I. I. Guran

Топология бесконечной симметрической групы и уплотнения

Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae, Vol. 22 (1981), No. 2, 311--316

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/106077

COMMENTATIONES MATHEMATICAE UNIVERSITATIS CAROLINAE
22,2 (1981)

ТОПОЛОГИЯ БЕСКОНЕЧНОЙ СИММЕТРИЧЕСКОЙ ГРУППЫ И УПЛОТНЕНИЯ

И.И. ГУРАН

Резюме: Для каждого кардинала $\tau \geq \aleph_0$ построен пример топологической группы, которая не топологически изоморфна никакой подгруппе произведения групп псевдохарактера не больше τ.

Ключевые слова и фразы: τ-представимая группа, бесконечная симметрическая группа, свободная топологическая группа, псевдохарактер.

Классификация: 22A09

Все рассматриваемые топологические группы предполагаются отделимыми.

Пусть $(X, \mathcal{T})$ - топологическое пространство и $A \subset X$. Через $\psi(A, X)$ обозначим псевдохарактер подмножества A в $(X, \mathcal{T})$ т.е.

$$\psi(A, X) = \min\{\tau : A = \bigcap \mathcal{U},\ \mathcal{U} \subset \mathcal{T},\ |\mathcal{U}| \leq \tau\}.$$

Если для каждого $x \in X$, $\psi(\{x\}, X) \leq \tau$, то мы пишем $\psi(X) \leq \tau$. Следующие понятия были введены А.В. Архангельским в работе [1].

1. Определение. Топологическая группа G называется τ-тонкой, если $\psi(G) \leq \tau$, и τ-представимой, если G топологически изоморфна подгруппе прямого произведения некоторого семейства τ-тонких групп.

Обозначим через $\mathcal{C}$ класс всех бесконечных кардиналов и для каждого $\tau \in \mathcal{C}$ через $R(\tau)$ - класс всех τ-представимых топологических групп. Очевидно, $R(\tau) \subseteq R(\mu)$ при $\tau \leq \mu$, и $\mathcal{G} = \cup\{R(\tau): \tau \in \mathcal{C}\}$ - класс всех топологических групп. Возникает естественный вопрос:

Существует ли такой кардинал $\tau \in \mathcal{C}$, что $R(\tau) = \mathcal{G}$? В частности,

Существуют ли не $\aleph_0$-представимые топологические группы? Последний вопрос был поставлен в работе [1] А.В. Архангельским. Следующие ниже пример и теорема 1 дают исчерпывающие ответы на эти вопросы.

2. <u>Определение</u>. Группа G называется топологически простой, если она не содержит нетривиальных замкнутых нормальных делителей.

<u>Лемма</u>. Пусть G - топологически простая группа и $\psi(G) > \tau$. Тогда $G \notin R(\tau)$.

<u>Доказательство</u>. Предположим, что группа G топологически изоморфна некоторой подгруппе произведения $H = \Pi\{H_\alpha : \alpha \in A\}$ топологических групп H_α таких, что $\psi(H_\alpha) \leq \tau$ для каждого $\alpha \in A$. Очевидно, можно считать, что $G \subseteq H$ и $\pi_\alpha G = H_\alpha$ для всех индексов $\alpha \in A$, где через π_α обозначена проекция $\pi_\alpha : H \longrightarrow H_\alpha$, являющаяся открытым гомоморфизмом группы H на группу H_α. Рассмотрим замкнутые нормальные подгруппы $\pi_\alpha^{-1}(e_\alpha)$ в группе H, где e_α - единица группы H_α. В силу топологической простоты группы G возможны два случая:

1. $\pi_\alpha^{-1}(e_\alpha) \cap G = G$, для некоторых индексов $\alpha \in A$.

2. $\pi_\alpha^{-1}(e_\alpha) \cap G = \{e_G\}$, где через e_G обозна-

чена единица группы G.

Условие 1. не может выполняться для всех индексов $\alpha \in A$. Действительно, тогда бы выполнялось равенство

$$\cap\{\pi_\alpha^{-1}(e_\alpha) \cap G : \alpha \in A\} = G.$$

Однако, $\cap\{\pi_\alpha^{-1}(e_\alpha) : \alpha \in A\} = \{e_G\}$. Следовательно, существует индекс $\alpha_0 \in A$ такой, что $\pi_{\alpha_0}^{-1}(e_{\alpha_0}) \cap G = \{e_G\}$. Значит проекция π_{α_0} - мономорфизм. Из непрерывности π_{α_0} следует, что π_{α_0} - уплотнение. Поэтому $\psi(G) \leq \tau$. Полученное противоречие завершает доказательство леммы.

Итак, если мы построим для каждого кардинала $\tau \geq \aleph_0$ топологически простую группу G псевдохарактера большего τ, то G - не τ - представимая топологическая группа.

<u>Пример</u>. Пусть X - бесконечное дискретное пространство. Через $S(X)$ обозначим группу биективных отображений f пространства X на себя таких, что $|supp\, f| < \aleph_0$, где $supp\, f = \{x \in X : f(x) \neq x\}$. $S(X)$ называется бесконечной симметрической группой пространства X. Легко видеть, что тихоновская топология произведения

$X^X = \Pi\{X_x : x \in X\}$, где $X_x = X$ для всех $x \in X$,

индуцирует на группе $S(X)$ групповую топологию. Рассмотрим группу $S(X)$ в этой топологии. Базисными окрестностями U_F единицы $e \in S(X)$ являются множества вида:

$U_F = \{f \in S(X) : f(x) = x$ при $x \in F$, где F - некоторое произвольное конечное подмножество в пространстве $X\}$.

Покажем, что $\psi(S(X)) = |X|$. Как всегда $\psi(S(X)) \leq$ $\leq |S(X)| \leq |X|$. Докажем обратное неравенство. Пусть $\{\mathcal{U}_\alpha : \alpha \in A\}$ - семейство открытых множеств группы $S(X)$ таких, что $\cap\{\mathcal{U}_\alpha : \alpha \in A\} = \{e\}$. Тогда для каждого $\alpha \in A$

существует конечное подмножество $F_\alpha \subset X$ такое, что $\mathcal{U}_{F_\alpha} \subset$ $\subset \mathcal{U}_\alpha$. Поэтому $\bigcap\{\mathcal{U}_{F_\alpha} : \alpha \in A\} = \{e\}$ и

$$\bigcap\{\mathcal{U}_{\{x\}} : x \in \bigcup\{F_\alpha : \alpha \in A\}\} = \{e\}.$$

Следовательно, $|X \setminus \bigcup\{F_\alpha : \alpha \in A\}| \leq 1$. Из конечности множеств F_α следует, что $|A| \geq |X|$, т.е. $\psi(S(X)) \geq |X|$. Итак, $\psi(S(X)) = |X|$.

Топологическая простота группы $S(X)$ следует из того, что группа $S(X)$ содержит лишь одну нетривиальную нормальную подгруппу (см. [2]) - таковой является подгруппа

$$A(X) = \{f \in S(X) : |supp\, f| \in 2\mathbb{Z}\}$$

четных перестановок. Проверим, что $A(X)$ - всюду плотная подгруппа в $S(X)$. Пусть $s \in S(X)$ и $s \cdot \mathcal{U}_F$ - окрестность элемента s в $S(X)$. Выберем такое конечное подмножество $F_1 \subset X$, что $supp\, s \subset F_1$ и $s \cdot \mathcal{U}_{F_1} \subset s\, \mathcal{U}_F$. Элемент s представляется произведением транспозиций $s_1, s_2, \dots, s_\ell$, для некоторого $\ell \in \mathbb{N}$. Если $\ell \in 2\mathbb{Z}$, то все доказано. Пусть $\ell \notin 2\mathbb{Z}$ (Под транспозицией мы понимаем такой элемент $f \in S(X)$, что $|supp\, f| = 2$). Пусть $s_{\ell+1}$ такая транспозиция, что $(supp\, s_{\ell+1}) \subset X \setminus F_1$. Тогда элемент $\hat{s} \in S(X)$, определяемый $\hat{s} = s_1 \circ s_2 \circ \dots \circ s_\ell \circ s_{\ell+1}$ принадлежит подгруппе $A(X)$. Однако, $\hat{s} \in s \cdot \mathcal{U}_{F_1} \subset s \cdot \mathcal{U}_F$. Поэтому $\hat{s} \in s \cdot \mathcal{U}_F \cap A(X)$. Так как в любой окрестности $\mathcal{U}$ элемента s содержится окрестность вида $s \cdot \mathcal{U}_F$ при соответствующем выборе конечного подмножества $F \subset X$, то $A(X)$ всюду плотная подгруппа в $S(X)$. Итак, если $|X| > \tau$, то группа $S(X)$ не τ - представима.

<u>**Теорема 1.**</u> Топологическая группа G τ - представима тогда и только тогда, когда в каждой окрестности $\mathcal{U}$ единицы

группы G содержится замкнутый нормальный делитель $\mathcal{N}$ такой, что $\psi(\mathcal{N}, G) \leq \tau$.

Доказательство. Необходимость. Очевидно, можно считать, что G - подгруппа произведения $L = \Pi\{G_\alpha : \alpha \in A\}$, где $\psi(G_\alpha) \leq \tau$ для всех $\alpha \in A$.

Существует стандартная окрестность W единицы такая, что

$$W = W_{\alpha_1} \times \ldots \times W_{\alpha_m} \times \Pi\{G_\beta : \beta \in A \setminus \{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\}\} \subset L$$

и $e \in W \cap G \subset U$. Подгруппа

$$H = \{e_{\alpha_1}\} \times \ldots \times \{e_{\alpha_m}\} \times \Pi\{G_\beta : \beta \in A \setminus \{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\}\}$$

замкнута и нормальна в L. Ясно также, что $\psi(H, L) \leq \tau$. Значит, $H \cap G$ замкнутая нормальная подгруппа в G, $H \cap G \subset W \cap G$ и $(H \cap G, G) \leq \tau$.

Достаточность доказана в ([1], Предложение 1). Теорема доказана.

Заметим, что в силу Леммы, если G - топологически простая группа и $\psi(G) > \aleph_0$, то G не уплотняется топологически изоморфно на $\aleph_0$ - представимую топологическую группу. Однако, если $F(X)$ - свободная топологическая группа [3] пространства X, то справедлива

Теорема 2. Для любого вполне регулярного пространства X группа $F(X)$ изоморфно уплотняется на подгруппу произведения некоторого семейства групп со счетной базой.

Доказательство. Обозначим через $\mathcal{F}$ семейство всех непрерывных функций на пространстве X. Если $f \in \mathcal{F}$, то определяем $\mathbb{R}_f = \{f(x) : x \in X\} \subseteq \mathbb{R}$. Известно [3], что если ρ - метрика на пространстве (X, ρ), то ее можно продолжить до метрики $\hat{\rho}$ на всей свободной группе $F(X)$ так, что $\hat{\rho}|_X = \rho$ и вес пространства $(F(X), \hat{\rho})$ не превосходит веса (X, ρ). Обозначим через $F_{\hat\rho}(\mathbb{R}_f)$ свободную группу пространства $\mathbb{R}_f$ с топологией, индуцированной метрикой $\hat\rho$. Поскольку всякая непрерывная функция $f: X \to \mathbb{R}$ продолжается до непрерывного гомоморфизма $\hat f: F(X) \to F_{\hat\rho}(\mathbb{R}_f)$, то рассмотрим диагональное произведение:

$$f_0 = \Delta\{\hat f : f \in \mathcal{F}\}, \quad f_0 : F(X) \to \Pi\{F_{\hat\rho}(\mathbb{R}_f) : f \in \mathcal{F}\}.$$

Легко видеть, что f_0 - алгебраический изоморфизм группы $F(X)$ на группу $f_0(F(X))$. Определим на $F(X)$ индуцированную из $\Pi\{F_{\hat\rho}(\mathbb{R}_f) : f \in \mathcal{F}\}$ топологию. Обозначим ее через $\mathcal{T}_0$. Тогда, очевидно, тождественное отображение $i: F(X) \to (F(X), \mathcal{T}_0)$ непрерывно. Теорема доказана.

Вопрос. Описать класс пространств, свободная топологическая группа которых $\aleph_0$ - представима.

В заключение автор выражает благодарность профессору А.В. Архангельскому за постановку задач и полезные обсуждения а также профессору М. Хушеку за внимание к работе.

Литература

[1] А.В. АРХАНГЕЛЬСКИЙ: Кардинальные инварианты топологических групп. Вложения и уплотнения, Доклады АН СССР, 247(1979), 779-782.

[2] A. KARRAS, D. SOLITAR: Some remarks on the infinite symmetric groups, Math. Zeitschrift 66(1956), 64-69.

[3] М.И. ГРАЕВ: Свободные топологические группы, Известия АН СССР, сер. матем. 12(1948), 279-324.

Мех.-мат. факультет МГУ, Москва В-234, С С С Р

(Oblatum 24.4. 1980)