Drumi Dimitrov Bajnov; Galina Ch. Sarafova

Об одном применении численно-аналитического метода А. М. Самоиленко для исследования периодических систем интегро-дифференциальных уравнений

Archivum Mathematicum, Vol. 15 (1979), No. 2, 67--80

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/107026`

ARCH. MATH. 2, SCRIPTA FAC. SCI. NAT. UJEP BRUNENSIS
XV: 67—80, 1979

ОБ ОДНОМ ПРИМЕНЕНИИ ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКОГО МЕТОДА А. М. САМОЙЛЕНКО ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ПЕРИОДИЧЕСКИХ СИСТЕМ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Д. Д. БАЙНОВ, Г. Х. САРАФОВА

(Поступило в редакцию 1-го августа 1977)

В настоящей работе изучается вопрос существования и отыскания периодических решений систем интегро-дифференциальных уравнений вида

$$
\frac{dx}{dt} = \lambda x + P\left(t, x, y, \int_0^t \varphi(t, s, x(s), y(s))\,ds\right),
$$

$$
(1)\qquad \frac{dy}{dt} = Q\left(t, x, y, \int_0^t \varphi(t, s, x(s), y(s))\,ds\right), \quad \text{где } \lambda \text{ — действительное число,}
$$

численно-аналитическим методом А. М. Самойленко [1]—[5].

Рассмотрим систему (1). Пусть выполнены следующие условия (A).

A1. Функции $P(t, x, y, z)$, $Q(t, x, y, z)$ и $\varphi(t, s, x, y)$ определены и непрерывны при $t, s \in (-\infty, +\infty)$, $x \in [\alpha, \beta]$, $y \in [\gamma, \delta]$, $z \in [\zeta, \eta]$.

A2. Функции $P(t, x, y, z)$, $Q(t, x, y, z)$ и $\varphi(t, s, x, y)$ — периодические по t, s с периодом T.

Пусть $(x(t), y(t))$ — решение системы (1). Найдем условия при которых $(x(t + T), y(t + T))$ также является решением системы (1). Для этого заменим в тождествах

$$
\frac{dx(t)}{dt} \equiv \lambda x(t) + P\left(t, x(t), y(t), \int_0^t \varphi(t, s, x(s), y(s))\,ds\right),
$$

$$
\frac{dy(t)}{dt} \equiv Q\left(t, x(t), y(t), \int_0^t \varphi(t, s, x(s), y(s))\,ds\right),
$$

t на $t + T$. Получим

$$
\frac{dx(t + T)}{dt} \equiv \lambda x(t + T) + P(t, x(t + T), y(t + T),
$$

$$\int_0^{t+T} \varphi(t, s, x(s), y(s))\,ds) = \lambda x(t+T) + P(t, x(t+T), y(t+T),$$

$$\int_{-T}^{0} \varphi(t, s, x(s+T), y(s+T))\,ds + \int_0^t \varphi(t, s, x(s+T), y(s+T))\,ds) =$$

$$= \lambda x(t+T) + P(t, x(t+T), y(t+T), \int_0^t \varphi(t, s, x(s+T), y(s+T))\,ds +$$

$$+ \int_0^T \varphi(t, s, x(s), y(s))\,ds).$$

Аналогично

$$\frac{dy(t+T)}{dt} \equiv Q(t, x(t+T), y(t+T), \int_0^t \varphi(t, s, x(s+T), y(s+T))\,ds +$$

$$+ \int_0^T \varphi(t, s, x(s), y(s))\,ds).$$

Отсюда следует, что вместе с $(x(t), y(t))$, решением системы (1) будет и $(x(t+T), y(t+T))$, тогда и только тогда, когда

$$P(t, x(t+T), y(t+T), \int_0^t \varphi(t, s, x(s+T), y(s+T))\,ds + \int_0^T \varphi(t, s, x(s), y(s))\,ds) \equiv$$

$$\equiv P(t, x(t+T), y(t+T), \int_0^t \varphi(t, s, x(s+T), y(s+T))\,ds),$$

(2)

$$Q(t, x(t+T), y(t+T), \int_0^t \varphi(t, s, x(s+T), y(s+T))\,ds + \int_0^T \varphi(t, s, x(s), y(s))\,ds) \equiv$$

$$\equiv Q(t, x(t+T), y(t+T), \int_0^t \varphi(t, s, x(s+T), y(s+T))\,ds).$$

Из (2) в частности следует, что $(x(t+T), y(t+T))$ является решением системы (1), если

$$\int_0^T \varphi(t, s, x(s), y(s))\,ds = 0.$$

Нарушение равенств (2) влечет за собой то, что $(x(t+T), y(t+T))$ не является решением системы (1). Если учесть, что периодическое периода T решение $(x(t), y(t))$ системы (1) удовлетворяет (1) вместе с $(x(t+T), y(t+T)) = (x(t), y(t))$, то для периодического решения необходимо выполняется (2), т. е.,

$$P(t, x(t), y(t), \int_0^t \varphi(t, s, x(s), y(s))\,ds + \int_0^T \varphi(t, s, x(s), y(s))\,ds) \equiv$$

(3)

$$\equiv P(t, x(t), y(t), \int_0^t \varphi(t, s, x(s), y(s))\,ds),$$

$$Q\Big(t, x(t), y(t), \int_0^t \varphi(t, s, x(s), y(s))\,\mathrm{d}s + \int_0^T \varphi(t, s, x(s), y(s))\,\mathrm{d}s\Big) \equiv$$

$$\equiv Q\Big(t, x(t), y(t), \int_0^t \varphi(t, s, x(s), y(s))\,\mathrm{d}s\Big).$$

Далее, аналогично как и в [5] находятся условия, эквивалентные условиям (3), но более простые, а именно:

Если выполняется условие

$$\text{(4)} \qquad \frac{\partial P}{\partial z} \neq 0, \qquad \frac{\partial Q}{\partial z} \neq 0$$

в области $(-\infty; +\infty) \times [\alpha, \beta] \times [\gamma, \delta] \times [\zeta, \eta]$, то необходимое условие существования периодического решения системы (1) состоит в том, чтобы тождественно по t выполнялось равенство

$$\text{(5)} \qquad \int_0^T \varphi(t, s, x(s), y(s))\,\mathrm{d}s \equiv 0.$$

Для системы (1) удовлетворяющей условиям (А) и (4), (5) можно применить приводимую ниже схему отыскания периодического решения.

2. Пусть выполнены следующие условия (Б):

Б. При $t, s \in (-\infty, +\infty)$, $x \in [\alpha, \beta], y \in [\gamma, \delta], z \in [\zeta, \eta]$ имеют место неравенства

$$| P(t, x, y, z) | \leqq M, \ | Q(t, x, y, z) | \leqq M, \ | \varphi(t, s, x, y) | \leqq N,$$
$$| P(t, x', y', z') - P(t, x'', y'', z'') | \leqq K_1 | x' - x'' | + K_2 | y', - y'' | + K_3 | z' - z'',$$
$$| Q(t, x', y', z') - Q(t, x'', y'', z'') | \leqq K_1 | x' - x'' | + K_2 | y' - y'' | + K_3 | z' - z'' |,$$
$$| \varphi(t, s, x', y') - \varphi(t, s, x'', y'') | \leqq \mathrm{L}_1 | x' - x'' | + \mathrm{L}_2 | y' - y'' |,$$
$$M, N, K_1, K_2, K_3, \mathrm{L}_1, \mathrm{L}_2 = \mathrm{const} > 0.$$

Рассмотрим последовательности функций

$$x_{m+1}(t, x_0, y_0) = x_0 + \int_0^t e^{\lambda(t-\tau)} \{P(\tau, x_m(\tau), y_m(\tau),$$
$$\int_0^\tau [\varphi(\tau, s, x_m(s), y_m(s)) - \overline{\varphi(\tau, s, x_m(s), y_m(s))}]\,\mathrm{d}s) -$$
$$- \langle P(\tau, x_m(\tau), y_m(\tau), \int_0^\tau [\varphi(\tau, s, x_m(s), y_m(s)) - \overline{\varphi(\tau, s, x_m(s), y_m(s))}]\,\mathrm{d}s)\rangle\}\,\mathrm{d}\tau,$$

$$\text{6)} \qquad y_{m+1}(t, x_0, y_0) = y_0 + \int_0^t \{Q(\tau, x_m(\tau), y_m(\tau), \int_0^\tau [\varphi(\tau, s, x_m(s), y_m(s)) -$$

$$- \overline{\varphi(\tau, s, x_m(s), y_m(s))}] \,\mathrm{d}s) - \overline{Q(\tau, x_m(\tau), y_m(\tau), \int_0^\tau [\varphi(\tau, s, x_m(s), y_m(s)) -}$$

$$\overline{- \overline{\varphi(\tau, s, x_m(s), y_m(s))}] \,\mathrm{d}s)}\} \,\mathrm{d}\tau,$$

где

$$\langle P(t) \rangle = \frac{\lambda}{e^{\lambda T} - 1} \int_0^T e^{\lambda(T-\tau)} P(\tau) \,\mathrm{d}\tau,$$

$$\overline{Q(t)} = \frac{1}{T} \int_0^T Q(\tau) \,\mathrm{d}\tau, \qquad \overline{\varphi(\tau)} = \frac{1}{T} \int_0^T \varphi(\tau) \,\mathrm{d}\tau.$$

При $m = 1, 2, \ldots$ функции $x_m(t, x_0, y_0)$ и $y_m(t, x_0, y_0)$ — T — периодические по t.

Действительно, для $x_1(t, x_0, y_0)$ будем иметь:

$$x_1(t, x_0, y_0) = x_0 + \int_0^t e^{\lambda(t-\tau)} \{P(\tau, x_0, y_0, \int_0^\tau [\varphi(\tau, s, x_0, y_0) - \overline{\varphi(\tau, s, x_0, y_0)}] \,\mathrm{d}s) -$$

$$- \langle P(\tau, x_0, y_0, \int_0^\tau [\varphi(\tau, s, x_0, y_0) - \overline{\varphi(\tau, s, x_0, y_0)}] \,\mathrm{d}s) \rangle \} \,\mathrm{d}\tau.$$

Заменим t на $t + T$.

$$x_1(t + T, x_0, y_0) = x_0 + \int_0^{t+T} e^{\lambda(t+T-\tau)} \{P(\tau, x_0, y_0, \int_0^\tau [\varphi(\tau, s, x_0, y_0) -$$

$$- \overline{\varphi(\tau, s, x_0, y_0)}] \,\mathrm{d}s) - \langle P(\tau, x_0, y_0, \int_0^\tau [\varphi(\tau, s, x_0, y_0) - \overline{\varphi(\tau, s, x_0, y_0)}] \,\mathrm{d}s) \rangle \} \,\mathrm{d}\tau =$$

$$= x_0 + \int_{-T}^t e^{\lambda(t-u)} \{P(u, x_0, y_0, \int_0^{u+T} [\varphi(u, s, x_0, y_0) - \overline{\varphi(u, s, x_0, y_0)}] \,\mathrm{d}s) -$$

$$- \langle P(u, x_0, y_0, \int_0^{u+T} [\varphi(u, s, x_0, y_0) - \overline{\varphi(u, s, x_0, y_0)}] \,\mathrm{d}s) \rangle \} \,\mathrm{d}u =$$

$$= x_0 + \int_{-T}^0 e^{\lambda(t-u)} \{P(u, x_0, y_0, \int_0^{u+T} [\varphi(u, s, x_0, y_0) - \overline{\varphi(u, s, x_0, y_0)}] \,\mathrm{d}s) -$$

$$- \langle P(u, x_0, y_0, \int_0^{u+T} [\varphi(u, s, x_0, y_0) - \overline{\varphi(u, s, x_0, y_0)}] \,\mathrm{d}s) \rangle \} \,\mathrm{d}u +$$

$$+ \int_0^t e^{\lambda(t-u)} \{P(u, x_0, y_0, \int_0^{u+T} [\varphi(u, s, x_0, y_0) - \overline{\varphi(u, s, x_0, y_0)}] \,\mathrm{d}s) -$$

$$- \langle P(u, x_0, y_0, \int_0^{u+T} [\varphi(u, s, x_0, y_0) - \overline{\varphi(u, s, x_0, y_0)}] \,\mathrm{d}s) \rangle \} \,\mathrm{d}u$$

Но

$$\int_0^{u+T} [\varphi(u, s, x_0, y_0) - \overline{\varphi(u, s, x_0, y_0)}] \,\mathrm{d}s =$$

$$= \int_0^u [\varphi(u, s, x_0, y_0) - \overline{\varphi(u, s, x_0, y_0)}] \,\mathrm{d}s.$$

Следовательно,

$$x_1(t+T, x_0, y_0) = x_0 + \int_0^t e^{\lambda(t-u)}\{P(u, x_0, y_0, \int_0^u [\varphi(u, s, x_0, y_0) - \overline{\varphi(u, s, x_0, y_0)}]\,\mathrm{d}s) - \langle P(u, x_0, y_0, \int_0^u [\varphi(u, s, x_0, y_0) - \overline{\varphi(u, s, x_0, y_0)}]\,\mathrm{d}s)\rangle\}\,\mathrm{d}u + \int_{-T}^0 e^{\lambda(t-u)}\{P(u, x_0, y_0, \int_0^u [\varphi(u, s, x_0, y_0) - \overline{\varphi(u, s, x_0, y_0)}]\,\mathrm{d}s) - \langle P(u, x_0, y_0, \int_0^u [\varphi(u, s, x_0, y_0) - \overline{\varphi(u, s, x_0, y_0)}]\,\mathrm{d}s)\rangle\}\,\mathrm{d}u = x_1(t, x_0, y_0) +$$

$$+ \int_{-T}^0 e^{\lambda(t-\tau)} P(\tau, x_0, y_0, \int_0^\tau [\varphi(\tau, s, x_0, y_0) - \overline{\varphi(\tau, s, x_0, y_0)}]\,\mathrm{d}s)\,\mathrm{d}\tau - \frac{\lambda}{e^{\lambda T}-1}\int_0^T e^{\lambda(T-\tau)} P(\tau, x_0, y_0, \int_0^\tau [\varphi(\tau, s, x_0, y_0) - \overline{\varphi(\tau, s, x_0, y_0)}]\,\mathrm{d}s)\,\mathrm{d}\tau\,\frac{e^{\lambda t}(e^{\lambda T}-1)}{\lambda} =$$

$$= x_1(t, x_0, y_0) + \int_{-T}^0 e^{\lambda(t-\tau)} P(\tau, x_0, y_0, \int_0^\tau [\varphi(\tau, s, x_0, y_0) - \overline{\varphi(\tau, s, x_0, y_0)}]\,\mathrm{d}s)\,\mathrm{d}\tau - \int_0^T e^{\lambda(t+T-\tau)} P(\tau, x_0, y_0, \int_0^\tau [\varphi(\tau, s, x_0, y_0) - \overline{\varphi(\tau, s, x_0, y_0)}]\,\mathrm{d}s)\,\mathrm{d}\tau = x_1(t, x_0, y_0) +$$

$$+ \int_{-T}^0 e^{\lambda(t-\tau)} P(\tau, x_0, y_0, \int_0^\tau [\varphi(\tau, s, x_0, y_0) - \overline{\varphi(\tau, s, x_0, y_0)}]\,\mathrm{d}s)\,\mathrm{d}\tau - \int_{-T}^0 e^{\lambda(t-u)} P(u, x_0, y_0, \int_0^u [\varphi(u, s, x_0, y_0) - \overline{\varphi(u, s, x_0, y_0)}]\,\mathrm{d}s)\,\mathrm{d}\tau = x_1(t, x_0, y_0).$$

По методу математической индукции следует, что для всех $m = 1, 2, \ldots$ функции $x_m(t, x_0, y_0)$ и $y_m(t, x_0, y_0)$ — T — периодические по t.

Докажем сходимость последовательности (6).

Оценим при $0 \leqq t \leqq T$ выражение

$$|x_1(t, x_0, y_0) - x_0| = |\int_0^t e^{\lambda(t-\tau)}\{P(\tau, x_0, y_0, \int_0^\tau [\varphi(\tau, s, x_0, y_0) - \overline{\varphi(\tau, s, x_0, y_0)}]\,\mathrm{d}s) - \frac{\lambda}{e^{\lambda T}-1}\int_0^T P(\tau, x_0, y_0, \int_0^\tau [\varphi(\tau, s, x_0, y_0) - \overline{\varphi(\tau, s, x_0, y_0)}]\,\mathrm{d}s)\,\mathrm{d}\tau\}\,\mathrm{d}\tau| \leqq \frac{2M(e^{\lambda(T-t)}-1)(e^{\lambda t}-1)}{\lambda(e^{\lambda T}-1)} = M\alpha(\lambda, t) \leqq M\alpha\left(\lambda, \frac{T}{2}\right), \tag{7}$$

где

$$\alpha(\lambda, t) = \frac{2(e^{\lambda(T-t)} - 1)(e^{\lambda t} - 1)}{\lambda(e^{\lambda T} - 1)}.$$

Введем обозначения $d_\lambda = M\alpha\left(\lambda, \frac{T}{2}\right)_{\lambda\to 0} \to \frac{MT}{2}$ и $d_0 = \frac{MT}{2}$ и введем в рассмотрении интервалы $[\alpha + d_\lambda, \beta - d_\lambda]$, $[\gamma + d_0, \delta - d_0]$.

Пусть $x_0 \in [\alpha + d_\lambda, \beta - d_\lambda]$. Тогда в силу (7) $x_1(t, x_0, y_0) \in [\alpha, \beta]$. В силу периодичности по t функции $x_1(t, x_0, y_0)$ следует, что для всех $t \in (-\infty, +\infty)$ и $x_0 \in [\alpha + d_\lambda, \beta - d_\lambda]$ будет иметь место соотношение $x_1(t, x_0, y_0) \in [\alpha, \beta]$.

Аналогично, при $0 \leqq t \leqq T$ получаем оценку

$$|y_1(t, x_0, y_0) - y_0| \leqq M2t\left(1 - \frac{t}{T}\right) = M\alpha(0, t) \leqq \frac{MT}{2}, \tag{8}$$

где $\alpha(0, t) = \lim\limits_{\lambda\to 0} \alpha(\lambda, t)$.

Как и выше, если $y_0 \in [\gamma + d_0, \delta - d_0]$, то в силу (8) и периодичности функции y_1 по t, следует, что для всех $t \in (-\infty, +\infty)$ будет иметь место соотношение $y_1(t, x_0, y_0) \in [\gamma, \delta]$.

По методу математической индукции можем заключить, что для всех $m = 0, 1, 2, \dots$ $t \in (-\infty, +\infty)$, $x_0 \in [\alpha + d_\lambda, \beta - d_\lambda]$, $y_0 \in [\gamma + d_0, \delta - d_0]$ функции $x_m(t, x_0, y_0) \in [\alpha, \beta]$ и $y_m(t, x_0, y_0) \in [\gamma, \delta]$.

Обозначим через $L_\lambda(f(t))$ оператор

$$L_\lambda(f(t)) = \frac{e^{\lambda(T-t)} - 1}{e^{\lambda T} - 1}\int_0^t e^{\lambda(t-\tau)} f(\tau)\,d\tau + \frac{e^{\lambda t} - 1}{e^{\lambda T} - 1}\int_t^T e^{\lambda(T-\tau)} f(\tau)\,d\tau. \tag{9}$$

Непосредственной проверкой видно, что

$$L_\lambda(1) = \alpha(\lambda, t). \tag{10}$$

Можно также показать, что

$$L_\lambda(\alpha(\lambda, t)) = \alpha(\lambda, t)\left[\frac{\alpha(\lambda, t)}{3} + \tau(\lambda, t)\right], \tag{11}$$

где

$$\max_{0\leqq t\leqq T} \tau(\lambda, t) = \tau(\lambda, 0) = \tau(\lambda, T) = \frac{1}{2}\langle\alpha(\lambda, t)\rangle.$$

Из определения оператора $L_\lambda(f(t))$ с учетом неравенств

$$\alpha(0, t) \leqq \frac{\lambda T}{4}\,\frac{e^{\frac{\lambda T}{2}} + 1}{e^{\frac{\lambda T}{2}} - 1}\,\alpha(\lambda, t),$$

$$\alpha(\lambda, t) \leqq \alpha(0, t), \qquad 0 \leqq t \leqq T$$

следует справедливость оценок

$$L_\lambda(\alpha(\lambda, t)) \leqq \alpha(\lambda, t)\left[\frac{\alpha(\lambda, t)}{3} + \frac{1}{2}\langle\alpha(\lambda, t)\rangle\right], \tag{12}$$

$$L_0(\alpha(0, t)) = \alpha(0, t)\left[\frac{\alpha(0, t)}{3} + \frac{1}{2}\overline{\alpha(0, t)}\right], \tag{13}$$

$$L_0(\alpha(\lambda, t)) \leqq L_0(\alpha(0, t)) = \alpha(0, t)\left[\frac{\alpha(0, t)}{3} + \frac{1}{2}\overline{\alpha(0, t)}\right], \tag{14}$$

$$L_\lambda(\alpha(0, t)) \leqq \frac{\lambda T}{4}\,\frac{e^{\frac{\lambda T}{2}} + 1}{e^{\frac{\lambda T}{2}} - 1}\,L_\lambda(\alpha(\lambda, t)). \tag{15}$$

Оценим разность $|x_2(t, x_0, y_0) - x_1(t, x_0, y_0)|$, используя (7), (8), определение оператора $L_\lambda(f(t))$, (10), (15) и (18).

Получаем

$$|x_2(t, x_0, y_0) - x_1(t, x_0, y_0)| \leqq \frac{e^{\lambda(T-t)} - 1}{e^{\lambda T} - 1}\int_0^t e^{\lambda(t-\tau)} \times \tag{16}$$

$$\times \Big| P\Big(\tau, x_1(\tau), y_1(\tau), \int_0^\tau [\varphi(\tau, s, x_1(s), y_1(s)) - \overline{\varphi(\tau, s, x_1(s), y_1(s))}]\,ds\Big) -$$

$$- P\Big(\tau, x_0, y_0, \int_0^\tau [\varphi(\tau, s, x_0, y_0) - \overline{\varphi(\tau, s, x_0, y_0)}]\,ds\Big)\Big|\,d\tau +$$

$$+ \frac{e^{\lambda t} - 1}{e^{\lambda T} - 1}\int_t^T e^{\lambda(T-\tau)}\Big| P\Big(\tau, x_1(\tau), y_1(\tau), \int_0^\tau [\varphi(\tau, s, x_1(s), y_1(s)) -$$

$$- \overline{\varphi(\tau, s, x_1(s), y_1(s))}]\,ds\Big) - P\Big(\tau, x_0, y_0, \int_0^\tau [\varphi(\tau, s, x_0, y_0) - \overline{\varphi(\tau, s, x_0, y_0)}]\,ds\Big)\Big|\,d\tau \leqq$$

$$\leqq \left[K_1 L_\lambda(\alpha(\lambda, t)) + K_2 L_\lambda(\alpha(0, t)) + K_3(L_1 + L_2)\frac{T^2}{6}\alpha(\lambda, t)\right] M \leqq$$

$$\leqq M\left\{\left[K_1 + K_2\frac{\lambda T}{4}\,\frac{e^{\frac{\lambda T}{2}} + 1}{e^{\frac{\lambda T}{2}} - 1}\right] M_1 + K_3(L_1 + L_2)\frac{T^2}{6}\right\}\alpha(\lambda, t),$$

где

$$M_1 = \frac{1}{3}\alpha\left(\lambda, \frac{T}{2}\right) + \frac{1}{2}\langle\alpha(\lambda, t)\rangle \to \frac{T}{3}$$

при $\lambda \to 0$.

Аналогично для $|y_2(t, x_0, y_0) - y_1(t, x_0, y_0)|$ получаем оценку

$$|y_2(t, x_0, y_0) - y_1(t, x_0, y_0)| \leqq \tag{17}$$

$$\leqq M\left\{(K_1 + K_2)\,L_0(\alpha(0, t)) + K_3(L_1 + L_2)\frac{T^2}{6}\alpha(0, t)\right\} \leqq$$

$$\leqq M\alpha(0, t)\left\{(K_1 + K_2)\frac{T}{3} + K_3(L_1 + L_2)\frac{T^2}{6}\right\}.$$

Введем обозначения

$$\left[K_1 + K_2 \frac{\lambda T}{4} \frac{e^{\frac{\lambda T}{2}} + 1}{e^{\frac{\lambda T}{2}} - 1}\right] M_1 + K_3(L_1 + L_2)\frac{T^2}{6} = q_1,$$

$$(K_1 + K_2)\frac{T}{3} + K_3(L_1 + L_2)\frac{T^2}{6} = q_2.$$

Тогда (16) и (17) перепишутся в виде

$$|x_2(t, x_0, y_0) - x_1(t, x_0, y_0)| \leqq q_1 M\alpha(\lambda, t) \leqq q_1 M\alpha\left(\lambda, \frac{T}{2}\right)$$

$$|y_2(t, x_0, y_0) - y_1(t, x_0, y_0)| \leqq q_2 M\alpha(0, t) \leqq q_2 \frac{MT}{2}.$$

По методу математической индукции заключаем, что

$$|x_{m+1}(t, x_0, y_0) - x_m(t, x_0, y_0)| \leqq q_1^m M\alpha(\lambda, t) \leqq q_1^m M\alpha\left(\lambda, \frac{T}{2}\right) \tag{18}$$

$$|y_{m+1}(t, x_0, y_0) - y_m(t, x_0, y_0)| \leqq q_2^m M\alpha(0, t) \leqq q_2^m \frac{MT}{2}. \tag{19}$$

Следовательно, для сходимости последовательностей (6) достаточно выполнение неравенств

$$q_1 = q_1(\lambda) < 1, \qquad q_2 < 1. \tag{20}$$

Из (18) и (19) заключаем, что для произвольных $K \geqq 1$ будем иметь

$$|x_{m+k}(t, x_0, y_0) - x_m(t, x_0, y_0)| \leqq q_1^m(1 - q_1)^{-1} M\alpha(\lambda, t), \tag{21}$$

$$|y_{m+k}(t, x_0, y_0) - y_m(t, x_0, y_0)| \leqq q_2^m(1 - q_2)^{-1} M\alpha(0, t). \tag{22}$$

Соотношения (20—(22) доказывают равномерную по $(t, x_0, y_0) \in \in (-\infty, +\infty) \times [\alpha + d_\lambda, \beta - d_\lambda,] \times [\gamma + d_0, \delta - d_0]$ сходимость при $m \to \infty$ последовательностей $\{x_m(t, x_0, y_0)\}$, $\{y_m(t, x_0, y_0)\}$ соответственно к функциям $x_\infty(t, x_0, y_0)$, $y_\infty(t, x_0, y_0)$, причем последние удовлетворяют неравенствам

$$\begin{aligned} &|x_\infty(t, x_0, y_0) - x_m(t, x_0, y_0)| \leqq q_1^m(1 - q_1)^{-1} M\alpha\left(\lambda, \frac{T}{2}\right), \\ &|y_\infty(t, x_0, y_0) - y_m(t, x_0, y_0)| \leqq q_2^m(1 - q_2)^{-1} \frac{MT}{2}. \end{aligned} \tag{23}$$

Так как функции $x_m(t, x_0, y_0)$ и $y_m(t, x_0, y_0)$ — периодические по t с периодом T, то и предельные функции также будут периодическими по t с периодом T.

Переходя в (6) к пределу при $m \to \infty$ убеждаемся, что $(x_\infty(t, x_0, y_0),$

$y_\infty(t, x_0, y_0)$ является периодическим решением системы

(24) $$x(t, x_0, y_0) =$$

$$= x_0 + \int_0^t e^{\lambda(t-\tau)}\{P(\tau, x(\tau), y(\tau), \int_0^\tau [\varphi(\tau, s, x(s), y(s)) - \overline{\varphi(\tau, s, x(s), y(s))}]\, ds) -$$

$$- \langle P(\tau, x(\tau), y(\tau), \int_0^\tau [\varphi(\tau, s, x(s), y(s)) - \overline{\varphi(\tau, s, x(s), y(s))}]\, ds)\rangle\}\, d\tau,$$

$$y(t, x_0, y_0) =$$

$$= y_0 + \int_0^t \{Q(\tau, x(\tau), y(\tau), \int_0^\tau [\varphi(\tau, s, x(s), y(s)) - \overline{\varphi(\tau, s, x(s), y(s))}]\, ds) -$$

$$\overline{- Q(\tau, x(\tau), y(\tau), \int_0^\tau [\varphi(\tau, s, x(s), y(s)) - \overline{\varphi(\tau, s, x(s), y(s))}]\, ds)}\}\, d\tau.$$

Итак, доказана следующая

Лемма 1. *Пусть:*

1. *Выполнены условия* (*А*) *и* (*Б*).
2. *Интервалы* $[\alpha, \beta]$ *и* $[\gamma, \delta]$ *таковы, что*

$$\frac{\beta - \alpha}{2} > d_\lambda, \qquad \frac{\delta - \gamma}{2} > d_0.$$

3. $q_1 < 1$, $q_2 < 1$.
4. $\frac{\partial P}{\partial z} \neq 0$, $\frac{\partial Q}{\partial z} \neq 0$ *в области* $(-\infty, +\infty) \times [\alpha, \beta] \times [\gamma, \delta]$.

Тогда последовательности периодических по t *периода* T *функций* (6) *сходятся при* $m \to \infty$ *равномерно относительно* $(t, x_0, y_0) \in (-\infty, +\infty) \times [\alpha + d_\lambda, \beta - d_\lambda] + [\gamma + d_0, \delta - d_0]$ *соответственно к функциям* $x_\infty(t, x_0, y_0)$, $y_\infty(t, x_0, y_0)$, *периодическими по* t *с периодом* T *и удовлетворяющими системе* (24). *При этом справедливы оценки* (23).

Рассмотрим вопрос о существовании периодических решений системы (1). Введем обозначения

$$\Delta^x(x_0, y_0) =$$

$$= \lambda x_0 + \langle P(t, x_\infty(t, x_0, y_0), y_\infty(t, x_0, y_0), \int_0^t \varphi(t, s, x_\infty(s, x_0, y_0), y_\infty(s, x_0, y_0))\, ds)\rangle,$$

$$\Delta^y(x_0, y_0) =$$

$$\overline{= Q(t, x_\infty(t, x_0, y_0), y_\infty(t, x_0, y_0), \int_0^t \varphi(t, s, x_\infty(s, x_0, y_0), y_\infty(s, x_0, y_0))\, ds)}.$$

Поскольку $(x_\infty(t, x_0, y_0),\ y_\infty(t, x_0, y_0))$ является решением системы (24), то при

$$\text{(25)} \qquad \begin{cases} \Delta^x(x_0, y_0) = 0 \\ \Delta^y(x_0, y_0) = 0 \end{cases}$$

$$\text{(26)} \qquad \overline{\varphi(t, s, x_\infty(s, x_0, y_0), y_\infty(s, x_0, y_0))} = 0$$

$(x_\infty(t, x_0, y_0), y_\infty(t, x_0, y_0))$ является периодическим решением системы (1). Следовательно, вопрос о существовании периодических решений системы (1) связан с разрешимостью (25) относительно (x_0, y_0) и выполнением соотношения (26). Решение системы (25) и есть та точка, через которую при $t = 0$ проходит T — периодическое решение системы (1).

Решить систему (25) в общем случае невозможно, так как не всегда можно найти предельные функции $x_\infty(t, x_0, y_0)$, $y_\infty(t, x_0, y_0)$.

Введем обозначения

$$\Delta_m^x(x_0, y_0) =$$
$$= \lambda x_0 + \langle P(t, x_m(t, x_0, y_0), y_m(t, x_0, y_0), \int_0^t \varphi(t, s, x_m(s, x_0, y_0), y_m(s, x_0, y_0))\,\mathrm{d}s)\rangle,$$

$$\Delta_m^y(x_0, y_0) =$$
$$= \overline{Q(t, x_m(t, x_0, y_0), y_m(t, x_0, y_0), \int_0^t \varphi(t, s, x_m(s, x_0, y_0), y_m(s, x_0, y_0))\,\mathrm{d}s)},$$

$$\Phi_m(t, x_0, y_0) = \frac{1}{T}\int_0^T \varphi(t, s, x_m(s, x_0, y_0), y_m(s, x_0, y_0))\,\mathrm{d}s, \qquad (m = 0, 1, 2, \ldots)$$

и вместе с системой (25), (26) рассмотрим систему

$$\text{(27)} \qquad \begin{cases} \Delta_m^x(x_0, y_0) = 0, \\ \Delta_m^y(x_0, y_0) = 0, \end{cases}$$

и соотношение

$$\text{(28)} \qquad \Phi_m(t, x_0, y_0) = 0.$$

Справедлива следующая

Теорема 1. *Пусть:*

1. *Для некоторого целого числа m система* (27) *имеет изолированное решение* (x^0, y^0).

2. *Индекс особой точки* (x^0, y^0) *отображения, порожденного левыми частями* (27) *отличен от нуля.*

3. *Выполнены условия леммы 1.*

4. *Существует замкнутая выпуклая область D_0, принадлежащая области* $D = \{(x, y)\colon \alpha + d_\lambda \leqq x \leqq \beta - d_\lambda,\ \gamma + d_0 \leqq y \leqq \delta - d_0\}$ *и имеющая* (x^0, y^0)

единственной особой точкой, такая что на ее границе Γ_{D_0} выполняются неравенства

$$
\begin{aligned}
\inf_{(x_0, y_0)\in\Gamma_{D_0}} |\Delta_m^x(x_0, y_0)| &\geqq \left[K_1 + K_3L_1 \frac{e^{\lambda T} - 1 - \lambda T}{\lambda(e^{\lambda T} - 1)}\right] M q_1^m (1 - q_1)^{-1} \alpha\left(\lambda, \frac{T}{2}\right) + \\
&+ \left[K_2 + K_3L_2 \frac{e^{\lambda T} - 1 - \lambda T}{\lambda(e^{\lambda T} - 1)}\right] M q_2^m (1 - q_2)^{-1} \alpha\left(0, \frac{T}{2}\right), \\
\inf_{(x_0, y_0)\in\Gamma_{D_0}} |\Delta_m^y(x_0, y_0)| &\geqq \left[K_1 + K_3L_1 \frac{T}{2}\right] M q_1^m (1 - q_1)^{-1} \alpha\left(\lambda, \frac{T}{2}\right) + \\
&+ \left[K_2 + K_3L_2 \frac{T}{2}\right] M q_2^m (1 - q_2)^{-1} \alpha\left(0, \frac{T}{2}\right).
\end{aligned} \tag{29}
$$

5. *Для всех (x_0, y_0) из области D_0 и всех $m = 0, 1, 2, \ldots$ выполняется соотношение* (28).

Тогда система (1) *имеет T-периодическое решение $x = x(t)$, $y = y(t)$, для которого $(x(0), y(0)) \in D_0$. Это решение является пределом равномерно сходящихся последовательностей* (6). *Оценка разности между точным решением и его m-ым приближением дается неравенствами* (23).

Доказательство. Для доказательства теоремы докажем сначала справедливость оценок

$$
\begin{aligned}
|\Delta^x - \Delta_m^x| &= M\left[K_1 + K_3L_1 \frac{e^{\lambda T} - 1 - \lambda T}{\lambda(e^{\lambda T} - 1)}\right] q_1^m (1 - q_1)^{-1} \alpha\left(\lambda, \frac{T}{2}\right) + \\
&+ M\left[K_2 + K_3L_2 \frac{e^{\lambda T} - 1 - \lambda T}{\lambda(e^{\lambda T} - 1)}\right] q_2^m (1 - q_2)^{-1} \alpha\left(0, \frac{T}{2}\right), \\
|\Delta^y - \Delta_m^y| &\leqq M\left[K_1 + K_3L_1 \frac{T}{2}\right] q_1^m (1 - q_1)^{-1} \alpha\left(\lambda, \frac{T}{2}\right) + \\
&+ M\left[K_2 + K_3L_2 \frac{T}{2}\right] q_2^m (1 - q_2)^{-1} \alpha\left(0, \frac{T}{2}\right).
\end{aligned} \tag{30}
$$

Действительно,

$$
\begin{aligned}
&|\Delta^x - \Delta_m^x| = \\
&= \left| \left\langle P\left(t, x_\infty(t, x_0, y_0), y_\infty(t, x_0, y_0), \int_0^t \varphi\left(t, s, x_\infty(s, x_0, y_0), y_\infty(s, x_0, y_0)\right) ds\right)\right\rangle - \right. \\
&\left. - \left\langle P\left(t, x_m(t, x_0, y_0), y_m(t, x_0, y_0), \int_0^t \varphi\left(t, s, x_m(s, x_0, y_0), y_m(s, x_0, y_0)\right) ds\right)\right\rangle \right| \leqq \\
&\leqq \frac{\lambda}{e^{\lambda T} - 1} \int_0^T e^{\lambda(T-\tau)}\{K_1 |x_\infty - x_m| + K_2 |y_\infty - y_m| + \\
&+ K_3 \int_0^\tau |\varphi(\tau, s, x_\infty, y_\infty) - \varphi(\tau, s, x_m, y_m)| ds\} d\tau \leqq
\end{aligned}
$$

$$\leqq \frac{\lambda}{e^{\lambda T}-1}\int_0^T e^{\lambda(T-\tau)}\{K_1 q_1^m(1-q_1)^{-1} M\alpha\left(\lambda, \frac{T}{2}\right) + K_2 q_2^m(1-q_2)^{-1}\alpha\left(0, \frac{T}{2}\right)M +$$

$$+ K_3\int_0^\tau [L_1 | x_\infty - x_m | + L_2 | y_\infty - y_m |]\, ds\}\, d\tau \leqq$$

$$\leqq \frac{\lambda}{e^{\lambda T}-1}\int_0^T e^{\lambda(T-\tau)}\left\{K_1 q_1^m(1-q_1)^{-1} M\alpha\left(\lambda, \frac{T}{2}\right) +\right.$$

$$+ K_2 q_2^m(1-q_2)^{-1} M\alpha\left(0, \frac{T}{2}\right) + K_3\left[L_1 q_1^m(1-q_1)^{-1} M\alpha\left(\lambda, \frac{T}{2}\right) +\right.$$

$$\left.\left. + L_2 q_2^m(1-q_2)^{-1} M\alpha\left(0, \frac{T}{2}\right)\right]\tau\right\} d\tau.$$

Имея ввиду, что

$$\frac{\lambda}{e^{\lambda T}-1}\int_0^T e^{\lambda(T-\tau)}\, d\tau = 1$$

и

$$\frac{\lambda}{e^{\lambda T}-1}\int_0^T \tau e^{\lambda(T-\tau)}\, d\tau = \frac{e^{\lambda T}-1-\lambda T}{\lambda(e^{\lambda T}-1)},$$

получаем окончательно первую из оценок (30).

Аналогично

$$| \Delta^y - \Delta^y_m | =$$

$$= | Q(t, x_\infty, y_\infty, \int_0^t \varphi(t, s, x_\infty, y_\infty)\, ds) - Q(t, x_m, y_m, \int_0^t \varphi(t, s, x_m, y_m)\, ds) | \leqq$$

$$\leqq \frac{1}{T}\int_0^T \{K_1 | x_\infty - x_m | + K_2 | y_\infty - y_m | +$$

$$+ K_3 \int_0^t [L_1 | x_\infty - x_m | + L_2 | y_\infty - y_m |]\, ds\}\, d\tau \leqq$$

$$\leqq K_1 q_1^m(1-q_1)^{-1} M\alpha\left(\lambda, \frac{T}{2}\right) + K_2 q_2^m(1-q_2)^{-1}\alpha\left(0, \frac{T}{2}\right)M +$$

$$+ MK_3\left[L_1 q_1^m(1-q_1)^{-1}\alpha\left(\lambda, \frac{T}{2}\right) + L_2 q_2^m(1-q_2)^{-1}\alpha\left(0, \frac{T}{2}\right)\right]\frac{T}{2} =$$

$$= M\left[K_1 + K_3 L_1 \frac{T}{2}\right] q_1^m(1-q_1)^{-1}\alpha\left(\lambda, \frac{T}{2}\right) +$$

$$+ M\left[K_2 + K_3 L_2 \frac{T}{2}\right] q_2^m(1-q_2)^{-1}\alpha\left(0, \frac{T}{2}\right).$$

Тем самым доказана справедливость и второй оценки (30).

Из (30) следует, что $\Delta^x_m \to \Delta^x$ при $m \to \infty$ и $\Delta^y_m \to \Delta^y$ при $m \to \infty$.

Легко видно, что Δ_m^x, Δ_m^y, Δ^x и Δ^y непрерывны в области $[\alpha + d_\lambda, \beta - d_\lambda] \times$ $\times [\gamma + d_0, \delta - d_0]$.

Введем обозначения

$$z^0 = (x^0, y^0);\ z = (x, y)$$
$$\Delta(z) = (\Delta^x(x, y), \Delta^y(x, y))$$
$$\Delta_m(z) = (\Delta_m^x(x, y), \Delta_m^y(x, y)).$$

По определению индекс изолированной особой точки z^0 непрерывного отображения $\Delta_m(z)$ равен характеристике векторного поля, порожденного отображением $\Delta_m(z)$ на достаточно малой сфере S^2 с центром в точке z^0. Так как в D_0 нет отличных от z^0 особых точек и D_0 гомеоморфно единичному шару E_2, то характеристика векторного поля Δ_m на сфере S^2 равна характеристике этого же поля на Γ_{D_0}.

Покажем, что поля Δ_m и Δ гомотопны на Γ_{D_0}. Это следует из того, что непрерывно зависящее от параметра $\emptyset$, $0 \leqq \emptyset \leqq 1$, семейство всюду непрерывных на Γ_{D_0} векторных полей $V(\emptyset, z_0) = \Delta_m(z_0) + \emptyset(\Delta(z_0) - \Delta_m(z_0))$, соединяющее поля $V(0, z_0) = \Delta_m(z_0)$ и $V(1, z_0) = \Delta(z_0)$, нигде не обращается на Γ_{D_0} в нуль. Действительно, справедливы оценки (30), и следовательно, на Γ_{D_0} имеет место неравенство

$$\| V(\emptyset, z_0) \| \geqq \| \Delta_m(z_0) \| - \| \Delta_m(z_0) - \Delta(z_0) \| > 0,$$

где $\| z \| = |x| + |y|$.

Известно, что характеристики гомотопных на компакте полей равны между собой. Поэтому характеристика на Γ_{D_0} поля Δ равна индексу особой точки z^0 поля Δ_m и, следовательно, отлична от нуля, что достаточно чтобы векторное поле Δ имело в D_0 особую точку z_0^0, для которой $\Delta(z_0^0) = 0$, т. е.,

$$\Delta^x(x_0^0, y_0^0) = 0, \qquad \Delta^y(x_0^0, y_0^0) = 0. \tag{31}$$

Итак, установлено существование такой точки (x_0^0, y_0^0), в которой выполняется (31). Тогда решение системы (1), проходящее через точку (x_0^0, y_0^0) является периодическим.

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

[1] А. М. Самойленко: *Численно-аналитический метод исследования периодических систем обыкновенных дифференциальных уравнений.* I, УМЖ, т. 17, N 4, 1965.

[2] А. М. Самойленко: *Численно-аналитический метод исследования периодических систем обыкновенных дифференциальных уравнений.* II, УМЖ, т. 18, N 2, 1966.

[3] Н. А. Перестюк: *О периодических решениях некоторых систем дифференциальных*

уравнений. В сб. „Асимптотические и качественные методы в теории нелинейных ко баний". Изд. Института матем. АН УССР, Киев, 1971.

[4] А. М. Самойленко, Н. И. Ронто: *Численно-аналитические методы исследовав периодических решений*. Издательство при Киевском государственном университете, Ки 1976.

[5] Г. Вахабов: *Численно-аналитический метод исследования периодических систем интег, дифференциальных уравнений*. УМЖ, т. 21, N 5, 1969.

Д. Байнов
София — 4, Оборище 23
Болгария