Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae

Osvald Demuth

О псевдодифференцируемости равномерно непрерывных конструктивных функций по функциям того же типа

Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae, Vol. 22 (1981), No. 3, 497--512

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/106092`

COMMENTATIONES MATHEMATICAE UNIVERSITATIS CAROLINAE
22,3 (1981)

О ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТИ РАВНОМЕРНО НЕПРЕРЫВНЫХ КОНСТРУКТИВНЫХ ФУНКЦИЙ ПО ФУНКЦИЯМ ТОГО ЖЕ ТИПА

О. ДЕМУТ (O. DEMUTH)

Содержание: В статье исследуются свойства верхних и нижних псевдопроизводных [O]-равномерно непрерывных [O]-функций по [O]-функциям того же типа.

Ключевые слова: Арифметическое действительное число, [O]-конструктивная функция действительной переменной, производные Дини функции по функции, псевдодифференцируемость.

Classification: 03F65, 26A24

Настоящая статья посвящена основным вопросам конструктивного варианта теории дифференцируемости функций по функциям, которая используется в теории интеграла Перрона-Стилтьеса. Основные классические результаты из этой области содержатся в "Теории интеграла" С. Сакса [1]. В статье показано, что на основании [4] можно для [O]-равномерно непрерывных [O]-функций и для арифметических действительных чисел - даже для [O]-КДЧ (т.е. рекурсивных действительных чисел) - получить результаты сравнимые с классическими, в частности, аналог теоремы Данжуа о производных числах.

В следующем мы пользуемся определениями и обозначениями из [2] и [4], в частности, переменными, перечисленными в [4].

Для любого арифметического действительного числа (АДЧ)

P мы посредством h_P обозначим [0]-отображение ([2]) такое, что для всякого АДЧ X выполнено

$$h_P(X) \simeq P \cdot max(0, min(X, 1)).$$

Возрастающие всюду определенные [0]-равномерно непрерывные [0]-конструктивные функции действительной переменной ([0]-КФДП), значения которых содержатся в сегменте $0 \triangle 1$, мы будем называть [0]-КФДП типа А. [0]-отображения, являющиеся для всякого НЧ m операторами типа $(D^{[m]} \longrightarrow D^{[m]})$, мы будем называть [0]-КФДП типа В.

Согласно замечанию 5.4 из [2] для всякой всюду определенной псевдоравномерно непрерывной [0]-КФДП $\mathcal{F}$ существует [0]-КФДП $\mathcal{G}$ типа В такая, что $\forall x^{[0]}(\mathcal{F}(x^{[0]}) = \mathcal{G}(x^{[0]}))$ и, следовательно, если $\mathcal{F}$ [0]-функция (см. [4]), то $\mathcal{G}$ также [0]-функция и $\forall X(\mathcal{G}(X) = Op[\mathcal{F}](X))$ (теорема 4.1 из [2]).

Определения. Пусть $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ псевдоравномерно непрерывные [0]-функции и X АДЧ.

1) Мы определим

$$Reg(\mathcal{F}, X) \rightleftharpoons \neg \exists m i (0 \leq i \leq 1 \,\&\, \forall Y((Y-X)\cdot(Y-X+(-1)^i \cdot 2^{-m}) \leq$$
$$\leq 0 \supset Op[\mathcal{F}](Y) = Op[\mathcal{F}](X))),$$

$$Incr(\mathcal{F}, X) \rightleftharpoons \neg\neg \exists m \forall Y(0 < |Y-X| \leq 2^{-m} \supset$$
$$0 < (Y-X)\cdot(Op[\mathcal{F}](Y) - Op[\mathcal{F}](X))),$$

$$Decr(\mathcal{F}, X) \rightleftharpoons Incr(-\mathcal{F}, X)$$

(Op - см. [4]).

2) Для всякого АДЧ Y мы посредством $\theta(\mathcal{F}, \mathcal{G}, X, Y)$ обозначим выражение

$$\frac{Op[\mathcal{F}](Y) - Op[\mathcal{F}](X)}{Op[\mathcal{G}](Y) - Op[\mathcal{G}](X)} \qquad (1)$$

причем, если знаменатель (1) равен нулю, а числитель положителен (соотв. отрицателен), то мы будем считать, что $\theta(\mathcal{F},\mathcal{G},X,Y)$ принимает значение $+\infty$ (соотв. $-\infty$).

<u>Замечание 1</u>. Пусть $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ псевдоравномерно непрерывные [0]-функции и X и Z АДЧ.

1) Мы напомним, что псевдопроизводными мы называем производные в классическом (т.е. неэффективном) смысле. Что касается односторонних и двусторонних псевдопроизводных $\mathcal{F}$ по $\mathcal{G}$ в точке X, мы пользуемся определениями, приведенными в [1], стр. 108, причем учитываются значения $\theta(\mathcal{F},\mathcal{G},X,Y)$ только в тех АДЧ Y, для которых или числитель или знаменатель (1) не равен нулю.

2) Легко показать, что существуют $\emptyset^{(\omega)}$-отображения

$$\underline{D}[\mathcal{F},\mathcal{G}],\ \overline{D}[\mathcal{F},\mathcal{G}],\ \underline{D}^{-}[\mathcal{F},\mathcal{G}],\ \overline{D}^{-}[\mathcal{F},\mathcal{G}],\ \underline{D}^{+}[\mathcal{F},\mathcal{G}],\ \overline{D}^{+}[\mathcal{F},\mathcal{G}], \tag{2}$$

являющиеся для всякого НЧ n операторами типа $(\mathfrak{D}^{[n]} \longrightarrow {}^{*}\mathfrak{D}^{[n+2]})$ такими, что для любого $[n]$-КДЧ $x^{[n]}$, для которого верно $\mathrm{Reg}(\mathcal{G},x^{[n]})$, значения (2) в $x^{[n]}$ являются соответственно значениями нижней, верхней, левой нижней, левой верхней, правой нижней и правой верхней псевдопроизводной $\mathcal{F}$ по $\mathcal{G}$ в точке $x^{[n]}$.

3) Мы определим

$$D_{\text{кл}}(\mathcal{F}|\mathcal{G},X) \rightleftharpoons (\mathrm{Reg}(\mathcal{G},X) \,\&\, -\infty < \underline{D}[\mathcal{F},\mathcal{G}](X) = \overline{D}[\mathcal{F},\mathcal{G}](X) < +\infty),$$

$$D_{\text{кл}}(Z,\mathcal{F}|\mathcal{G},X) \rightleftharpoons (D_{\text{кл}}(\mathcal{F}|\mathcal{G},X) \,\&\, \underline{D}[\mathcal{F},\mathcal{G}](X) = Z)$$

и заметим, что $\forall n\, x^{[n]}(D_{\text{кл}}(\mathcal{F}|\mathcal{G},x^{[n]}) \supset \exists y^{[n+1]} D_{\text{кл}}(y^{[n+1]},\mathcal{F}|\mathcal{G},x^{[n]}))$.

Следующая теорема является конструктивным аналогом теоремы 5.2 из [1], стр. 273.

Теорема 1. Пусть $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ [0]-равномерно непрерывные [0]-функции. Тогда существует возрастающая всюду определенная [0]-равномерно непрерывная [0]-КФДП $\mathcal{H}$ такая, что $0 \leq \mathcal{H} \leq 1$ и для всякого АДЧ X, $\neg D_{кл}(+\infty, \mathcal{H}, Cp[\mathcal{G}](X))$, верно

1) $0 < X < 1 \,\&\, Reg(\mathcal{G}, X) \,\&\, \neg\neg(\underline{D}[\mathcal{F},\mathcal{G}](X) = -\infty \,\&$

$\overline{D}[\mathcal{F},\mathcal{G}](X) = +\infty \vee -\infty < \underline{D}[\mathcal{F},\mathcal{G}](X) = \overline{D}[\mathcal{F},\mathcal{G}](X) < +\infty)$;

2) если

(3) $$\neg\neg\exists m\, \forall Y (|Y - X| \leq 2^{-m} \,\&\, Op[\mathcal{G}](Y) = Op[\mathcal{G}](X) \supset \supset Y = X),$$

то $\neg\neg(Incr(\mathcal{G}, X) \vee Decr(\mathcal{G}, X))$ и не может не иметь место одна из следующих четырех возможностей:

а) выполнено

(4) $$\underline{D}^-[\mathcal{F},\mathcal{G}](X) = \overline{D}^-[\mathcal{F},\mathcal{G}](X) = \underline{D}^+[\mathcal{F},\mathcal{G}](X) = \overline{D}^+[\mathcal{F},\mathcal{G}](X)$$

и

(5) $$-\infty < \underline{D}^-[\mathcal{F},\mathcal{G}](X) < +\infty ;$$

б) выполнено

(6) $$\underline{D}^-[\mathcal{F},\mathcal{G}](X) = -\infty \,\&\, \overline{D}^+[\mathcal{F},\mathcal{G}](X) = +\infty \,\&\, \overline{D}^-[\mathcal{F},\mathcal{G}](X) = \underline{D}^+[\mathcal{F},\mathcal{G}](X)$$

и

(7) $$-\infty < \underline{D}^+[\mathcal{F},\mathcal{G}](X) < +\infty ;$$

в) выполнено

(8) $$\overline{D}^-[\mathcal{F},\mathcal{G}](X) = +\infty \,\&\, \underline{D}^+[\mathcal{F},\mathcal{G}](X) = -\infty \,\&\, \underline{D}^-[\mathcal{F},\mathcal{G}](X) = \overline{D}^+[\mathcal{F},\mathcal{G}](X)$$

и (5);

г) выполнено

(9) $$\underline{D}^-[\mathcal{F},\mathcal{G}](X) = \underline{D}^+[\mathcal{F},\mathcal{G}](X) = -\infty \,\&\, \overline{D}^-[\mathcal{F},\mathcal{G}](X) = \overline{D}^+[\mathcal{F},\mathcal{G}](X) = +\infty .$$

Доказательство. Мы можем без ограничения общности предположить, что $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ являются [0]-функциями типа В и что $0 < \langle I, \mathcal{G} \rangle (0 \Delta 1) \leq \langle S, \mathcal{G} \rangle (0 \Delta 1) < 1$ (см. [4]). Существует возрастающая [0]-последовательность НЧ $\{m_p\}_p^{[0]}$ такая, что

$$1 \leq m_1 \,\&\, \forall p\, x^{[0]} y^{[0]} (|x^{[0]} - y^{[0]}| \leq 2^{-m_p} \supset$$
$$\supset |\mathcal{F}(x^{[0]}) - \mathcal{F}(y^{[0]})| < 2^{-p}) .$$

Пусть $\{U_q\}_q^{[0]}$ пересчет всех (конечных) систем натуральных чисел.

I) Пусть L диадически рациональный сегмент, $L \subseteq 0 \Delta 1$,

$$l_0 \rightleftharpoons \mu l (\exists i j (\partial_л (L) = i \cdot 2^{-m_l} \,\&\, \partial_п (L) = j \cdot 2^{-m_l}))$$

и пусть для всех НЧ k и p $Q_{k,p} \rightleftharpoons \frac{p-1}{2^{m_{l_0}+k}} \Delta \frac{p}{2^{m_{l_0}+k}}$.

Мы заметим, что

(10) $\forall k p n y^{[n]} (y^{[n]} \in \langle \sigma, \mathcal{G} \rangle (Q_{k,p}) \supset \exists x^{[n+1]} (x^{[n+1]} \in$
$\in Q_{k,p} \,\&\, \mathcal{G}(x^{[n+1]}) = y^{[n]}))$.

Существует [0]-последовательность систем [0]-КДЧ $\{\{z_i^k\}_{i=0}^{\tau_k}\}_k^{[0]}$, для которой выполнено

$$\forall k x^{[0]} (\exists i (0 \leq i \leq \tau_k \,\&\, x^{[0]} = z_i^k) \equiv \exists p (Q_{k,p} \subseteq L \,\&$$
$$\& (x^{[0]} = \langle I, \mathcal{G} \rangle (Q_{k,p}) \vee x^{[0]} = \langle S, \mathcal{G} \rangle (Q_{k,p})))) .$$

Легко построить [0]-последовательность [0]-последовательностей дизъюнктных [0]-сегментов, содержащихся в $0 \Delta 1$, $\{\{H_p^m\}_p^{[0]}\}_m^{[0]}$ такую, что для всякого НЧ m $\{H_p^m\}_p^{[0]}$ $S_\sigma^{[0]}$-множество (см. [2], стр. 58) меры меньшей чем 2^{-m}, $\partial_л (H_0^m) = 0 \,\&\, \partial_п (H_1^m) = 1 \,\&\, \forall k i (0 \leq i \leq \tau_k \supset \exists p (z_i^k \in$ $\in (H_p^m)^0)) \,\&\, \forall a \exists p (\mathcal{G}(a) \in (H_p^m)^0)$.

Согласно лемме 1.16 из [3] существует возрастающая на $0 \Delta 1$ [0]-функция $\overline{\psi}_L$ такая, что $\overline{\psi}_L(0) = 0$ & $\overline{\psi}_L(1) = 1$ &
$\forall X (0 < X < 1$ & $\forall m \neg\neg \exists p (X \in H_p^m) \supset D_{K\lambda}(+\infty, \overline{\psi}_L, X))$.

Для всяких НЧ m и p мы определим

$$w_p^m \rightleftharpoons \frac{1}{2} \cdot (\mathfrak{Э}_\lambda(H_p^m) + \mathfrak{Э}_m(H_p^m)), \quad K_{p,0}^m \rightleftharpoons \mathfrak{Э}_\lambda(H_p^m) \Delta w_p^m$$

и $\quad K_{p,1}^m \rightleftharpoons w_p^m \Delta \mathfrak{Э}_m(H_p^m)$.

Пусть для любых АДЧ P , [0]-сегмента H и НЧ k и q

$M(P,k) \rightleftharpoons \neg \exists i (0 \le i \le \tau_k$ & $P = z_i^k)$,

$N(H,k) \rightleftharpoons \neg \exists i (0 \le i \le \tau_k$ & $z_i^k \in H)$,

$\sigma(q, P, k) \rightleftharpoons \forall \ell (\ell \in U_q \equiv (Q_{k,\ell} \subseteq L$ & $\neg\neg(\neg(P \in \langle \sigma, G \rangle (L)) \vee$
$P \in \langle \sigma, G \rangle (Q_{k,\ell}))))$,

$\lambda(q, H, k) \rightleftharpoons \forall \ell (\ell \in U_q \equiv (Q_{k,\ell} \subseteq L$ & $\neg\neg(\neg(H \subseteq \langle \sigma, G \rangle (L)) \vee$
$\neg(\langle \sigma, G \rangle (Q_{k,\ell}) \cap H = \emptyset))))$,

$\mathcal{I}(q,k) \rightleftharpoons \min_{\ell \in U_q} \langle I, \mathcal{F} \rangle (Q_{k,\ell}), \; \mathcal{S}(q,k) \rightleftharpoons \max_{\ell \in U_q} \langle S, \mathcal{F} \rangle (Q_{k,\ell})$.

1) Мы заметим, что для всяких НЧ k_0 , k_1 , q_0 и q_1 , АДЧ P и [0]-сегмента H , для которых выполнено $k_0 < k_1$ & $(\sigma(q_0, P, k_0)$ & $\sigma(q_1, P, k_1) \vee \lambda(q_0, H, k_0)$ & $\lambda(q_1, H, k_1))$, имеет место $0 \le \mathcal{I}(q_1, k_1) - \mathcal{I}(q_0, k_0) \le 2^{-\ell_0 - k_0}$ &
$0 \le \mathcal{S}(q_0, k_0) - \mathcal{S}(q_1, k_1) \le 2^{-\ell_0 - k_0}$.

Для любых НЧ m и k , $[m]$-КДЧ $y^{[m]}$, [0]-КДЧ $x^{[0]}$ и [0]-сегмента H таких, что $M(x^{[0]}, k)$ & $M(\mathfrak{Э}_\lambda(H), k)$ & & $M(\mathfrak{Э}_m(H), k)$, существуют НЧ q и $\overline{q}$ и $[m+1]$-последовательность НЧ $\{t_p\}_p^{[m+1]}$, для которых выполнено $\sigma(q, x^{[0]}, k)$ & $\lambda(\overline{q}, H, k)$ & $\forall p \, \sigma(t_p, y^{[m]}, p)$ и, следовательно, $(y^{[m]} \in H \supset U_{t_k} \subseteq U_{\overline{q}}$ & $(N(H,k) \supset U_{t_k} = U_{\overline{q}}))$ и $[m+1]$-последовательности [0]-КДЧ $\{\mathcal{I}(t_p, p)\}_p^{[m+1]}$ и $\{\mathcal{S}(t_p, p)\}_p^{[m+1]}$ [0]-сходятся.

2) Ввиду 1) существуют $[0]$-отображения $\mathcal{I}_L$, $\mathcal{S}_L$, $\mathcal{U}_I$ и $\mathcal{U}_S$, обладающие следующими свойствами.

а) $\mathcal{I}_L$ и $\mathcal{S}_L$ являются для всякого НЧ n $[0]$-операторами типа $(D^{[n]} \longrightarrow D^{[n+1]})$, причем для любого $[n]$-КДЧ $y^{[n]}$ верно: если $\neg(y^{[n]} \in \langle \mathcal{O}, \mathcal{G} \rangle(L))$, то $\mathcal{I}_L(y^{[n]}) = \langle I, \mathcal{F} \rangle(L)$ & $\mathcal{S}_L(y^{[n]}) = \langle S, \mathcal{F} \rangle(L)$,

а если $y^{[n]} \in \langle \mathcal{O}, \mathcal{G} \rangle(L)$, то $\mathcal{I}_L(y^{[n]})$ (соотв. $\mathcal{S}_L(y^{[n]})$) является инфимумом (соотв. супремумом) множества АДЧ $\wedge Y(\neg\neg \exists X(X \in L \,\&\, \mathcal{G}(X) = y^{[n]} \,\&\, \mathcal{F}(X) = Y))$ (см. (10)). Следовательно,

(11) $0 \leq \mathcal{S}_L - \mathcal{I}_L \,\&\, \forall X(X \in L \supset \mathcal{I}_L(\mathcal{G}(X)) \leq \mathcal{F}(X) \leq \mathcal{S}_L(\mathcal{G}(X)))$.

Кроме того $\forall x^{[0]}(\forall k M(x^{[0]}, k) \supset \exists y^{[0]}(\mathcal{I}_L(x^{[0]}) = y^{[0]}))$ и для всяких НЧ k и $[0]$-сегмента H таких, что $N(H, k)$, $\forall n\, x_0^{[n]} x_1^{[n]} (x_0^{[n]} \in H \,\&\, x_1^{[n]} \in H \supset |\mathcal{I}_L(x_0^{[n]}) - \mathcal{I}_L(x_1^{[n]})| \leq 2^{-\ell_0 - k})$.

Ввиду (10) и леммы 5.9 из [2] верно

(12) $\forall n\, y^{[n]}(y^{[n]} \in \langle \mathcal{O}, \mathcal{G} \rangle(L) \supset \exists x^{[n+3]}(x^{[n+3]} \in L \,\&$
$\mathcal{G}(x^{[n+3]}) = y^{[n]} \,\&\, \mathcal{F}(x^{[n+3]}) = \mathcal{I}_L(y^{[n]})))$.

Аналогичными свойствами обладает и $\mathcal{S}_L$.

б) Для любого $[0]$-сегмента H такого, что $\forall k(M(\partial_\ell(H), k) \,\&\, M(\partial_n(H), k))$, имеет место $!\,\mathcal{U}_I(H)$ & $!\,\mathcal{U}_S(H)$, $\mathcal{U}_I(H)$ $[0]$-КДЧ, являющееся инфимумом множества АДЧ $\wedge Y(\neg\neg \exists X(X \in H \,\&\, \mathcal{I}_L(X) = Y))$, и $\mathcal{U}_S(H)$ $[0]$-КДЧ, являющееся супремумом множества АДЧ $\wedge Y(\neg\neg \exists X(X \in H \,\&\, \mathcal{S}_L(X) = Y))$.

3) Ввиду выше отмеченных свойств $[0]$-отображений $\mathcal{I}_L$ и $\mathcal{S}_L$ легко показать, что существуют $\emptyset^{(\omega)}$-отображения

(13) $\underline{D}^-[\mathcal{I}_L]$, $\overline{D}^-[\mathcal{I}_L]$, $\underline{D}^+[\mathcal{I}_L]$, $\overline{D}^+[\mathcal{I}_L]$,

(14) $\underline{D}^-[\mathcal{S}_L]$, $\overline{D}^-[\mathcal{S}_L]$, $\underline{D}^+[\mathcal{S}_L]$, $\overline{D}^+[\mathcal{S}_L]$,

являющиеся для всякого НЧ n операторами типа $(D^{[n]} \longrightarrow {}^*D^{[n+3]})$ такими, что для любых $[n]$-КДЧ $x^{[n]}$ и $y^{[n]}$ значения (13) в $x^{[n]}$ и значения (14) в $y^{[n]}$ являются соответственно значениями левых нижних или верхних и правых нижних или верхних псевдопроизводных $\mathcal{I}_L$ в точке $x^{[n]}$ и $\mathcal{S}_L$ в точке $y^{[n]}$.

Для любого АДЧ X мы определим

$$R_L(X) \rightleftharpoons (\mathcal{I}_L(X) = \mathcal{S}_L(X) \& -\infty < \overline{D}^-[\mathcal{I}_L](X) = \underline{D}^+[\mathcal{I}_L](X) < +\infty \& -\infty < \underline{D}^-[\mathcal{S}_L](X) = \overline{D}^+[\mathcal{S}_L](X) < +\infty).$$

Мы заметим, что для всякого АДЧ X такого, что $\mathcal{I}_L(X) = \mathcal{S}_L(X)$, верно $\underline{D}^+[\mathcal{I}_L](X) \leq \underline{D}^+[\mathcal{S}_L](X) \leq \overline{D}^+[\mathcal{S}_L](X) \& \underline{D}^-[\mathcal{S}_L](X) \leq \underline{D}^-[\mathcal{I}_L](X) \leq \overline{D}^-[\mathcal{I}_L](X)$ и, следовательно, $R_L(X) \supset -\infty < \overline{D}^-[\mathcal{I}_L](X) = \underline{D}^+[\mathcal{I}_L](X) = \underline{D}^-[\mathcal{S}_L](X) = \overline{D}^+[\mathcal{S}_L](X) < +\infty$.

4) а) Пусть m НЧ. Ввиду 2) существуют $[0]$-равномерно непрерывная $[0]$-функция $\mathcal{F}_m$ и $[0]$-абсолютно непрерывная $[0]$-функция φ_m такие, что для любого НЧ p $\mathcal{F}_m$ и φ_m линейны на $[0]$-сегментах $K^m_{p,0}$ и $K^m_{p,1}$,

$$\mathcal{F}_m(w^m_p) = \mathfrak{A}_I(H^m_p) \& \varphi_m(w^m_p) = |H^m_p| \& \forall x^{[0]}(\neg \exists n(x^{[0]} \in (H^m_n)^0) \supset \mathcal{F}_m(x^{[0]}) = \mathcal{I}_L(x^{[0]}) \& \varphi_m(x^{[0]}) = 0).$$

Согласно теореме 2 из [4], замечанию 1.2, теореме 1.2 и лемме 1.16 из [3] существуют возрастающие на $0 \vartriangle 1$ $[0]$-функции $\mathcal{H}_m$ и $\overline{\mathcal{H}}_m$ такие, что $\mathcal{H}_m(0) = \overline{\mathcal{H}}_m(0) = 0 \& \mathcal{H}_m(1) = \overline{\mathcal{H}}_m(1) = 1 \& \forall X(0 < X < 1 \supset (\neg D_{кл}(+\infty, \mathcal{H}_m, X) \supset \neg\neg(-\infty < \overline{D}^-[\mathcal{F}_m](X) = \underline{D}^+[\mathcal{F}_m](X) < +\infty \vee \overline{D}^-[\mathcal{F}_m](X) = +\infty \& \underline{D}^+[\mathcal{F}_m](X) = -\infty)) \& (\neg D_{кл}(+\infty, \overline{\mathcal{H}}_m, X) \& \neg \exists p(X \in H^m_p) \supset D_{кл}(0, \varphi_m, X))).$

Легко доказать, что

$$\forall X (0 < X < 1 \,\&\, \neg \exists p (X \in H_p^m) \,\&\, \neg D_{кл}(+\infty, \overline{\mathcal{H}}_m, X) \supset$$
$$\supset \overline{D}^- [\mathcal{F}_m](X) = \overline{D}^- [\mathcal{I}_L](X) \,\&\, \underline{D}^+ [\mathcal{F}_m](X) = \underline{D}^+ [\mathcal{I}_L](X)).$$

б) Пусть $\psi_{L,I}$ [0]-функция такая, что

$\psi_{L,I} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{2^{m+2}} \cdot (\mathcal{H}_m + \overline{\mathcal{H}}_m)$. Тогда $\psi_{L,I}$ возрастающая на $0 \triangle 1$ [0]-функция, $\psi_{L,I}(0) = 0 \,\&\, \psi_{L,I}(1) = 1 \,\&$

$$\forall X (0 < X < 1 \,\&\, \neg\neg \exists m \neg \exists p (X \in H_p^m) \,\&\, \neg D_{кл}(+\infty, \psi_{L,I}, X) \supset$$
$$\neg\neg(-\infty < \overline{D}^- [\mathcal{I}_L](X) = \underline{D}^+ [\mathcal{I}_L](X) < +\infty \vee$$
$$\overline{D}^- [\mathcal{I}_L](X) = +\infty \,\&\, \underline{D}^+ [\mathcal{I}_L](X) = -\infty)).$$

в) Аналогичным способом можно построить возрастающую на $0 \triangle 1$ [0]-функцию $\psi_{L,S}$ такую, что $\psi_{L,S}(0) = 0 \,\&\, \psi_{L,S}(1) =$
$$= 1 \,\&\, \forall X (0 < X < 1 \,\&\, \neg\neg \exists m \neg \exists p (X \in H_p^m) \,\&\, \neg D_{кл}(+\infty, \psi_{L,S}, X) \supset$$
$$\neg\neg(-\infty < \underline{D}^- [\mathcal{S}_L](X) = \overline{D}^+ [\mathcal{S}_L](X) < +\infty \vee$$
$$\underline{D}^- [\mathcal{S}_L](X) = -\infty \,\&\, \overline{D}^+ [\mathcal{S}_L](X) = +\infty)).$$

5) Мы определим $\psi_L \rightleftharpoons \frac{1}{3} \cdot (\overline{\psi}_L + \psi_{L,I} + \psi_{L,S})$. Тогда ψ_L возрастающая на $0 \triangle 1$ [0]-функция, $\psi_L(0) = 0 \,\&\, \psi_L(1) = 1$.

Пусть n НЧ и v $[n]$-КДЧ такое, что $v \in L \,\&$ $\neg D_{кл}(+\infty, \psi_L, \mathcal{G}(v))$, и пусть $w \rightleftharpoons \mathcal{G}(v)$. Тогда $0 < w < 1$, w $[n]$-КДЧ, $\neg\neg \exists m \neg \exists p (w \in H_p^m)$ и, следовательно,

$$(15) \quad \forall k\, M(w, k) \,\&\, \neg \exists a (w = \mathcal{G}(a)) \,\&\, v \in (L)^0 \,\&\, Reg(\mathcal{G}, v).$$

Согласно 3) и 4) не может не иметь место одна из следующих трех возможностей а) - в).

а) Выполнено $\mathcal{I}_L(w) < \mathcal{S}_L(w)$. Тогда ввиду (15) и (12) существуют $[n]$-КДЧ $\overline{v}$ из $(L)^0$ и [0]-последовательность $[n]$-КДЧ $\{y_p\}_p^{[0]}$, для которых выполнено $\mathcal{G}(\overline{v}) = w = \mathcal{G}(v) \,\&$ $\neg(\mathcal{F}(\overline{v}) = \mathcal{F}(v)) \,\&\, \forall p (|\overline{v} - y_p| < 2^{-p} \,\&\, \mathcal{G}(\overline{v}) - 2^{-p} <$ $\mathcal{G}(y_{2p+1}) < \mathcal{G}(\overline{v}) < \mathcal{G}(y_{2p}) < \mathcal{G}(\overline{v}) + 2^{-p})$.

Следовательно,

(16) $\forall q\, \exists XY(X\in L \,\&\, Y\in L \,\&\, \Theta(\mathcal{F},\mathcal{G},v,X) > q \,\&$
$\Theta(\mathcal{F},\mathcal{G},v,Y) < -q)$.

б) Выполнено $\mathcal{J}_L(w)=\mathcal{S}_L(w) \,\&\, \neg\neg(\overline{D}^-[\mathcal{J}_L](w)=+\infty \,\&$
$\underline{D}^+[\mathcal{J}_L](w)=-\infty \vee \underline{D}^-[\mathcal{S}_L](w)=-\infty \,\&\, \overline{D}^+[\mathcal{S}_L](w)=+\infty)$.

Тогда ввиду (12) легко доказать (16).

в) Выполнено $R_L(w)$. Тогда согласно 3) и (11) верно
$-\infty < \underline{D}[\mathcal{F},\mathcal{G}](v)=\overline{D}[\mathcal{F},\mathcal{G}](v)=\underline{D}^+[\mathcal{J}_L](w) < +\infty$.

6) Пусть v и w АДЧ, для которых выполнено $v\in(L)^0 \,\&$
$w=\mathcal{G}(v) \,\&\, \forall k\, M(w,k) \,\&\, \forall X(X\in L \,\&\, \mathcal{G}(X)=w \supset X=v)$.
Тогда, очевидно, $\mathcal{J}_L(w)=\mathcal{S}_L(w) \,\&\, \neg\neg(\mathit{Incr}(\mathcal{G},v) \vee$
$\vee \mathit{Decr}(\mathcal{G},v)) \,\&\, \forall p \neg\neg \exists q \forall X(X\in L \,\&\, |\mathcal{G}(X)-w| < 2^{-q} \supset |X-v| < 2^{-p})$

и, следовательно, ввиду (11) и (12) верно $(\mathit{Incr}(\mathcal{G},v)\supset$
$\supset \overline{D}^-[\mathcal{F},\mathcal{G}](v)=\overline{D}^-[\mathcal{J}_L](w) \,\&\, \underline{D}^+[\mathcal{F},\mathcal{G}](v)=\underline{D}^+[\mathcal{J}_L](w) \,\&\, \underline{D}^-[\mathcal{F},\mathcal{G}](v)=$
$=\underline{D}^-[\mathcal{S}_L](w) \,\&\, \overline{D}^+[\mathcal{F},\mathcal{G}](v)=\overline{D}^+[\mathcal{S}_L](w)) \,\&\, (\mathit{Decr}(\mathcal{G},v)\supset \overline{D}^-[\mathcal{F},\mathcal{G}](v)=$
$=\overline{D}^+[\mathcal{S}_L](w) \,\&\, \underline{D}^+[\mathcal{F},\mathcal{G}](v)=\underline{D}^-[\mathcal{S}_L](w) \,\&\, \underline{D}^-[\mathcal{F},\mathcal{G}](v)=$
$=\underline{D}^+[\mathcal{J}_L](w) \,\&\, \overline{D}^+[\mathcal{F},\mathcal{G}](v)=\overline{D}^-[\mathcal{J}_L](w))$.

II) Пусть $\{L_q\}_q^{[0]}$ пересчет всех диадически рациональных сегментов, содержащихся в $0\triangle 1$, а $\overline{\mathcal{H}}$ $[0]$-КФДП типа А. Согласно I мы для всякого НЧ q построим, исходя от L_q, возрастающую на $0\triangle 1$ $[0]$- функцию ψ_{L_q}, обладающую описанными там свойствами. Пусть

$$\mathcal{H} \rightleftharpoons \Big(\frac{1}{2}\cdot\overline{\mathcal{H}} + \sum_{q=0}^{\infty}\frac{1}{2^{q+2}}\cdot\psi_{L_q}\Big).$$

Тогда $\mathcal{H}$ $[0]$-КФДП типа А. Пусть m НЧ и v и w $[m]$-КДЧ такие, что $\neg D_{K\pi}(+\infty,\mathcal{H},\mathcal{G}(v)) \,\&\, w=\mathcal{G}(v)$. Тогда согласно I 5) верно $0<v<1 \,\&\, \neg\exists a(v=a) \,\&\, Reg(\mathcal{G},v) \,\&\, (\neg\exists q(v \in$ $\in L_q \,\&\, R_{L_q}(w)) \supset \underline{D}[\mathcal{F},\mathcal{G}](v)=-\infty \,\&\, \overline{D}[\mathcal{F},\mathcal{G}](v)=+\infty) \,\&$ $(\neg\neg\exists q(v\in L_q \,\&\, R_{L_q}(w)) \supset -\infty<\underline{D}[\mathcal{F},\mathcal{G}](v)=\overline{D}[\mathcal{F},\mathcal{G}](v)<+\infty)$.

Если дополнительно выполнено $\neg\neg\exists q(v\in(L_q)^0 \,\&$ $\forall X(X\in L_q \,\&\, \mathcal{G}(X)=w \supset X=v))$,

то ввиду I 3 - 6) верно и то, что требуется в части 2 утверждения.

Легко доказать следующее утверждение.

<u>Лемма 1</u>. Пусть $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ и $\mathcal{H}$ псевдоравномерно непрерывные [0]-функции, φ возрастающая на $0\triangle 1$ [0]-функция, $\varphi(0)=0 \,\&\, \varphi(1)=1$, а X и Y АДЧ. Пусть $\mathcal{K}$ любое из выражений

(17) $\underline{D}^-,\ \overline{D}^-,\ \underline{D}^+,\ \overline{D}^+$.

Тогда выполнено

1) $D_{кл}(0,\mathcal{F}|\mathcal{G},X) \,\&\, Reg(\mathcal{F},X) \supset |\mathcal{K}[\mathcal{G},\mathcal{F}](X)|=+\infty$, $D_{кл}(Y,\mathcal{F}|\mathcal{G},X) \,\&\, 0<Y \supset Reg(\mathcal{F},X) \,\&\, \mathcal{K}[\mathcal{H},\mathcal{F}](X)=\frac{1}{Y}\cdot$ $\cdot\mathcal{K}[\mathcal{H},\mathcal{G}](X)$; $D_{кл}(Y,\mathcal{F}|\mathcal{G},X)\equiv D_{кл}(-Y,\mathcal{F}|-\mathcal{G},X)\equiv D_{кл}(-Y,-\mathcal{F}|\mathcal{G},X)$;

2) $Reg(\mathcal{G},X)\supset Reg(\mathcal{G}*\varphi^{-1},Op[\varphi](X)) \,\&$ $\mathcal{K}[\mathcal{F},\mathcal{G}](X)=\mathcal{K}[\mathcal{F}*\varphi^{-1},\mathcal{G}*\varphi^{-1}](Op[\varphi](X))$.

<u>Замечание 2</u>. Пусть $\mathcal{F}$ [0]-равномерно непрерывная [0]-функция и $\{a_n\triangle b_n\}_n^{[0]}$ пересчет всех рациональных сегментов, содержащихся в $0\triangle 1$. Для всякого НЧ n мы построим неубывающие [0]-функции f_n и φ_n такие, что для любого [0]-КДЧ $x^{[0]}$ выполнено $f_n(x^{[0]})=max(a_n, min(x^{[0]},b_n))$,

$$\varphi_n(x^{[0]})=h_1(x^{[0]})+\langle S,\mathcal{F}\rangle(a_n\triangle f_n(x^{[0]}))-\langle I,\mathcal{F}\rangle(a_n\triangle f_n(x^{[0]}))+$$
$$\langle I,\mathcal{F}\rangle(f_n(x^{[0]})\triangle b_n)-\langle S,\mathcal{F}\rangle(f_n(x^{[0]})\triangle b_n).$$

Для любой неубывающей [0]-функции ψ существует возрастающая на $0 \Delta 1$ [0]-функция φ такая, что

$$\varphi = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+\Delta(\psi, 0\Delta 1)} \cdot (h_1 + \psi - \psi(0)) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+2}} \cdot \frac{1}{\Delta(\varphi_n, 0\Delta 1)} \cdot (\varphi_n - \varphi_n(0)) .$$

Ясно, что $\varphi(0) = 0 \,\&\, \varphi(1) = 1$, φ^{-1} удовлетворяет условию Липшица и для всякого АДЧ X выполнено

$$\neg(\underline{D}^-[\mathcal{F}*\varphi^{-1}](X) = +\infty \vee \overline{D}^-[\mathcal{F}*\varphi^{-1}](X) = -\infty \vee \underline{D}^+[\mathcal{F}*\varphi^{-1}](X) = +\infty \vee \overline{D}^+[\mathcal{F}*\varphi^{-1}](X) = -\infty) \,\&\, (\mathrm{Decr}(\mathcal{F}*\varphi^{-1}, X) \supset -\infty < \underline{D}[\mathcal{F}*\varphi^{-1}](X)) \,\&\, (\mathrm{Incr}(\mathcal{F}*\varphi^{-1}, X) \supset \overline{D}[\mathcal{F}*\varphi^{-1}](X) < +\infty) .$$

<u>**Теорема 2.**</u> Пусть $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ [0]-равномерно непрерывные [0]-функции. Тогда существует возрастающая всюду определенная [0]-равномерно непрерывная [0]-НФДП $\mathcal{H}$ такая, что $0 \le \mathcal{H} \le 1$ и для всякого АДЧ X, для которого верно $\neg D_{K\lambda}(+\infty, \mathcal{H}, \mathrm{Op}[\mathcal{F}](X))$ и

$$(18) \qquad \neg\neg \exists m \forall Y (|Y - X| \le 2^{-m} \,\&\, \mathrm{Op}[\mathcal{G}](Y) = \mathrm{Op}[\mathcal{G}](X) \supset Y = X) \,\&\, \neg \exists a b (a < X < b \,\&\, (\langle I, \mathcal{G}\rangle (a \Delta b) = \mathrm{Op}[\mathcal{G}](X) \vee \langle S, \mathcal{G}\rangle (a \Delta b) = \mathrm{Op}[\mathcal{G}](X))),$$

выполнено $0 < X < 1 \,\&\, \mathrm{Reg}(\mathcal{G}, X) \,\&\, \neg\neg(\mathrm{Incr}(\mathcal{G}, X) \vee \mathrm{Decr}(\mathcal{G}, X))$ и

$$(19) \qquad \neg(\underline{D}^-[\mathcal{F}, \mathcal{G}](X) = 0 \vee \overline{D}^-[\mathcal{F}, \mathcal{G}](X) = 0 \vee \underline{D}^+[\mathcal{F}, \mathcal{G}](X) = 0 \vee \overline{D}^+[\mathcal{F}, \mathcal{G}](X) = 0)$$

и не может не иметь место или (4) или (6) или (8) или (9).

Доказательство. Мы используем замечание 2 и построим, исходя от $\mathcal{F}$ (соотв. от $\mathcal{G}$), [0]-функцию $\varphi_{\mathcal{F}}$ (соотв. $\varphi_{\mathcal{G}}$), обладающую описанными там свойствами. Мы определим

$$\varphi \rightleftharpoons \frac{1}{2} \cdot (\varphi_{\mathcal{F}} + \varphi_{\mathcal{G}}) , \quad \mathcal{F}_1 \rightleftharpoons \mathcal{F} * \varphi^{-1} \quad \text{и} \quad \mathcal{G}_1 \rightleftharpoons \mathcal{G} * \varphi^{-1} .$$

Согласно теореме 2 из [4] осуществима возрастающая на

$0 \Delta 1$ [0]-функция ψ такая, что $\psi(0)=0 \,\&\, \psi(1)=1$ и для всякого АДЧ X, для которого верно $\neg \mathcal{D}_{\kappa\lambda}(+\infty, \psi, \mathcal{O}p[\varphi](X))$ и (18), имеет место $\mathcal{D}_{\kappa\lambda}(\mathcal{G}_1, \mathcal{O}p[\varphi](X))$ (см. замечание 2).

Мы используем теорему 3 из [4] и построим, исходя от $\mathcal{F}_1$ (соотв. от $\mathcal{F}_1 * \psi^{-1}$), [0]-КФДП $\mathcal{H}_0$ (соотв. $\mathcal{H}_1$), обладающую описанными там свойствами.

Мы определим $\mathcal{H} \rightleftharpoons \frac{1}{2}\cdot(\mathcal{H}_0+\mathcal{H}_1)$. Тогда $\mathcal{H}$ [0]-КФДП типа А. Пусть X АДЧ, для которого выполнено
$\neg \mathcal{D}_{\kappa\lambda}(+\infty, \mathcal{H}, \mathcal{O}p[\mathcal{F}](X))$ и (18). Тогда
$0<X<1 \,\&\, \neg\neg(\mathit{Incr}(\mathcal{G}, X) \vee \mathit{Decr}(\mathcal{G}, X)) \,\&\, \mathit{Reg}(\mathcal{G}, X)$.
Определив $Y \rightleftharpoons \mathcal{O}p[\varphi](X)$, мы получаем

(20) $0<Y<1 \,\&\, \neg \mathcal{D}_{\kappa\lambda}(+\infty, \mathcal{H}, \mathcal{O}p[\mathcal{F}_1](Y)) \,\&\, \mathit{Reg}(\mathcal{G}_1, Y) \,\&$
$\neg\neg(\mathit{Incr}(\mathcal{G}_1, Y) \vee \mathit{Decr}(\mathcal{G}_1, Y))$.

Тогда

(21) $\neg(\mathcal{K}[\mathcal{F}_1](Y)=0 \vee \mathcal{K}[\mathcal{F}_1 * \psi^{-1}](\mathcal{O}p[\psi](Y))=0)$,

где $\mathcal{K}$ любое из выражений (17), и не может не быть верной одна из следующих четырех формул

(22) $\mathcal{D}_{\kappa\lambda}(\mathcal{F}_1, Y)$,

(23) $\underline{D}^-[\mathcal{F}_1](Y)=-\infty \,\&\, \overline{D}^+[\mathcal{F}_1](Y)=+\infty \,\&$
$-\infty<\overline{D}^-[\mathcal{F}_1](Y)=\underline{D}^+[\mathcal{F}_1](Y)<+\infty$,

(24) $\overline{D}^-[\mathcal{F}_1](Y)=+\infty \,\&\, \underline{D}^+[\mathcal{F}_1](Y)=-\infty \,\&$
$-\infty<\underline{D}^-[\mathcal{F}_1](Y)=\overline{D}^+[\mathcal{F}_1](Y)<+\infty$,

(25) $\underline{D}^-[\mathcal{F}_1](Y)=\underline{D}^+[\mathcal{F}_1](Y)=-\infty \,\&$
$\overline{D}^-[\mathcal{F}_1](Y)=\overline{D}^+[\mathcal{F}_1](Y)=+\infty$

(см. теорему 3 из [4] и замечание 2) и, следовательно, ввиду (20) выполнено

(26) $\neg\neg(0 \leq \underline{D}[\mathcal{F}_1,\mathcal{G}_1](Y) \vee \overline{D}[\mathcal{F}_1,\mathcal{G}_1](Y) \leq 0 \vee \underline{D}^-[\mathcal{F}_1,\mathcal{G}_1](Y) \leq$
$0 \leq \overline{D}^-[\mathcal{F}_1,\mathcal{G}_1](Y) \vee D^+[\mathcal{F}_1,\mathcal{G}_1](Y) \leq 0 \leq \overline{D}^+[\mathcal{F}_1,\mathcal{G}_1](Y))$.

Пусть, например, имеет место $Incr(\mathcal{G}_1, Y)$. Тогда ввиду замечания 2 и свойств [0]-функции ψ верно

(27) $0 \leq \underline{D}[\mathcal{G}_1](Y) \leq \overline{D}[\mathcal{G}_1](Y) < +\infty$ &

$\neg\neg(D_{кл}(\mathcal{G}_1, Y) \vee D_{кл}(+\infty, \psi, Y))$.

В следующем мы пользуемся частью 2 леммы 1.

Если $D_{кл}(\mathcal{G}_1 | \mathcal{F}_1, Y)$, то согласно части 1 леммы 1 и (26) требуемое выполнено.

Пусть $\neg D_{кл}(\mathcal{G}_1 | \mathcal{F}_1, Y)$. Тогда ввиду (21) и (27) не может иметь место (22).

1) Пусть верно или (23) или (24). Тогда ввиду (27) и (21) выполнено $D_{кл}(\mathcal{G}_1, Y)$.

Если $D_{кл}(0, \mathcal{G}_1, Y)$, то – очевидно – имеет место $|\mathcal{K}[\mathcal{F}_1, \mathcal{G}_1](Y)| = +\infty$, где $\mathcal{K}$ любое из выражений (17), из (23) следует (6), а из (24) следует (8).

Если $\neg D_{кл}(0, \mathcal{G}_1, Y)$, то согласно части 1 леммы 1, (21) и (27) из (23) следует (6) и (19), а из (24) следует (8) и (19).

2) Пусть верно (25). Тогда ввиду (27) и $Incr(\mathcal{G}_1, Y)$ выполнено (9).

В теореме 2 нельзя заменить формулу (18) формулой (3).

Пример. Существует [0]-равномерно непрерывная [0]-функция $\mathcal{G}$ такая, что для любой возрастающей всюду определенной [0]-КФДП $\mathcal{H}$ можно построить [0]-КДЧ $x^{[0]}$ такое, что

$0 < x^{[0]} < 1$ & $\neg D_{кл}(+\infty, \mathcal{H}, x^{[0]})$ & $\exists m \forall Y (0 < |Y - x^{[0]}| \leq 2^{-m} \supset$

$\supset Op[\mathcal{G}](Y) > \mathcal{G}(x^{[0]}))$ & $D_{кл}(0, \mathcal{G}, x^{[0]})$

и, следовательно, $D^-_{кл}(0, \mathcal{G} | h_1, x^{[0]})$ & $Reg(\mathcal{G}, x^{[0]})$ и согласно лемме 1

$\underline{D}^-[h_1, \mathcal{G}](x^{[0]}) = \overline{D}^-[h_1, \mathcal{G}](x^{[0]}) = -\infty$ & $\underline{D}^+[h_1, \mathcal{G}](x^{[0]}) =$

$= \overline{D}^+[h_1, \mathcal{G}](x^{[0]}) = +\infty$.

Замечание 3. Предположение [0]-равномерной непрерывности [0]-функций $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ в теоремах 1 и 2 является существенным. Согласно примеру из [4], стр. 471, существует псевдоравномерно непрерывная [0]-функция $\mathcal{F}$ слабо ограниченной вариации на $0 \Delta 1$ такая, что $0 \leq \mathcal{F} \leq 1$ и для всякого [0]-КДЧ $y^{[0]}$, $0 < y^{[0]} < 1$, не может не существовать [0]-КДЧ $x^{[0]}$, для которого выполнено

$$0 < x^{[0]} < 1 \;\&\; \mathcal{F}(x^{[0]}) = y^{[0]} \;\&\; 0 < \underline{D}^-[\mathcal{F}, h_1](x^{[0]}) < \underline{D}^+[\mathcal{F}, h_1](x^{[0]}) < \overline{D}^-[\mathcal{F}, h_1](x^{[0]}) < \overline{D}^+[\mathcal{F}, h_1](x^{[0]}) < +\infty$$

и, следовательно, $\mathcal{F}$ является [1]-равномерно непрерывной и

$$\mathrm{Reg}(\mathcal{F}, x^{[0]}) \;\&\; 0 < \underline{D}^+[h_1, \mathcal{F}](x^{[0]}) < \underline{D}^-[h_1, \mathcal{F}](x^{[0]}) < \overline{D}^+[h_1, \mathcal{F}](x^{[0]}) < \overline{D}^-[h_1, \mathcal{F}](x^{[0]}) < +\infty .$$

Замечание 4. С помощью классических рассуждений ([1], стр. 277) легко построить $S_{\varepsilon}^{[0]}$-множество $\mathcal{Y}$ меры меньшей чем $\frac{1}{2}$ и [0]-равномерно непрерывную [0]-функцию $\mathcal{G}$ такую, что для всякого АДЧ X, $0 < X < 1 \;\&\; \neg(X \in \mathcal{Y})$, верно

$$\mathcal{O}p[\mathcal{G}](X) = X \;\&\; \underline{D}^-[\mathcal{G}](X) < 0 < \overline{D}^-[\mathcal{G}](X) = 1 = \underline{D}^+[\mathcal{G}](X)$$

и, следовательно,

$$\mathrm{Reg}(\mathcal{G}, X) \;\&\; \underline{D}^-[h_1, \mathcal{G}](X) = -\infty \;\&\; \overline{D}^-[h_1, \mathcal{G}](X) = = +\infty \;\&\; 0 \leq \underline{D}^+[h_1, \mathcal{G}](X) \leq \overline{D}^+[h_1, \mathcal{G}](X) \leq 1 .$$

Литература

[1] SAKS S.: Theory of the Integral, New York 1937.

[2] ДЕМУТ О., КРЫЛ Р., КУЧЕРА А.: Об использовании теории функций частично-рекурсивных относительно числовых множеств в конструктивной математике, Acta Univ. Carolinae - Math. et Physica 19(1978), 15-60.

[3] ДЕМУТ О.: О конструктивном интеграле Перрона, Acta Univ. Carolinae - Math. et Physica 21(1980), 3-57.

[4] ДЕМУТ О.: О конструктивном аналоге теоремы К.М. Гарга о производных числах, Comment. Math. Univ. Carolinae 21(1980), 457-472.

Matematicko-fyzikální fakulta, Universita Karlova,
Malostranské nám. 25, Praha 1, Československo

(Oblatum 23.2. 1981)