусть выполнено $\forall x (x \in 0 \Delta 1 \& \neg(x \in \mathcal{Y}) \supset$ $\supset \exists z (0 \leq z \& \mathcal{D}(z, \mathcal{F}, x)))$ и пусть i НЧ, $1 \leq i \leq s$. Для всякого НЧ p положим $q_p \rightleftharpoons q^i_p \& n_{p-1} \rightleftharpoons n^i_{p-1}$.

Пусть p и j НЧ, $a_i \leq \frac{j-1}{q_p} < \frac{j}{q_p} \leq b_i$. Тогда ввиду (13) ряд

(14) $$\sum_{n_{p-1} < k} |\mathcal{F}(max(min(d^i_k, \frac{j}{q_p}), \frac{j-1}{q_p})) -$$
$$- \mathcal{F}(max(min(c^i_k, \frac{j}{q_p}), \frac{j-1}{q_p}))|$$

мажорируется рядом $\sum\limits_{n_{p-1}<k} |\mathcal{F}(d^i_k) - \mathcal{F}(c^i_k)|$ и, следовательно, сходится. Сумму ряда (14) обозначим посред-

ством $\xi^{n,j}$.

Допустим, что $\mathcal{F}(b_i) - \mathcal{F}(a_i) < -v_i$. Тогда существует положительное РЧ e такое, что

(15) $$\mathcal{F}(b_i) - \mathcal{F}(a_i) < -v_i - e \quad .$$

Мы построим последовательность сегментов

$\{ \frac{j_n - 1}{q_n} \Delta \frac{j_n}{q_n} \}_n$.

α) Пусть j_1^1 и j_1^2 целые числа, для которых верно $a_i = \frac{j_1^1 - 1}{q_1} \& b_i = \frac{j_1^2}{q_1}$. Тогда $\sum_{j=j_1^1}^{j_1^2} \xi^{1,j} = \sum_{k=1}^{\infty} |\mathcal{F}(d_k^i) - \mathcal{F}(c_k^i)| = v_i$ и ввиду (15) выполнено

(16) $$\sum_{j=j_1^1}^{j_1^2} ((\mathcal{F}(\frac{j}{q_1}) - \mathcal{F}(\frac{j-1}{q_1})) + \xi^{1,j}) < -e \quad .$$

Допустив

(17) $$\neg \exists j (j_1^1 \le j \le j_1^2 \& ((\mathcal{F}(\frac{j}{q_1}) - \mathcal{F}(\frac{j-1}{q_1})) + \xi^{1,j} < -\frac{e}{(b_i - a_i)\cdot q_1}),$$

мы получим $\sum_{j=j_1^1}^{j_1^2} ((\mathcal{F}(\frac{j}{q_1}) - \mathcal{F}(\frac{j-1}{q_1})) + \xi^{1,j}) \ge -e$, что противоречит (16).

Таким образом, верно отрицание (17). Ввиду этого, свойств " $<$ " и принципа А.А. Маркова существует НЧ j_1 такое, что

$$j_1^1 \le j_1 \le j_1^2 \& ((\mathcal{F}(\frac{j_1}{q_1}) - \mathcal{F}(\frac{j_1-1}{q_1})) + \xi^{1,j_1} < -\frac{e}{(b_i - a_i)\cdot q_1}).$$

Заметим, что для всякого НЧ k, $1 \le k \le m_1$,существует НЧ j , для которого выполнено $a_i \le c_k^i = \frac{j-1}{q_1} < \frac{j}{q_1} = d_k^i \le b_i$ и, следовательно,

$$(\mathcal{F}(\frac{j}{q_1}) - \mathcal{F}(\frac{j-1}{q_1})) + \xi^{1,j} = (\mathcal{F}(\frac{j}{q_1}) - \mathcal{F}(\frac{j-1}{q_1})) + $$
$$+ |\mathcal{F}(\frac{j}{q_1}) - \mathcal{F}(\frac{j-1}{q_1})| \ge 0 .$$

Таким образом, сегмент $\frac{j_1 - 1}{q_1} \Delta \frac{j_1}{q_1}$ не перекрывается с сегментами системы $\{c_k^i \Delta d_k^i\}_{k=1}^{n_1}$.

β) Пусть p НЧ, пусть уже построено НЧ j_p и выполнено

$$a_i < \frac{j_p}{q_p} \le b_i \,\&\, ((\mathcal{F}(\frac{j_p}{q_p}) - \mathcal{F}(\frac{j_p - 1}{q_p})) + \xi^{p, j_p} < - \frac{e}{(b_i - a_i)\cdot q_p})$$

и пусть сегмент $\frac{j_p - 1}{q_p} \Delta \frac{j_p}{q_p}$ не перекрывается с сегментами системы $\{c_k^i \Delta d_k^i\}_{k=1}^{n_p}$.

Мы построим НЧ j^1_{p+1} и j^2_{p+1} такие, что $\frac{j_p - 1}{q_p} = \frac{j^1_{p+1} - 1}{q_{p+1}} < \frac{j^2_{p+1}}{q_{p+1}} = \frac{j_p}{q_p}$. Тогда ввиду выше сказанного и того, что для всякого НЧ j верно (13), выполнено

$$\xi^{p, j_p} = \sum_{j = j^1_{p+1}}^{j^2_{p+1}} \xi^{p+1, j}$$ и, следовательно,

$$\sum_{j = j^1_{p+1}}^{j^2_{p+1}} ((\mathcal{F}(\frac{j}{q_{p+1}}) - \mathcal{F}(\frac{j-1}{q_{p+1}})) + \xi^{p+1, j}) < - \frac{e}{(b_i - a_i)\cdot q_p}.$$

Аналогично рассуждениям из α) можно доказать существование НЧ j_{p+1} такого, что

$$j^1_{p+1} \le j_{p+1} \le j^2_{p+1} \,\&\, ((\mathcal{F}(\frac{j_{p+1}}{q_{p+1}}) - \mathcal{F}(\frac{j_{p+1} - 1}{q_{p+1}})) + \xi^{p+1, j_{p+1}} < - \frac{e}{(b_i - a_i)\cdot q_{p+1}}.$$

Допустим, что существиет НЧ k, для которого выполнено $n_p < k \le n_{p+1} \,\&\, max(c_k^i, \frac{j_{p+1} - 1}{q_{p+1}}) < min(d_k^i, \frac{j_{p+1}}{q_{p+1}})$.

Тогда ввиду 16(β) $c_k^i = \frac{j_{p+1} - 1}{q_{p+1}} \,\&\, d_k^i = \frac{j_{p+1}}{q_{p+1}}$ и, следовательно,

$$- \frac{e}{(b_i - a_i)\cdot q_{p+1}} > (\mathcal{F}(\frac{j_{p+1}}{q_{p+1}}) - \mathcal{F}(\frac{j_{p+1} - 1}{q_{p+1}})) + \xi^{p+1, j_{p+1}} =$$

$$= (\mathcal{F}(\frac{j_{p+1}}{q_{p+1}}) - \mathcal{F}(\frac{j_{p+1} - 1}{q_{p+1}})) + |\mathcal{F}(\frac{j_{p+1}}{q_{p+1}}) - \mathcal{F}(\frac{j_{p+1} - 1}{q_{p+1}})| \ge 0,$$

что невозможно.

Итак, сегмент $\frac{j_{p+1}-1}{q_{p+1}} \Delta \frac{j_{p+1}}{q_{p+1}}$ не перекрывается с сегментами системы $\{c_k^i \Delta d_k^i\}_{k=1}^{m_{p+1}}$.

Таким образом, мы построили последовательность сегментов $\{\frac{j_p-1}{q_p} \Delta \frac{j_p}{q_p}\}_p$ такую, что $\forall p (2\cdot q_p \leq q_{p+1} \& a_i \leq \leq \frac{j_p-1}{q_p} \leq \frac{j_{p+1}-1}{q_{p+1}} < \frac{j_{p+1}}{q_{p+1}} \leq \frac{j_p}{q_p} \leq b_i \& \forall k (1 \leq k \leq m_p \supset \supset (\frac{j_p}{q_p} \leq c_k^i \vee d_k^i \leq \frac{j_p-1}{q_p})))$ и

(18) $\forall p (\mathcal{F}(\frac{j_p}{q_p}) - \mathcal{F}(\frac{j_p-1}{q_p}) < -\frac{e}{(b_i-a_i)\cdot q_p})$.

Пусть x КДЧ, являющееся общим пределом последовательностей $\{\frac{j_p-1}{q_p}\}_p$ и $\{\frac{j_p}{q_p}\}_p$. Тогда $x \in a_i \Delta b_i \& \& \forall k\ell ((x \leq c_k^i \vee d_k^i \leq x) \& (d_k^i = c_\ell^i \supset (x \leq c_k^i \vee d_\ell^i \leq x)))$ и, следовательно, ввиду (12) верно $\neg(x \in \mathcal{S})$. Согласно предположению существует КДЧ z такое, что $0 \leq z \& \& D(z, \mathcal{F}, x)$ и, следовательно, $(\mathcal{F}(\frac{j_p}{q_p}) - \mathcal{F}(\frac{j_p-1}{q_p}))\cdot \cdot q_p \xrightarrow[p\to\infty]{} z$. Но это ввиду $0 \leq z$ противоречит (18).

Таким образом, допустив $\mathcal{F}(b_i) - \mathcal{F}(a_i) < -v_i$, мы пришли к противоречию. Следовательно, верно $\mathcal{F}(b_i) - - \mathcal{F}(a_i) \geq -v_i$, что и требовалось доказать.

Часть 3) утверждения леммы следует ввиду того, что мы можем перейти от $\mathcal{F}$ к $-\mathcal{F}_j$ из 2).

<u>Следствие</u>. Пусть $\mathcal{F}$ функция такая, что $\mathcal{a}(\mathcal{F})$ и для почти всех КДЧ x из $0 \Delta 1$ выполнено $\exists z (0 \leq z \& \& D(z, \mathcal{F}, x))$ (соответственно $\exists z (z \leq 0 \& D(z, \mathcal{F}, x))$). Тогда $\mathcal{F}$ является неубывающей (соответственно невозрастающей).

<u>Теорема 2</u>. Пусть $\mathcal{F}$ функция, а $\{F_m\}_m$ последовательность ступенчатых остовов такие, что $\mathcal{a}(\mathcal{F})$ и для

почти всех КДЧ x из $0 \Delta 1$ верно $\exists z (P(z, \{F_m\}_m, x) \& \& D(z, \mathcal{F}, x))$. Пусть для всякого НЧ p существует $\{F_m^p\}_m \in L_1$, для которого выполнено $\{F_m^p\}_m = \{\lambda_0 (F_m, p)\}_m$. Тогда функция $\mathcal{F}$ абсолютно непрерывна и существует $\{G_m\}_m \in L_1$ такое, что $\{G_m\}_m = \{F_m\}_m$ и $\forall xy (0 \leq x < y \leq 1 \supset \mathcal{F}(y) - \mathcal{F}(x) = \int_x^y \{G_m\}_m)$.

<u>Доказательство</u>. Пусть $\{k_\ell\}_\ell$ возрастающая последовательность НЧ, для которой выполнено

(19) $$a(\mathcal{F}, \{k_\ell\}_\ell) .$$

Согласно лемме 1 и теоремам 1 и 2 из [7] для всякого НЧ p существуют ввиду $\{F_m^p\}_m \in L_1 \& \{F_m^p\}_m = \{\lambda_0 (F_m, p)\}_m$ абсолютно непрерывные функции $\mathcal{F}_p$ и $\mathcal{H}_p$ такие, что

(20) $$\forall xy (0 \leq x < y \leq 1 \supset \mathcal{F}_p(y) - \mathcal{F}_p(x) = \int_x^y \{F_m^p\}_m \& \mathcal{H}_p(y) - \mathcal{H}_p(x) = \int_x^y |\{F_m^p\}_m|) \& Var(\int_0^1 |\{F_m^p\}_m|, \mathcal{F}_p, 0 \Delta 1),$$

для почти всех КДЧ x из $0 \Delta 1$ верно

(21) $\exists u (P(u, |\{F_m^p\}_m|, x) \& D(u, \mathcal{H}_p, x))$,

(22) $\exists z (P(z, \{F_m^p\}_m, x) \& P(z, \{\lambda_0 (F_m, p)\}_m, x) \& D(z, \mathcal{F}_p, x))$

и, следовательно, ввиду $\forall x z (x \in 0 \Delta 1 \& P(z, \{\lambda_0 (F_m, p)\}_m, x) \supset \supset |z| \leq p)$, леммы 1 и следствия теоремы 6 из [7] выполнено

(23) $$\forall xy (|\mathcal{F}_p(x) - \mathcal{F}_p(y)| \leq p \cdot |x - y|) .$$

1) Пусть p НЧ. Мы докажем $a(\mathcal{F}_p, \{k_{\ell+1}\}_\ell)$. Для этого достаточно ввиду (19) и части 2 леммы 1 показать, что для всяких РЧ a и b, $0 \leq a < b \leq 1$, и НЧ m существует система неперекрывающихся рациональных сегментов

$\{c_i \Delta d_i\}_{i=1}^{s}$ такая, что $\forall i\,(1 \leq i \leq s \supset a \leq$
$\leq c_i < d_i \leq b)$ &

$$(|\mathcal{F}_p(b) - \mathcal{F}_p(a)| <_{i=1}^{s} \sum |\mathcal{F}(d_i) - \mathcal{F}(c_i)| + \frac{1}{m}).$$

Пусть a и b РЧ, $0 \leq a < b \leq 1$, m НЧ, а $k_0 \geq k_{m+2} + p + m + 2$. Заметим, что $k_0 \geq 2m + 4 + p$.

Ввиду (20) существует система неперекрывающихся рациональных сегментов $\{a_\ell \Delta b_\ell\}_{\ell=1}^{t}$, для которой выполнено $\forall \ell\,(1 \leq \ell \leq t \supset 0 \leq a_\ell < b_\ell \leq 1)$ и

$$\int_0^1 |\{F_m^p\}| - \frac{1}{2^{2k_0+4}} <_{\ell=1}^{t} \sum |\mathcal{F}_p(b_\ell) - \mathcal{F}_p(a_\ell)|.$$

Тогда, если q_0 НЧ такое, что все края сегментов $a \Delta b$ и $a_\ell \Delta b_\ell$ $(1 \leq \ell \leq t)$ можно представить в виде $\frac{j}{q_0}$, где j целое число, то ввиду (20) верно

$$\int_0^1 |\{F_m^p\}_m| - \frac{1}{2^{2k_0+4}} <_{\ell=1}^{t} \sum |\mathcal{F}_p(b_\ell) - \mathcal{F}_p(a_\ell)| \leq_{i=1}^{q_0} \sum |\mathcal{F}_p(\frac{i}{q_0}) -$$
$$- \mathcal{F}_p(\frac{i-1}{q_0})| =_{i=1}^{q_0} \sum |\int_{\frac{i-1}{q_0}}^{\frac{i}{q_0}} \{F_m^p\}_m|$$

и, следовательно,

$$(24) \quad \sum_{i=1}^{q_0} \Big(\int_{\frac{i-1}{q_0}}^{\frac{i}{q_0}} |\{F_m^p\}_m| - |\int_{\frac{i-1}{q_0}}^{\frac{i}{q_0}} \{F_m^p\}_m|\Big) < \frac{1}{2^{2k_0+4}}.$$

Ясно, что выполнено $0 \leq |\{F_m^p\}_m| - \{F_m^p\}_m \;\&\; 0 \leq$
$\leq |\{F_m^p\}_m| + \{F_m^p\}_m$ и

$$\forall i\,(1 \leq i \leq q_0 \supset |\int_{\frac{i-1}{q_0}}^{\frac{i}{q_0}} \{F_m^p\}_m| \leq \int_{\frac{i-1}{q_0}}^{\frac{i}{q_0}} |\{F_m^p\}_m| \;\&$$
$$\& \neg\neg(|\int_{\frac{i-1}{q_0}}^{\frac{i}{q_0}} \{F_m^p\}_m| = \int_{\frac{i-1}{q_0}}^{\frac{i}{q_0}} \{F_m^p\}_m \vee |\int_{\frac{i-1}{q_0}}^{\frac{i}{q_0}} \{F_m^p\}_m| = -\int_{\frac{i-1}{q_0}}^{\frac{i}{q_0}} \{F_m^p\}_m)).$$

Ввиду этого, (24), свойств "$<$" и принципа А.А. Маркова существует система целых чисел $\{\varepsilon_i\}_{i=1}^{q_0}$ такая, что $\forall i\,(1 \leq i \leq q_0 \supset (\varepsilon_i = 1 \vee \varepsilon_i = -1))$ и

$$(25)\sum_{i=1}^{q_0}\int_{\frac{i-1}{q_0}}^{\frac{i}{q_0}}||\{F_m^r\}_m|-\varepsilon_i\cdot\{F_m^r\}_m|=\sum_{i=1}^{q_0}\int_{\frac{i-1}{q_0}}^{\frac{i}{q_0}}(|\{F_m^r\}_m|-\varepsilon_i\cdot\{F_m^r\}_m)<\frac{1}{2^{2k_0+4}}.$$

Мы построим функции $\mathcal{F}_r^*$ и $\mathcal{F}^*$, для которых верно

$$\mathcal{F}_r^*(0)=\mathcal{F}_r(0)\ \&\ \mathcal{F}^*(0)=\mathcal{F}(0)\ \&\ \forall i\, x\,(1\le i\le q_0\ \&\ \frac{i-1}{q_0}\le$$
$$\le x\le\frac{i}{q_0}\supset\mathcal{F}_r^*(x)-\mathcal{F}_r^*(\frac{i-1}{q_0})=\varepsilon_i\cdot(\mathcal{F}_r(x)-$$
$$-\mathcal{F}_r(\frac{i-1}{q_0}))\ \&\ \mathcal{F}^*(x)-\mathcal{F}^*(\frac{i-1}{q_0})=\varepsilon_i\cdot(\mathcal{F}(x)-\mathcal{F}(\frac{i-1}{q_0}))).$$

Тогда ввиду выше отмеченных свойств функции $\mathcal{F}_r$ и предполагаемых свойств функции $\mathcal{F}$ (в частности (19) и (23)) верно $\mathfrak{A}(\mathcal{F}^*,\{k_\ell\}_\ell)$, $\mathcal{F}_r^*$ - абсолютно непрерывная функция,

$$(26)\qquad \forall x y\,(|\mathcal{F}_r^*(x)-\mathcal{F}_r^*(y)|\le r\cdot|x-y|)$$

и для почти всех КДЧ x из $0\,\Delta\,1$ выполнено

$$\forall i\,(1\le i\le q_0\ \&\ \frac{i-1}{q_0}\le x\le\frac{i}{q_0}\supset\exists z\,(P(z,\{F_m\}_m,x)\ \&$$
$$(27)\qquad \&\ P(\lambda(z,r),\{F_m^r\}_m,x)\ \&\ D(\varepsilon_i\cdot\lambda(z,r),\mathcal{F}_r^*,x)\ \&$$
$$\&\ D(\varepsilon_i\cdot z,\mathcal{F}^*,x))).$$

В частности, существует S -множество $\mathcal{G}^1$ меры меньшей чем $\frac{1}{2^{k_0+2}}$ и такое, что $\forall i\,(0\le i\le q_0\supset\supset\frac{i}{q_0}\in\mathcal{G}^1)$ и для всякого КДЧ x, $x\in 0\,\Delta\,1\ \&\ \&\neg(x\in\mathcal{G}^1)$, выполнено (27).

Ввиду (20), леммы 1 из [7] и (25) получаем

$$|\mathcal{F}_r(b)-\mathcal{F}_r(a)|=|\int_a^b\{F_m^r\}_m|\le\int_a^b|\{F_m^r\}_m|=\mathcal{F}_r^*(b)-$$
$$(28)\qquad -\mathcal{F}_r^*(a)+\sum_{a<\frac{i}{q_0}\le b}\int_{\frac{i-1}{q_0}}^{\frac{i}{q_0}}(|\{F_m^r\}_m|-\varepsilon_i\cdot\{F_m^r\}_m)\le\mathcal{F}_r^*(b)-\mathcal{F}_r^*(a)+$$

$$+\sum_{j=1}^{q_0} \int_{\frac{j-1}{q_0}}^{\frac{j}{q_0}} ||\{F_m^r\}_m| - \varepsilon_j \cdot \{F_m^r\}_m| < \mathcal{F}_r^*(b) - \mathcal{F}_r^*(a) +$$

$$+ \frac{1}{2^{2k_0+4}} < \mathcal{F}_r^*(b) - \mathcal{F}_r^*(a) + \frac{1}{2^{m+1}} \quad .$$

Ясно, что функция $\mathcal{H}_r - \mathcal{F}_r^*$ абсолютно непрерывна и для почти всех КДЧ x из $0 \Delta 1$ верно (21) и (27) и, следовательно, $\forall i (1 \leq i \leq q_0 \,\&\, \frac{i-1}{q_0} \leq x \leq \frac{i}{q_0} \supset$
$\supset \exists z (P(z, |\{F_m^r\}_m| - \varepsilon_i \cdot \{F_m^r\}_m, x) \,\&\, D(z, \mathcal{H}_r - \mathcal{F}_r^*, x)))$.

Но тогда существует согласно теореме 2 из [7] $\{H_m^1\}_m \in$ $\in L_1$ такое, что для почти всех КДЧ x из $0 \Delta 1$ выполнено

$$\forall i (1 \leq i \leq q_0 \,\&\, \frac{i-1}{q_0} \leq x \leq \frac{i}{q_0} \supset \exists z (P(z, \{H_m^1\}_m, x) \,\&$$
(29)
$$\& \, P(z, |\{F_m^r\}_m| - \varepsilon_i \cdot \{F_m^r\}_m, x)))$$

и, следовательно, ввиду (25) и следствия теоремы 6 из [7] верно $\int_0^1 |\{H_m^1\}_m| < \frac{1}{2^{2k_0+4}}$. Согласно лемме 2 существует S -множество $\mathcal{G}^2$ меры меньшей чем $\frac{1}{2^{k_0+2}}$ и такое, что

$$\forall x (x \in 0 \Delta 1 \,\&\, \neg (x \in \mathcal{G}^2) \supset \exists z (P(z, \{H_m^1\}_m, x) \,\&$$
(30)
$$\& \, |z| < \frac{1}{2^{k_0}} < \frac{1}{2^{m+1}})) .$$

Кроме того, существует S -множество $\mathcal{G}^3$ меры меньшей чем $\frac{1}{2^{k_0+2}}$ и такое, что для всякого КДЧ x из $x \in$ $\in 0 \Delta 1 \,\&\, \neg (x \in \mathcal{G}^3)$ следует (29).

Пусть $\mathcal{G}$ S -множество, являющееся объединением S-множеств $\mathcal{G}^1$, $\mathcal{G}^2$ и $\mathcal{G}^3$. Тогда мера $\mathcal{G}$ меньше чем $\frac{1}{2^{k_0}} = \frac{1}{2^{k_{m+2}+r+m+2}}$ и для всякого КДЧ x , для которого верно $x \in 0 \Delta 1 \,\&\, \neg (x \in \mathcal{G})$, выполнено (27),(29) и (30), и, следовательно,

$$\forall i \, (1 \le i \le q_0 \,\&\, \frac{i-1}{q_0} \le x \le \frac{i}{q_0} \,\&\, \neg (x \in \mathcal{G}) \supset$$

(31)
$$\supset \exists z \, (P(z, \{F_m\}_m, x) \,\&\, P(\lambda(z,p), \{F_m^p\}_m, x) \,\&$$
$$\& \, P(|\lambda(z,p)| - \varepsilon_i \cdot \lambda(z,p), \{H_m^1\}_m, x) \,\&\, ||\lambda(z,p)| -$$
$$- \varepsilon_i \cdot \lambda(z,p)| < \frac{1}{2^{m+1}} \,\&\, D(\varepsilon_i \cdot (z - \lambda(z,p)), \mathcal{F}^* - \mathcal{F}_p^*, x))) .$$

Можно показать, что

$$\forall i z \, (1 \le i \le q_0 \,\&\, ||\lambda(z,p)| - \varepsilon_i \lambda(z,p)| < \frac{1}{2^{m+1}} \supset 0 \le \varepsilon_i \cdot (z - \lambda(z,p))) .$$

Итак, из (31) следует

$$\forall x \, (x \in 0 \Delta 1 \,\&\, \neg (x \in \mathcal{G}) \supset \exists u \, (0 \le u \,\&\, D(u, \mathcal{F}^* - \mathcal{F}_p^*, x))) .$$

Кроме того, ввиду (26) $a(\mathcal{F}^*, \{k_l\}_l)$ выполнено $a(\mathcal{F}^* - \mathcal{F}_p^*, \{k_{l+1} + p + l + 1\}_l)$.

Но тогда мы согласно лемме 3 получаем $\mathcal{F}^*(b) - \mathcal{F}^*(a) - (\mathcal{F}_p^*(b) - \mathcal{F}_p^*(a)) \ge - \frac{1}{2^{m+1}}$ и, следовательно, ввиду (28) свойств q_0 и $\mathcal{F}^*$ верно $|\mathcal{F}_p(b) - \mathcal{F}_p(a)| < \mathcal{F}_p^*(b) - \mathcal{F}_p^*(a) + \frac{1}{2^{m+1}} \le \mathcal{F}^*(b) - \mathcal{F}^*(a) + \frac{1}{2^m} = \sum_{a < \frac{j}{q_0} \le b} \varepsilon_j \cdot (\mathcal{F}(\frac{j}{q_0}) - \mathcal{F}(\frac{j-1}{q_0})) + \frac{1}{2^m} \le \sum_{a < \frac{j}{q_0} \le b} |\mathcal{F}(\frac{j}{q_0}) - \mathcal{F}(\frac{j-1}{q_0})| + \frac{1}{2^m}$.

2) Пусть p НЧ. На основании 1), (20) и части 1) леммы 1 получаем $\int_0^1 |\{F_m^p\}_m| \le 2^{k_2}$.

Согласно теореме 1 существует $\{H_m\}_m \in S$ такое, что $\{H_m\}_m = \{F_m\}_m$.

Пусть m НЧ. Тогда по теореме 3 из [7] существует S-множество $\mathcal{G}^1$ меры меньшей чем $\frac{1}{2^{k_{m+3}+1}}$ и равномерно непрерывная функция h такие, что

(32) $\forall x \, (x \in 0 \Delta 1 \,\&\, \neg (x \in \mathcal{G}^1) \supset P(h(x), \{H_m\}_m, x))$.

Очевидно, существует НЧ p_0, для которого верно

(33) $$|h| < p_0 .$$

Пусть p НЧ, $p_0 \leq p$. Ввиду $\{H_m\}_m = \{F_m\}_m$, предполагаемых свойств функции $\mathcal{F}$ и того, что для почти всех КДЧ x из $0 \Delta 1$ выполнено (22), существуют S-множества $\mathcal{Y}^2$, $\mathcal{Y}^3$ и $\mathcal{Y}^4$ меры меньшей чем $\frac{1}{2^{k_{m+3}+3}}$ и такие, что

$$\begin{gathered}\forall x(x \in 0\Delta 1 \& \neg(x \in \mathcal{Y}^2) \supset \exists z(P(z,\{H_m\}_m,x)\,\&\\ \& P(z,\{F_m\}_m,x))) \& \forall x(x \in 0\Delta 1 \& \neg(x \in \mathcal{Y}^3) \supset \exists z(P(z,\\ \{F_m\}_m,x) \& D(z,\mathcal{F},x))) \& \forall x(x \in 0\Delta 1 \& \neg(x \in \mathcal{Y}^4) \supset\\ \supset \exists z(P(z,\{F_m^p\}_m,x) \& P(z,\{\lambda_0(F_m,p)\}_m,x) \& D(z,\mathcal{F}_p,x))).\end{gathered} \tag{34}$$

Пусть $\mathcal{Y}$ объединение S-множеств $\mathcal{Y}^1$, $\mathcal{Y}^2$, $\mathcal{Y}^3$ и $\mathcal{Y}^4$. Тогда мера $\mathcal{Y}$ меньше чем $\frac{1}{2^{k_{m+3}}}$ и ввиду (32)-(34) выполнено

$$\forall x(x \in 0\Delta 1 \& \neg(x \in \mathcal{Y}) \supset D(0, \mathcal{F} - \mathcal{F}_p, x)).$$

Из $\mathfrak{a}(\mathcal{F},\{k_\ell\}_\ell) \& \mathfrak{a}(\mathcal{F}_p, \{k_{\ell+1}\}_\ell)$ следует $\mathfrak{a}(\mathcal{F} - \mathcal{F}_p, \{k_{\ell+2}\}_\ell)$.

Пусть $\{a_i \Delta b_i\}_{i=1}^{s}$ система неперекрывающихся рациональных сегментов, содержащихся в $0 \Delta 1$. Тогда существует согласно лемме 3 система неотрицательных КДЧ $\{v_i\}_{i=1}^{s}$ такая, что $\sum_{i=1}^{s} v_i \leq \frac{1}{2^{m+1}}$ для всякого НЧ i, $1 \leq i \leq s$, верно

$$-v_i \leq (\mathcal{F}(b_i) - \mathcal{F}_p(b_i)) - (\mathcal{F}(a_i) - \mathcal{F}_p(a_i)) \leq v_i$$

и, следовательно,

$$\sum_{i=1}^{s} |(\mathcal{F}(b_i) - \mathcal{F}_p(b_i)) - (\mathcal{F}(a_i) - \mathcal{F}_p(a_i))| \leq \sum_{i=1}^{s} v_i \leq \frac{1}{2^{m+1}}.$$

3) Из 2) и того, что для всякого НЧ p функция $\mathcal{F}_p$ абсолютно непрерывна, следует сразу абсолютная непрерывность функции $\mathcal{F}$.

Но тогда существует согласно теореме 2 из [7] $\{G_n\}_n \in L_1$ такое, что

$$\forall xy\,(0 \le x < y \le 1 \supset \mathcal{F}(y) - \mathcal{F}(x) = \int_x^y \{G_n\}_n)\,,$$

для почти всех КДЧ x из $0 \Delta 1$ выполнено $\exists z\,(P(z, \{G_n\}_n, x)\,\&$ $\&\, D(z, \mathcal{F}, x))$ и, следовательно, ввиду предположения теоремы верно $\{G_n\}_n = \{F_n\}_n$.

<u>Следствие</u>. Пусть f и $\mathcal{F}$ функции такие, что $\mathfrak{M}_1(f)\,\&$ $\&\, \mathcal{Q}(\mathcal{F})$ и для почти всех КДЧ x из $0 \Delta 1$ выполнено $D(f(x), \mathcal{F}, x)$. Тогда $L_1(f)$, $\mathcal{F}$ абсолютно непрерывна и

$$\forall xy\,(0 \le x < y \le 1 \supset (\mathcal{F}(y) - \mathcal{F}(x))\int_{x\Delta y} f)\,.$$

<u>Доказательство</u>. Утверждение является непосредственным следствием только что доказанной теоремы и теоремы 5 из [7].

<u>Теорема 3</u>. Пусть $\mathcal{F}$ функция, а $\{F_n\}_n$ -последовательность ступенчатых остовов такие, что $\mathcal{Q}(\mathcal{F})$, $\{F_n\}_n \in S$ и для почти всех КДЧ x из $0 \Delta 1$ верно $\exists z\,(P(z, \{F_n\}_n, x)\,\&\, D(z, \mathcal{F}, x))$.

Тогда $\mathcal{F}$ абсолютно непрерывна и существует $\{G_n\}_n \in L_1$ такое, что $\{G_n\}_n = \{F_n\}_n$ и $\forall xy\,(0 \le x < y \le 1 \supset \mathcal{F}(y) -$ $- \mathcal{F}(x) = \int_x^y \{G_n\}_n)$.

<u>Доказательство</u>. Ввиду части 4а) леммы 1 из [7] теорема 3 является непосредственным следствием теоремы 2.

Ввиду теоремы 5 из [7] мы на основании теоремы 3 сразу получаем следующее утверждение.

<u>Следствие</u>. Пусть f и $\mathcal{F}$ функции такие, что $\mathfrak{N}_1(f)\,\&$ $\&\, \mathcal{Q}(\mathcal{F})$ и для почти всех КДЧ x из $0 \Delta 1$ выполнено $D(f(x), \mathcal{F}, x)$.

Тогда $L_1(f)$, функция $\mathcal{F}$ абсолютно непрерывна и выполнено

$$\forall x y (0 \leq x < y \leq 1 \supset (\mathcal{F}(y) - \mathcal{F}(x)) \int_{x \Delta y} f) .$$

Литература

[1] А. МАРКОВ: Теория алгорифмов, Труды Мат.инст.им.В.А. Стеклова, том XLII (1954).

[2] - Проблемы конструктивного направления в математике, 2(сборник работ), Труды Мат.инст.им.В.А.Стеклова, том LXVII (1962).

[3] - Труды Третьего всесоюзного съезда, том 1, Москва, 1956.

[4] И.П. НАТАНСОН: Теория функций вещественной переменной, Москва, 1957.

[5] О. ДЕМУТ: Интеграл Лебега в конструктивном анализе, Записки научных семинаров Ленинградского отд. Мат.инст.им.В.А.Стеклова, том 4(1967), 30-43.

[6] О. ДЕМУТ: Интеграл Лебега и понятие измеримости функций в конструктивном анализе, там же, том 8 (1968), 21-28.

[7] О. ДЕМУТ: Пространства L_n и S в конструктивной математике, Comm. Math. Univ. Carolinae 10(1969), 261-284.

[8] О. ДЕМУТ: О дифференцируемости конструктивных функций, Comm. Math. Univ. Carolinae 10(1969), 167-175.

[9] О. ДЕМУТ: О измеримости множеств по Лебегу в конструктивной математике, Comm. Math. Univ. Carolinae 10(1969), 463-492.

Matematicko-fyzikální fakulta
Karlova universita
Sokolovská 83
Praha 8 Karlín
Československo

(Oblatum 14.4.1970)