Oldřich Horáček

L'existence d'une solution classique d'une éqéaire dans E_1 (Communication préalable)

Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae, Vol. 12 (1971), No. 3, 635--638

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/105372`

Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae

12,3 (1971)

L'EXISTENCE D'UNE SOLUTION CLASSIQUE D'UNE ÉQUATION D'ONDES NON-LINÉAIRE DANS E_1

(Communication préalable)

Oldřich HORÁČEK, Praha

0. Soient donnés les deux intervalles $I = \langle 0, \pi \rangle \subset \subset E_1$ et $J = (-\infty, +\infty) \equiv E_1$ et soit $K \subset E_1$ un intervalle fini quelconque. Nous désignerons par x les éléments de l'intervalle I et par t ceux des intervalles J et I. Soient ensuite $L_2 = L_2(I)$, $H_1 = H_1(I)$ et $\overset{\circ}{H}_1 = \overset{\circ}{H}_1(I)$ les espaces de Hilbert définie comme d'habitude (dans la suite, en parlant d'un d'eux sans le spécifier, nous écrivons H tout court), munis des produits scalaires correspondants (voir pour cela p. ex.[1], où $H_1 = W_2^{(1)}$ et $\overset{\circ}{H}_1 = \overset{\circ}{W}_2^{(1)}$). Soient enfin $Q = J \times \times I$ et $Q_K = K \times I$ les deux intervalles dans E_2.

Posons maintenant

$$C^{(0)}(K,H) = \mathcal{E}\{\varphi ; \varphi : K \longrightarrow H \;, \;\; \varphi \;\; \text{continu},$$
$$|\varphi|_{C^{(0)}(K,H)} = \sup_{t \in K} |\varphi(t)|_H < +\infty\},$$
$$C^{(2)}(Q_K) = \mathcal{E}\{\Phi ; \Phi : Q_K \rightarrow E_1 ,\; \Phi_{tt} ,\; \Phi_{tx} ,\; \Phi_{xx} \;\; \text{continu},$$
$$|\Phi|_{C^{(2)}(Q_K)} = \sup_{(t,x) \in Q_K} (|\Phi(t,x)|, |\Phi_t(t,x)|, |\Phi_x(t,x)|,$$

AMS Classification: Primary 35L60

$|\Phi_{tt}(t,x)|, |\Phi_{tx}(t,x)|, |\Phi_{xx}(t,x)|) < +\infty \}$,

$L_2(K,H) = \mathcal{E}\{\varphi ;\ \varphi : K \to H,\ |\varphi|_{L_2(K,H)} = (\int_K |\varphi(t)|_H^2 dt)^{1/2} < +\infty\}.$

On voit tout de suite que $C^{(0)}(K,H)$ et $C^{(2)}(Q_K)$ sont des espaces de Banach, tandis que $L_2(K,H)$ est un espace de Hilbert. Écrivons ensuite

$$C^{(0)}_{loc}(J,H) = \bigcup_{K,\, K\subset J,\, K \text{ fermé}} C^{(0)}(K,H) ,$$

$$C^{(2)}_{loc}(Q) = \bigcup_{K,\, K\subset J,\, K \text{ fermé}} C^{(2)}(Q_K) ,$$

$L_{2,loc}(J,H) = \mathcal{E}\{\varphi ;\ \varphi : J \to H ,\ |\varphi|_{L_2(K,H)} < +\infty$
pour tout $K \subset J$, K fermé $\}$.

1. Dans notre Note, nous voulons présenter un théorème sur l'existence d'une solution classique, ω-périodique en t , $u = u(t,x)$ de l'équation d'ondes fortement non-linéaire dans E_1

(1) $\quad u_{tt} - u_{xx} + u_t + u^3 = f \quad (f = f(t,x), t \in J, x \in I)$,

vérifiant la condition aux limites homogène respective: première

(2) $\qquad u(t,0) = u(t,\pi) = 0 \qquad (t \in J)$,

ou deuxième

(3) $\qquad u_x(t,0) = u_x(t,\pi) = 0 \quad (t \in J)$.

<u>Théorème</u>. Soit $f \in C^{(0)}_{loc}(J, \overset{\circ}{H}_1)$ ou $f \in C^{(0)}_{loc}(J,H_1)$, respectivement, $f_{tt} \in L_{2,loc}(J, L_2)$ et supposons la fonction f ω-périodique en t . Alors il existe au

moins une solution de (1) ou (2) et (3), respectivement, ω -périodique en t, et telle que $u \in C^{(2)}_{loc}(Q)$.

Remarque. En accord avec le système de notation introduit p.ex. dans [2], f_{tt} est la fonction telle que $f_{tt}(t)(x) = \frac{\partial^2 f(t,x)}{\partial t^2}$ $(x \in I)$ pour $t \in J$.

La démonstration s'appuie sur l'application de la méthode de Galerkine (voir p. ex. [3] - où elle est toutefois appelée méthode de Galerkine-Faedo).

2. Pour terminer, nous allons ajouter deux remarques.

Remarque 1. On peut dire que la lissesse de la solution périodique de (1) et (2) ou (1) et (3), respectivement, ne dépend, pour la non-linéarité u^3 donnée, que de la lissesse du second membre f. Remarquons encore, que les conditions concernant la lissesse du second membre f sont vraiement minimales. Une amélioration de la lissesse du second membre signifierait une amélioration de la lissesse de la solutiohn

Remarque 2. On pourrait remplacer la non-linéarité u^3 par une non-linéarité de la forme u^k ou encore $u^{k-1}u_t$ (avec k entier impair), soit encore par une combinaison linéaire finie aux coefficients positifs de tels termes; le théorème présenté ici reste alors en vigueur.

Travaux cités

[1] J. NEČAS: Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques, Praha, Academia 1967.

[2] F. BUZZETTI: Sull'equazione della corda vibrante con termine dissipativo monotono crescente, Rendiconti, Istituto Lombardo, A102(1968), 225-235.

[3] G. PROUSE: Soluzioni periodiche dell'equazione delle ondo non omogenea con termine dissipativo quadratico, Richerche di matematica, XIII(1964), 261-280.

Matematický ústav ČSAV
Žitná 25, Praha 1
Československo

(Oblatum 26.2.1971)