Reinhard Steudel

Zur eindeutigen Lösbarkeit eines nichtlinearen Operatordifferentialgleichungssystems

Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae, Vol. 21 (1980), No. 3, 591--604

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/106023

COMMENTATIONES MATHEMATICAE UNIVERSITATIS CAROLINAE

21,3 (1980)

ZUR EINDEUTIGEN LÖSBARKEIT EINES NICHTLINEAREN OPERATORDIFFERENTIALGLEICHUNGSSYSTEMS

Reinhard STEUDEL

Zusammenfassung: Ein nichtlineares Operatordifferentialgleichungssystem wird auf eine Fixpunktgleichung reduziert. Durch Einführung einer zeitgewichteten Norm gelingt mit Hilfe des Fixpunktsatzes von Banach der Nachweis der eindeutigen Lösbarkeit des Systems. Es wird die Konvergenz eines Iterationsverfahrens zur Lösung des Systems bewiesen, wo in jedem Schritt nur noch ein lineares Anfangswertproblem zu lösen ist.

Schlagworte: Nichtlineares Operatordifferentialgleichungssystem, Reduktion, eindeutige Lösbarkeit, Iterationsverfahren.

Klassifikation: 34G05, 47H15

In der Arbeit [4] haben wir die eindeutige Lösbarkeit des Systems

$$(1)\quad \begin{cases} A\dot{v}_1 + K_1 v_1 + Rv_2 = f_1 \\ B(\dot{v}_1,\dot{v}_2) + K_2 v_2 = f_2 \\ v_1(0)=v_{1o},\ v_2(0)=v_{2o},\ [v_1,v_2] \in \mathcal{W}_1 \times \mathcal{W}_2 \end{cases}$$

bewiesen. In (1) seien A und B nichtlineare Operatoren, die gewissen Monotonie- und Stetigkeitsbedingungen genügen. K_1, K_2 und R seien spezielle lineare Operatoren und $\mathcal{W}_1$, $\mathcal{W}_2$ geeignet gewählte Hilberträume.

In der vorliegenden Arbeit zeigen wir, dass das allgemeinere System

$$(2)\quad \begin{cases} A(\dot{v}_1,v_3) + K_1v_1 + Rv_2 = f_1 \\ B(\dot{v}_1,\dot{v}_2,v_3) + K_2v_2 = f_2 \\ (\tilde{S}v_1)(t) + \int_0^t E(v_3(s),s,t)ds = v_3(t) \\ v_1(0)=v_{1o},\ v_2(0)=v_{2o},\ [v_1,v_2,v_3] \in \mathcal{W}_1 \times \mathcal{W}_2 \times \mathcal{L} \end{cases}$$

wobei A, B und E nichtlineare Operatoren, K_1, K_2, R und $\tilde{S}$ spezielle lineare Operatoren seien, eindeutig lösbar ist, und geben ein Iterationsverfahren zur Lösung von (2) an.

1. Bezeichnungen und Voraussetzungen. V_1 (V_2) sei ein Hilbertraum, der in einen weiteren Hilbertraum H_1 (H_2) stetig eingebettet ist und in diesem dicht liegt. Wir identifizieren H_1 (H_2) mit seinem dualen Raum $H_1^*(H_2^*)$ und $H_1^*(H_2^*)$ mit einem Teilraum des zu V_1 (V_2) dualen Raumes $V_1^*(V_2^*)$. Dann gilt

$$V_1 \subset H_1 \subset V_1^* \quad (V_2 \subset H_2 \subset V_2^*) \quad (\text{s,z,B. [2]}).$$

Im folgenden sei $S := [0,T]$ stets ein endliches (Zeit-)Intervall. Für einen beliebigen Banachraum E bezeichne $L^2(S;E)$ den Raum der auf S definierten, zur zweiten Potenz integrablen Funktionen mit Werten in E.
Ist E ein Hilbertraum, so ist $L^2(S;E)$ ebenfalls ein Hilbertraum mit dem Skalarprodukt

$$(u,v)_{L^2(S;E)} = \int_S (u(t),v(t))_E \, dt.$$

Mit $L^2_\lambda(S;E)$ bezeichnen wir den Raum der auf S definierten Funktionen, für die

$$\|u\|^2_{L^2_\lambda(S;E)} := \int_S e^{-2\lambda t} \|u(t)\|^2_E \, dt < \infty$$

gilt. Dabei bezeichne λ einen positiven Parameter. Diese Norm ist offensichtlich zur Norm in $L^2(S;E)$ äquivalent.
C(S;E) bezeichne den Raum der auf S definierten und stetigen

Funktionen mit Werten in E. Wir setzen $\mathcal{V}_1 := L^2_\lambda(S;V_1)$, $\mathcal{H}_1 :=$ $:= L^2_\lambda(S;H_1)$, $\mathcal{V}^*_1 := L^2_\lambda(S;V^*_1)$, $\mathcal{V}_2 := L^2_\lambda(S;V_2)$, usw.
Es gilt $\mathcal{V}_i \subset \mathcal{H}_i \subset \mathcal{V}^*_i$, i=1,2.

Für den Wert eines linearen Funktionals $f \in \mathcal{V}^*_1$ ($g \in \mathcal{V}^*_2$) im Punkt $u \in \mathcal{V}_1$ ($v \in \mathcal{V}_2$) schreiben wir $\langle f,u \rangle$ ($\langle\langle g,v \rangle\rangle$).
Mit K_1 (K_2) bezeichnen wir die durch

$$\langle K_1 u,u \rangle = \|u\|^2_{\mathcal{V}_1} = \|K_1 u\|^2_{\mathcal{V}^*_1}, \quad \forall u \in \mathcal{V}_1$$

$$(\langle\langle K_2 v,v \rangle\rangle = \|v\|^2_{\mathcal{V}_2} = \|K_2 v\|^2_{\mathcal{V}^*_2}, \quad \forall v \in \mathcal{V}_2)$$

definierte Dualitätsabbildung von $\mathcal{V}_1$ ($\mathcal{V}_2$) auf $\mathcal{V}^*_1$ ($\mathcal{V}^*_2$). Bzgl. der Eigenschaften der Dualitätsabbildung siehe z.B. [6]. Wir setzen weiter $\mathcal{W}_i := \{u_i \in \mathcal{V}_i \mid \dot{u}_i \in \mathcal{V}^*_i\}$, i=1,2.
($\dot{u}_i$ bezeichne die Ableitung von u_i im Sinne der Distributionen über $]0,T[$ mit Werten in V^*_i, i=1,2)
$\mathcal{W}_i$ ist stetig in $C(S;H_i)$, i=1,2 eingebettet (siehe z.B. [2], Satz 1.17, Kap. IV). Mit $\mathcal{L}$ bezeichnen wir den Raum der auf S definierten Funktionen mit Werten in R, für die gilt

$$\int_S e^{-2\lambda t}(u(t))^2 dt < \infty \ , \quad \lambda > 0.$$

$\|\cdot\|_{\mathcal{V}_i}$ bzw. $(\cdot,\cdot)_{\mathcal{V}_i}$ bezeichne die Norm bzw. das Skalarprodukt in $\mathcal{V}_i$. Analog sind die Bezeichnungen $\|\cdot\|_{\mathcal{H}_i}$, $(\cdot,\cdot)_{\mathcal{H}_i}$, usw. zu verstehen. Bzgl. der Operatoren A, B, R, $\tilde{S}$ und E setzen wir voraus:

a) $A \in (\mathcal{V}^*_1 \times \mathcal{L} \to \mathcal{V}^*_1)$

A($\cdot$,z) ist stark monoton und Lipschitz-stetig:

$$(3) \quad \begin{cases} (A(x_1,z)-A(x_2,z),x_1-x_2)_{\mathcal{V}^*_1} \geq m_1 \|x_1-x_2\|^2_{\mathcal{V}^*_1}, \ m_1 > 0, \\ \|A(x_1,z)-A(X_2,z)\|_{\mathcal{V}^*_1} \leq M_1 \|x_1-x_2\|_{\mathcal{V}^*_1}, \forall x_1,x_2 \in \mathcal{V}^*_1, z \in \mathcal{L}. \end{cases}$$

A(x,$\cdot$) ist Lipschitz-stetig:

(4) $\|A(x,z_1)-A(x,z_2)\|_{\mathcal{V}^*_1} \leq L_1 \| z_1-z_2 \|_{\mathcal{L}}$, $x \in \mathcal{V}^*_1$, $\forall z_1, z_2 \in \mathcal{L}$.

b) $B \in (\mathcal{V}^*_1 \times \mathcal{V}^*_2 \times \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{V}^*_2)$,

$B(\cdot,y,z)$ und $B(x,y,\cdot)$ sind Lipschitz-stetig:

(5) $\| B(x_1,y,z)-B(x_2,y,z) \|_{\mathcal{V}^*_2} \leq L_2 \| x_1-x_2 \|_{\mathcal{V}^*_1}$, $\forall x_1, x_2 \in \mathcal{V}^*_1$,
$y \in \mathcal{V}^*_2$, $z \in \mathcal{L}$.

(6) $\| B(x,y,z_1)-B(x,y,z_2) \|_{\mathcal{V}^*_2} \leq L_3 \| z_1-z_2 \|_{\mathcal{L}}$, $\forall z_1, z_2 \in \mathcal{L}$,
$x \in \mathcal{V}^*_1$, $y \in \mathcal{V}^*_2$.

$B(x,\cdot,z)$ ist stark monoton und Lipschitz-stetig:

$$(7) \left\{ \begin{array}{l} (B(x,y_1,z)-B(x,y_2,z), y_1-y_2)_{\mathcal{V}^*_2} \geq m_2 \| y_1-y_2 \|^2_{\mathcal{V}^*_2}, \ m_2 > 0, \\ \|B(x,y_1,z)-B(x,y_2,z) \|_{\mathcal{V}^*_2} \leq M_2 \| y_1-y_2 \|_{\mathcal{V}^*_2}, \ \forall y_1, y_2 \in \mathcal{V}^*_2, \end{array} \right.$$
$x \in \mathcal{V}^*_1$, $z \in \mathcal{L}$.

c) $R \in (\mathcal{V}_2 \longrightarrow \mathcal{V}^*_1)$ sei ein linearer Operator,

(8) $\| Rv \|^2_{\mathcal{V}^*_1} \leq \eta_1 \| v \|_{\mathcal{H}_2} \| v \|_{\mathcal{V}_2}$, $\eta_1 =$ const, $\forall v \in \mathcal{V}_2$

d) $\tilde{S} \in (\mathcal{V}_1 \longrightarrow \mathcal{L})$ sei ein linearer Operator,

(9) $\| \tilde{S}v \|^2_{\mathcal{L}} \leq \eta_2 \| v \|_{\mathcal{H}_1} \| v \|_{\mathcal{V}_1}$, $\eta_2 =$ const, $\forall v \in \mathcal{V}_1$

e) $E \in (\mathcal{L} \times S \times S \longrightarrow \mathcal{L})$ sei Lipschitz-stetig:

$$(10) \left\{ \begin{array}{l} |E(\xi_1,s,t)-E(\xi_2,s,t)| \leq L_4 |\xi_1 - \xi_2|, \ \xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}, s,t \in S, \\ t \longmapsto \int_0^t E(0,s,t)ds \text{ gehöre zu } \mathcal{L} . \end{array} \right.$$

Schliesslich fordern wir

(11) $f_1 \in \mathcal{V}^*_1$, $f_2 \in \mathcal{V}^*_2$, $v_{1o} \in H_1$, $v_{2o} \in H_2$.

2. Existenz und Eindeutigkeit. Wir betrachten zunächst die Aufgabe

$$
(12)\begin{cases} B(x,\dot v_2,z) + K_2 v_2 = f_2,\ v_2(0)=v_{2o},\ v_2 \in \mathcal{W}_2 \\ \text{mit festem } [x,z] \in \mathcal{V}^*_1 \times \mathcal{L}\,. \end{cases}
$$

Die Aufgabe (12) besitzt genau eine Lösung. Dies kann mit Hilfe der Theorie der maximal monotonen Operatoren bewiesen werden (siehe z.B. [1];[3];[4], Lemma 2.1).

Wir bezeichnen die Lösung von (12) mit $C(x,z)$ und definieren so eine Abbildung von $\mathcal{V}^*_1 \times \mathcal{L}$ in $\mathcal{W}_2$. Es gilt folgendes

Lemma 1. C besitzt die Eigenschaften

$$
(13)\begin{cases} \|C(x_1,z_1)-C(x_2,z_2)\|_{\mathcal{V}_2} \le \left(1+\frac{M_2}{m_2}\right)\ (L_2\|x_1-x_2\|_{\mathcal{V}^*_1} + \\ \qquad + L_3\|z_1-z_2\|_{\mathcal{L}}\ )\ \forall x_1,x_2 \in \mathcal{V}^*_1,\ \forall z_1,z_2 \in \mathcal{L} \end{cases}
$$

$$
(14)\begin{cases} \|C(x_1,z_1)-C(x_2,z_2)\|_{\mathcal{H}_2} \le \frac{1}{\sqrt{\lambda\, m_2}}\ (L_2\|x_1-x_2\|_{\mathcal{V}^*_1} + \\ \qquad + L_3\|z_1-z_2\|_{\mathcal{L}}\ )\ \forall x_1,x_2 \in \mathcal{V}^*_1,\ \forall z_1,z_2 \in \mathcal{L}\,. \end{cases}
$$

Beweis: Es gilt

$$
\begin{aligned}
&0=(B(x_1,\dot v_2^1,z_1)-B(x_2,\dot v_2^2,z_2)+K_2(v_2^1-v_2^2),\dot v_2^1-\dot v_2^2)_{\mathcal{V}^*_2} \overset{(7)}{\ge} \\
&\overset{(7)}{\ge} m_2\|\dot v_2^1-\dot v_2^2\|^2_{\mathcal{V}^*_2} + (B(x_1,\dot v_2^2,z_1)-B(x_2,\dot v_2^2,z_2)+B(x_2,\dot v_2^2,z_1)- \\
&-B(x_2,\dot v_2^2,z_1),\dot v_2^1-\dot v_2^2)_{\mathcal{V}^*_2} + \lambda\|v_2^1-v_2^2\|^2_{\mathcal{H}_2} \overset{(5),(6)}{\ge} m_2\|\dot v_2^1-\dot v_2^2\|^2_{\mathcal{V}^*_2} - \\
&-L_2\|x_1-x_2\|_{\mathcal{V}^*_1}\|\dot v_2^1-\dot v_2^2\|_{\mathcal{V}^*_2} - L_3\|z_1-z_2\|_{\mathcal{L}}\|\dot v_2^1-\dot v_2^2\|_{\mathcal{V}^*_2} + \\
&+\lambda\|v_2^1-v_2^2\|^2_{\mathcal{H}_2}\,.
\end{aligned}
$$

Aus dieser Abschätzung folgt

$$
(15)\quad \|\dot v_2^1-\dot v_2^2\|_{\mathcal{V}^*_2} \le \frac{1}{m_2}(L_2\|x_1-x_2\|_{\mathcal{V}^*_1} + L_3\|z_1-z_2\|_{\mathcal{L}}\ )
$$

und

$$\| v_2^1 - v_2^2 \|_{\mathcal{H}_2} \leq \frac{1}{\sqrt{\lambda\, m_2}} \left(L_2 \| x_1 - x_2 \|_{\mathcal{V}_1^*} + L_3 \| z_1 - z_2 \|_{\mathcal{L}} \right), \forall x_1, x_2 \in \mathcal{V}_1^*, \ \forall z_1, z_2 \in \mathcal{L},$$

also die Behauptung (14). Weiter gilt

$$0 = (B(x_1, \dot{v}_2^1, z_1) - B(x_2, \dot{v}_2^2, z_2) + K_2(v_2^1 - v_2^2), K_2(v_2^1 - v_2^2))_{\mathcal{V}_2^*} \geq$$

$$\geq \| v_2^1 - v_2^2 \|^2_{\mathcal{V}_2} - \| v_2^1 - v_2^2 \|_{\mathcal{V}_2} \left(L_2 \| x_1 - x_2 \|_{\mathcal{V}_1^*} + L_3 \| z_1 - z_2 \|_{\mathcal{L}} \right) +$$

$$+ M_2 \| \dot{v}_2^1 - \dot{v}_2^2 \|_{\mathcal{V}_2^*}),$$

also wegen (15)

$$\| v_2^1 - v_2^2 \|_{\mathcal{V}_2} \leq \left(1 + \frac{M_2}{m_2}\right) \left(L_2 \| x_1 - x_2 \|_{\mathcal{V}_1^*} + L_3 \| z_1 - z_2 \|_{\mathcal{L}} \right), \forall x_1, x_2 \in$$

$\in \mathcal{V}_1^*$, $\forall z_1, z_2 \in \mathcal{L}$, und damit die Behauptung (13).

Wir betrachten weiter die Aufgabe

$$(16) \quad \begin{cases} (A+RC)(\dot{v}_1, z) + K_1 v_1 = f_1, \ v_1(0) = v_{1o}, \ v_1 \in \mathcal{W}_1 \\ \text{mit festem } z \in \mathcal{L} . \end{cases}$$

Die Aufgabe (16) besitzt genau eine Lösung (siehe [3]; [4], Satz 2.1, Bemerkung 2.2 und Lemma 2.3).
Wir bezeichnen die Lösung von (16) mit $D(z)$ und definieren so eine Abbildung von $\mathcal{L}$ in $\mathcal{W}_1$. Es gilt

<u>Lemma 2</u>. D besitzt die Eigenschaften

$$(17) \quad \begin{cases} \| D(z_1) - D(z_2) \|_{\mathcal{V}_1} \leq \left(1 + \frac{M_1}{m_1}\right) \left(L_1 + k \left(\frac{\eta_1 (m_2 + M_2)}{\sqrt{\lambda\, m_2} \cdot m_2} \right)^{1/2} \right) \| z_1 - z_2 \|_{\mathcal{L}} \\ \forall z_1, z_2 \in \mathcal{L}, \end{cases}$$

$$(18) \quad \begin{cases} \| D(z_1) - D(z_2) \|_{\mathcal{H}_1} \leq \left(\frac{L_1}{\sqrt{\lambda\, m_1}} + \frac{k \sqrt{\eta_1 (m_2 + M_2)}}{(\lambda\, m_2)^{3/4} m_1^{1/2}} \right) \| z_1 - z_2 \|_{\mathcal{L}} , \\ \forall z_1, z_2 \in \mathcal{L} \end{cases}$$

mit $k := L_3 + \frac{L_1 L_2}{m_1} + L_3$, wobei λ so gross gewählt wird, dass $\frac{L_2}{m_1} \left(\frac{\eta_1}{\sqrt{\lambda\, m_2}} (1+ \frac{M_2}{m_2})\right)^{1/2} \leq \frac{1}{2}$.

Beweis: Aus der Abschätzung

$$0=(A(\dot v_1^1, z_1)-A(\dot v_1^2, z_2)+K_1(v_1^1-v_1^2)+R(C(\dot v_1^1, z_1)-C(\dot v_1^2, z_2)),$$

$$\dot v_1^1-\dot v_1^2)_{\mathcal{V}_1^*} \overset{(3),(4)}{\geq} m_1 \| \dot v_1^1-\dot v_1^2\|^2_{\mathcal{V}_1^*}-L_1 \| z_1-z_2 \|_{\mathcal{L}} \| \dot v_1^1-\dot v_1^2 \|_{\mathcal{V}_1^*} -$$

$$- \|R(C(\dot v_1^1, z_1)-C(\dot v_1^2, z_2))\|_{\mathcal{V}_1^*} \|\dot v_1^1-\dot v_1^2 \|_{\mathcal{V}_1^*}+ \lambda \| v_1^1-v_1^2 \|^2_{\mathcal{H}_1}$$

folgt

$$(19) \quad \| \dot v_1^1-\dot v_1^2 \|_{\mathcal{V}_1^*} \leq \frac{1}{m_1}(L_1 \| z_1-z_2 \|_{\mathcal{L}} + \| R(C(\dot v_1^1, z_1)-C(\dot v_1^2, z_2)) \|_{\mathcal{V}_1^*})$$

und

$$(20) \begin{cases} \| v_1^1-v_1^2 \|_{\mathcal{H}_1} \leq \frac{1}{\sqrt{\lambda\, m_1}} (L_1 \| z_1-z_2 \|_{\mathcal{L}} + \| R(C(\dot v_1^1, z_1)- \\ \qquad -C(\dot v_1^2, z_2)) \|_{\mathcal{V}_1^*}). \end{cases}$$

Weiter gilt

$$0=(A(\dot v_1^1, z_1)-A(\dot v_1^2, z_2)+K_1(v_1^1-v_1^2)+R(C(\dot v_1^1, z_1)-C(\dot v_1^2, z_2)),$$

$$K_1(v_1^1-v_1^2))_{\mathcal{V}_1^*} \overset{(3),(4)}{\geq} \| v_1^1-v_1^2 \|^2_{\mathcal{V}_1} - \| v_1^1-v_1^2 \|_{\mathcal{V}_1} (M_1 \| \dot v_1^1-\dot v_1^2 \|_{\mathcal{V}_1^*} +$$

$$+L_1 \| z_1-z_2 \|_{\mathcal{L}} + \| R(C(\dot v_1^1, z_1)-C(\dot v_1^2, z_2)) \|_{\mathcal{V}_1^*}),$$ also wegen (19)

$$(21) \quad \| v_1^1-v_1^2 \|_{\mathcal{V}_1} \leq (1+ \frac{M_1}{m_1}) (L_1 \| z_1-z_2 \|_{\mathcal{L}} + \| R(C(\dot v_1^1, z_1)-$$

$$-C(\dot v_1^2, z_2)) \|_{\mathcal{V}_1^*}).$$

Aus (19) folgt wegen Lemma 1 und (8)

$$\| \dot v_1^1-\dot v_1^2 \|_{\mathcal{V}_1^*} \leq \frac{1}{m_1}(L_1 \| z_1-z_2 \|_{\mathcal{L}} +(\eta_1 \| C(\dot v_1^1, z_1)-C(\dot v_1^2, z_2)\|_{\mathcal{H}_2}$$

$$\|C(\dot v_1^1, z_1)-C(\dot v_1^2, z_2)\|_{\mathcal{V}_2})^{1/2} = \frac{1}{m_1}\{ L_1 \| z_1-z_2 \|_{\mathcal{L}} +$$

$$+ \sqrt{\eta_1}\Big(\big(1+\frac{M_2}{m_2}\big) \big[L_2 \| \dot{v}_1^1-\dot{v}_1^2 \|_{\mathcal{V}_1^*}+L_3 \| z_1-z_2 \|_{\mathcal{L}}\big] \frac{1}{\sqrt{\lambda\, m_2}} \big[L_2 \| \dot{v}_1^1 -$$

$$- \dot{v}_1^2 \|_{\mathcal{V}_1^*} + L_3 \| z_1-z_2 \|_{\mathcal{L}} \big] \Big)^{1/2}\Big\} = \frac{1}{m_1} \Big\{ L_1 \| z_1-z_2 \|_{\mathcal{L}} +$$

$$+ \left(\frac{\eta_1 (m_2+M_2)}{\sqrt{\lambda\, m_2} \cdot m_2}\right)^{1/2} (L_2 \| \dot{v}_1^1-\dot{v}_1^2 \|_{\mathcal{V}_1^*} +L_3 \| z_1-z_2 \|_{\mathcal{L}})\Big\} .$$

Wählen wir nun λ so gross, dass

$$(22) \quad \frac{L_2}{m_1} \left(\frac{\eta_1 (m_2+M_2)}{\sqrt{\lambda\, m_2}\ m_2}\right)^{1/2} \leq \frac{1}{2} ,$$

so ergibt sich aus der letzten Abschätzung wegen (22)

$$(23) \quad \| \dot{v}_1^1-\dot{v}_1^2 \|_{\mathcal{V}_1^*} \leq \big(\frac{L_3}{L_2} + \frac{2L_1}{m_1}\big) \| z_1-z_2 \|_{\mathcal{L}} .$$

Wegen (23) folgt damit aus (13),(14)

$$(24) \begin{cases} \| C(\dot{v}_1^1,z_1)-C(\dot{v}_1^2,z_2) \|_{\mathcal{V}_2} \leq k\big(1+ \frac{M_2}{m_2}\big) \| z_1-z_2 \|_{\mathcal{L}} \\ \| C(\dot{v}_1^1,z_1)-C(\dot{v}_1^2,z_2) \|_{\mathcal{H}_2} \leq \dfrac{k}{\sqrt{\lambda\, m_2}} \| z_1-z_2 \|_{\mathcal{L}} \end{cases}$$

mit $k := L_3 + \frac{L_1\, L_2}{m_1} + L_3$.

Aus (20) und (21) folgt damit wegen (8) und (24)

$$\| v_1^1-v_1^2 \|_{\mathcal{H}_1} \leq \Big(\frac{L_1}{\sqrt{\lambda\, m_1}} + \frac{k \sqrt{\eta_1 (m_2+M_2)}}{(\lambda m_2)^{3/4} (m_1)^{1/2}}\Big) \| z_1-z_2 \|_{\mathcal{L}} , \ \forall z_1,z_2 \in \mathcal{L}$$

und

$$\| v_1^1-v_1^2 \|_{\mathcal{V}_1} \leq \big(1+ \frac{M_1}{m_1}\big) \Big(L_1+k\left(\frac{\eta_1 (m_2+M_2)}{\sqrt{\lambda\, m_2} \cdot m_2}\right)^{1/2} \Big) \| z_1-z_2 \|_{\mathcal{L}} ,$$

$$\forall z_1,z_2 \in \mathcal{L} ,$$

also die Behauptung des Lemmas.

Wir betrachten nun die Aufgabe

(25) $(\tilde{S}D(v_3))(t)+\int_0^t E(v_3(s),s,t)ds = v_3(t),\ V_3 \in \mathcal{L}$.

Es gilt folgendes

Lemma 3. Die Aufgabe (25) besitzt eine eindeutig bestimmte Lösung.

Beweis: Wegen (10) und der in $\mathcal{L}$ gewählten Norm gilt

$$\| \int_0^t (E(v_3^1(s),s,t)-E(v_3^2(s),s,t))ds \|_{\mathcal{L}}^2 \leq TL_4^2 \int_0^T e^{-2\lambda t}(\int_0^t (v_3^1(s)-v_3^2(s))^2 ds)dt \leq \frac{TL_4^2}{2\lambda}\int_0^T e^{-2\lambda t}(v_3^1(t)-v_3^2(t))^2 dt = \frac{TL_4^2}{2\lambda}\| v_3^1-v_3^2 \|_{\mathcal{L}}^2 ,$$

also

(26) $$\| \int_0^t (E(v_3^1(s),s,t)-E(v_3^2(s),s,t))ds \|_{\mathcal{L}} \leq \left(\frac{TL_4^2}{2\lambda}\right)^{1/2} \| v_3^1-v_3^2 \|_{\mathcal{L}}$$

$$\forall\, v_3^1, v_3^2 \in \mathcal{L} .$$

Aus der Voraussetzung (9) und Lemma 2 folgt

$$\| \tilde{S}D(v_3^1)-\tilde{S}D(v_3^2) \|_{\mathcal{L}}^2 \leq \eta_2 \| D(v_3^1)-D(v_3^2) \|_{\mathcal{H}_1} \| D(v_3^1)-D(v_3^2) \|_{\mathcal{V}_1} \leq$$

$$\leq k_1^2(\lambda) \| v_3^1-v_3^2 \|_{\mathcal{L}}^2 \text{ mit}$$

$$k_1^2(\lambda) := \eta_2(1+\frac{M_1}{m_1})(L_1+k\left(\frac{\eta_1(m_2+M_2)}{\sqrt{\lambda\, m_2}\ m_2}\right)^{1/2})\left(\frac{L_1}{\sqrt{\lambda\, m_1}} + \right.$$

$$\left. + \frac{k\sqrt{\eta_1(m_2+M_2)}}{(\lambda m_2)^{3/4}(m_1)^{1/2}}\right)$$

also

(27) $$\| \tilde{S}D(v_3^1)-\tilde{S}D(v_3^2) \|_{\mathcal{L}} \leq k_1(\lambda) \| v_3^1-v_3^2 \|_{\mathcal{L}} ,\ \forall\, v_3^1, v_3^2 \in \mathcal{L}$$

Der Operator $\tilde{S}D(v_3)+\int_0^t E(v_3(s),s,t)ds$ ist im Raum $\mathcal{L}$ strikt kontraktiv, falls wir λ so gross wählen, dass

$$\left(\frac{TL_4^2}{2\lambda}\right)^{1/2} + k_1(\lambda) =: k_2(\lambda) < 1$$

gilt, wobei (22) zu berücksichtigen ist.

Aus dem Fixpunktsatz von Banach folgt die Behauptung des Lemmas.

Satz 1. Die Aufgabe (2) besitzt eine eindeutig bestimmte Lösung.

Beweis: Aus der Definition der Operatoren C und D folgt, dass $[v_1,v_2,v_3]$ genau dann Lösung von (2) ist, wenn $v_2=C(\dot{v}_1,v_3) = C(D\dot{v}_3,v_3)$, $v_1 = Dv_3$ und

$$\tilde{S}D(v_3)+\int_0^t E(v_3(s),s,t)ds = v_3(t),\ v_3\in\mathcal{L}.$$

Aus Lemma 3 folgt die Behauptung des Satzes.

Bemerkung 1. In [5] zeigen wir, dass bestimmte mathematische Modelle, die die Sorption in Festbetten mit biporöser Struktur beschreiben, auf Probleme der Form (2) führen.

3. Ein Iterationsverfahren

Lemma 4. Für $0<\varepsilon<\dfrac{m_1}{2M_1^2}$, $0<\delta<\dfrac{m_2}{2M_2^2}$. ist die Abbildung $\mathcal{U}$, die jedem Tripel $[v_1,v_2,v_3]\in\mathcal{W}_1\times\mathcal{W}_2\times\mathcal{L}$ die Lösung $[w_1,w_2,w_3]$ des Systems

$$\begin{aligned}
\varepsilon(K_1w_1+Rw_2)+\dot{w}_1 &= \dot{v}_1-\varepsilon A(\dot{v}_1,v_3)+\varepsilon f_1\\
\delta K_2w_2+\dot{w}_2 &= \dot{v}_2-\delta B(\dot{v}_1,\dot{v}_2,v_3)+\delta f_2\\
w_3 &= Sv_1+\int_0^t E(v_3(s),s,t)ds,
\end{aligned}$$

$$[w_1,w_2,w_3]\in\mathcal{W}_1\times\mathcal{W}_2\times\mathcal{L},\quad w_1(0)=v_{1o},\ w_2(0)=v_{2o}$$

zuordnet, eine strikt kontraktive Abbildung von $\mathcal{W}_1\times\mathcal{W}_2\times\mathcal{L}$ in sich, falls man auf $\mathcal{W}_1\times\mathcal{W}_2\times\mathcal{L}$ die folgende Norm einführt:

$$\|[w_1,w_2,w_3]\|^2_{\mathcal{W}_1\times\mathcal{W}_2\times\mathcal{L}} := \frac{p\varepsilon^2}{2}\|w_1\|^2_{\mathcal{V}_1} + 2\varepsilon p\lambda\|w_1\|^2_{\mathcal{H}_1} +$$

$$+ p(1-\frac{1}{\sigma})\|\dot w_1\|^2_{\mathcal{V}_1^*} + \frac{k\sigma^2}{2}\|w_2\|^2_{\mathcal{V}_2} + k\|\dot w_2\|^2_{\mathcal{V}_2^*} + \|w_3\|^2_{\mathcal{L}},$$

$$\text{mit } p = \frac{2\eta_2}{\varepsilon^{3/2}\sqrt{\lambda}}, \quad \lambda \geq \frac{\sqrt{\varepsilon}\,\eta_1\eta_2(1+\sigma)}{k\sigma^{3/2}}.$$

Hierbei bedeuten k und σ geeignet gewählte positive Konstanten, über die später verfügt wird.

Beweis: Es gelte $[w_1^i,w_2^i,w_3^i] = \mathcal{U}[v_1^i,v_2^i,v_3^i]$, $i=1,2$, $w_i := w_i^1-w_i^2$, $v_i := v_i^1-v_i^2$, $i=1,2,3$.

Dann folgt zunächst

$$p\|\dot v_1 - \varepsilon(A(\dot v_1^1,v_3^1)-A(\dot v_1^2,v_3^2)\|^2_{\mathcal{V}_1^*} + k\|\dot v_2 - \sigma(B(\dot v_1^1,\dot v_2^1,v_3^1)-$$

$$-B(\dot v_1^2,\dot v_2^2,v_3^2))\|^2_{\mathcal{V}_2^*} + \|\tilde S v_1 + \int_0^t (E(v_3^1(s),s,t)-E(v_3^2(s),s,t))ds\|^2_{\mathcal{L}} \leq$$

$$\leq p\|\dot v_1\|^2_{\mathcal{V}_1^*}(1-2\varepsilon m_1 + \varepsilon^2 M_1^2) + 2\varepsilon L_1 p(1+\varepsilon M_1)\|v_3\|_{\mathcal{L}}\cdot\|\dot v_1\|_{\mathcal{V}_1^*} +$$

$$+ \varepsilon^2 L_1^2 p\|v_3\|^2_{\mathcal{L}} + k\{\|\dot v_2\|^2_{\mathcal{V}_2^*}(1-2\sigma m_2 + \sigma^2 M_2^2) +$$

$$+ 2\sigma L_2\|\dot v_2\|_{\mathcal{V}_2^*}\|\dot v_1\|_{\mathcal{V}_1^*} + 2\sigma L_3\|\dot v_2\|_{\mathcal{V}_2^*}\|v_3\|_{\mathcal{L}} +$$

$$+4\sigma^2 L_2^2\|\dot v_1\|^2_{\mathcal{V}_1^*} + 4\sigma^2 L_3^2\|v_3\|^2_{\mathcal{L}}\} + \|\tilde S v_1\|^2_{\mathcal{L}} + 2\left(\frac{TL_4^2}{2\lambda}\right)^{1/2}$$

$$\|\tilde S v_1\|_{\mathcal{L}}\|v_3\|_{\mathcal{L}} + \frac{TL_4^2}{2\lambda}\|v_3\|^2_{\mathcal{L}} \overset{(9)}{\leq} \|\dot v_1\|^2_{\mathcal{V}_1^*}(pk_\varepsilon^2 + 2kL_2^2(2\sigma^2 + \frac{\sigma}{m_2})) +$$

$$+ k\bar k_\sigma^2\|\dot v_2\|^2_{\mathcal{V}_2^*} + \|v_3\|^2_{\mathcal{L}}(pL_1^2(2\varepsilon^2 + \frac{\varepsilon}{m_1}) + 2kL_3^2(2\sigma^2 + \frac{\sigma}{m_2}) + \frac{TL_4^2}{2\lambda}) +$$

$$+ \frac{\varepsilon^2 p}{4}\|v_1\|^2_{\mathcal{V}_1} + \frac{4\eta_2^2}{\varepsilon^2 p}\|v_1\|^2_{\mathcal{H}_1}, \text{ mit } k_\varepsilon^2 := 1-\varepsilon m_1 + \varepsilon^2 M_1^2,\ \bar k^2 :=$$

$$:= 1-\sigma m_2 + \sigma^2 M_2^2.$$

Weiter gilt

$$k\,\|\sigma K_2 w_2+\dot w_2\|^2_{\mathcal{V}^*_2} + p\,\|\varepsilon K_1 w_1 + \varepsilon R w_2 + \dot w_1\|^2_{\mathcal{V}^*_1} + \|w_3\|^2_{\mathcal{L}} \geq$$

$$\geq \frac{k\sigma^2}{2}\|w_2\|^2_{\mathcal{V}_2} + k\,\|\dot w_2\|^2_{\mathcal{V}^*_2} + \Big(2k\sigma\lambda - \frac{\varepsilon^4\eta_1^2(1+\sigma)^2 p^2}{2k\sigma^2}\Big)\|w_2\|^2_{\mathcal{H}_2} +$$

$$+ \frac{p\varepsilon^2}{2}\|w_1\|^2_{\mathcal{V}_1} + p\Big(1-\frac{1}{6}\Big)\|\dot w_1\|^2_{\mathcal{V}^*_1} + 2p\varepsilon\lambda\,\|w_1\|^2_{\mathcal{H}_1} + \|w_3\|^2_{\mathcal{L}}\,.$$

Somit ergibt sich die Abschätzung

$$\frac{k\sigma^2}{2}\|w_2\|^2_{\mathcal{V}_2} + k\,\|\dot w_2\|^2_{\mathcal{V}^*_2} + \Big(2k\sigma\lambda - \frac{\varepsilon^4\eta_1^2(1+\sigma)^2p^2}{2k\sigma^2}\Big)\|w_2\|^2_{\mathcal{H}_2} +$$

$$+ \frac{p\varepsilon^2}{2}\|w_1\|^2_{\mathcal{V}_1} + p\Big(1-\frac{1}{6}\Big)\|\dot w_1\|^2_{\mathcal{V}^*_1} + 2\varepsilon p\lambda\,\|w_1\|^2_{\mathcal{H}_1} + \|w_3\|^2_{\mathcal{L}} \leq$$

$$\leq \|\dot v_1\|^2_{\mathcal{V}^*_1}\Big(pk^2_\varepsilon + 2kL_2^2\big(2\sigma^2+\frac{\sigma}{m_2}\big)\Big) + k\bar k^2_\sigma\,\|\dot v_2\|^2_{\mathcal{V}^*_2} + \|v_3\|^2_{\mathcal{L}}\Big(pL_1^2\big(2\varepsilon^2+$$

$$+\frac{\varepsilon}{m_1}\big)\Big) + \frac{p\varepsilon^2}{4}\|v_1\|^2_{\mathcal{V}_1} + \Big(2kL_3^2\big(2\sigma^2+\frac{\sigma}{m_2}\big) + \frac{TL_4^2}{2\lambda}\Big)\|v_3\|^2_{\mathcal{L}} +$$

$$+ \frac{4\eta_2^2}{\varepsilon^2 p}\|v_1\|^2_{\mathcal{H}_1}.$$

Wählen wir etwa $p = \dfrac{2\eta_2}{\varepsilon^{3/2}\sqrt{\lambda}}$, k so klein und σ und λ so gross, dass $\lambda \geq \dfrac{\sqrt{\varepsilon}\;\eta_1\,\eta_2(1+\sigma)}{k\sigma^{3/2}}$, $\dfrac{2\eta_2}{\varepsilon^{3/2}\sqrt{\lambda}}\,L_1^2\big(2\varepsilon^2+\dfrac{\varepsilon}{m_1}\big)+$ $+2kL_3^2\big(2\sigma^2+\dfrac{\sigma}{m_2}\big) + \dfrac{TL_4^2}{2\lambda} < 1$, $k_\varepsilon^2 + \dfrac{\sqrt{\lambda}\;kL_2^2}{\eta_2}\big(2\sigma^2+\dfrac{\sigma}{m_2}\big)\,\varepsilon^{3/2} + \dfrac{1}{6} < 1$,

so ist $\mathcal{U}$ strikt kontraktiv.

<u>Satz 2.</u> Für $0 < \varepsilon < \dfrac{m_1}{2M_1^2}$, $0 < \sigma < \dfrac{m_2}{2M_2^2}$ konvergiert die durch die Vorschrift

$$
(28)\begin{cases}
\varepsilon(K_1 v_1^i + R v_2^i) + \dot{v}_1^i = \dot{v}_1^{i-1} - \varepsilon A(\dot{v}_1^{i-1}, v_3^{i-1}) + \varepsilon f_1 \\
\sigma K_2 v_2^i + \dot{v}_2^i = \dot{v}_2^{i-1} - \sigma B(\dot{v}_1^{i-1}, \dot{v}_2^{i-1}, v_3^{i-1}) + \sigma f_2 \\
v_3^i = \tilde{S} v_1^{i-1} + \int_0^t E(v_3^{i-1}(s), s, t)\,ds \\
v_1^i(0) = v_{1o},\ v_2^i(0) = v_{2o},\ [v_1^o, v_2^o, v_3^o] \in \mathcal{W}_1 \times \mathcal{W}_2 \times \mathcal{L} \text{ beliebig}
\end{cases}
$$

bestimmte Folge $([v_1^i, v_2^i, v_3^i])_{i\geq 1}$ im Raum $\mathcal{W}_1 \times \mathcal{W}_2 \times \mathcal{L}$ gegen die Lösung $[v_1, v_2, v_3]$ von (2).

Beweis: Die Behauptung des Satzes folgt unmittelbar aus Lemma 4 und den Fixpunktsatz von Banach.

Bemerkung 2. Kombinieren wir das Iterationsverfahren (28) mit dem Galerkinverfahren , so entsteht das sogenannte Projektions-Iterationsverfahren, dessen Konvergenz ähnlich wie in [4] gezeigt werden kann.

L i t e r a t u r

[1] BREZIS H.: Operateurs maximaux monotones et semigroupes de contractions dans les espaces de Hilbert, North Holland Mathematics Studies 5(1973)

[2] GAJEWSKI H., GRÖGER K., ZACHARIAS K.: Nichtlineare Operatorgleichungen und Operatordifferentialgleichungen, Akademie-Verlag, Berlin 1974

[3] GAJEWSKI H., GRÖGER K.: Ein Iterationsverfahren für Gleichungen mit einem maximal monotonen und einem stark monotonen Lipschitz-stetigen Operator, Math. Nachr. 68(1975), 307-317

[4] STEUDEL R.: Iterative Lösung eines nichtlinearen Operatordifferentialgleichungssystems und ihre Anwendung auf Modell biporöser Systeme, Dissertation, Magdeburg 1979

[5] STEUDEL R.: Mathematische Behandlung eines Desorptions-

modells für biporöse Systeme, Comment. Math. Univ. Carolinae 21(1980), 605 -618

[6] ZEIDLER E.: Vorlesungen über nichtlineare Funktionalanalysis III - Variationsmethoden und Optimierung- Teubnerverlag, Leipzig 1978.

Technische Hochschule "Otto von Guericke"
Sektion Mathematik und Physik
Boleslaw-Bierut-Platz 5, 301 Magdeburg
PSF 124 - D D R

(Oblatum 18.10. 1979)