M. B. Laskin

Обоснование сходимости метода Брауна для выпукло-вогнутых функций с помощью функции Ляпунова

Archivum Mathematicum, Vol. 27 (1991), No. 1-2, 43--51

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/107402

ОБОСНОВАНИЕ СХОДИМОСТИ МЕТОДА БРАУНА ДЛЯ ВЫПУКЛО-ВОГНУТЫХ ФУНКЦИЙ С ПОМОЩЬЮ ФУНКЦИИ ЛЯПУНОВА

М. Б. ЛАСКИН

(Поступило в редакцию 16-ого мая 1986 г.)

Резюме. В работе рассматривается вопрос о сходимости известного итеративного метод Брауна-Робинсон при его применении для поиска седловых точек выпукло-вогнутых функций

Ключевые слова. Брауна-Робинсон метод, седловые точки.

УДК. 519.242.

Рассматривается задача поиска методом Брауна-Робинсон седловой точки непрерывной, выпуклой по x, $x \in X$ и вогнутой по y, $y \in Y$ функции $F(x, y)$, заданой на выпуклых компактах X, Y. Метод Брауна-Робинсон рассматривается в виде следующей модификации:

$$(1)\quad \begin{aligned} &x_1 \text{ — произвольно,} \qquad x_{n+1} = \arg\min_X F\left(x, \sum_{k=1}^{n} \frac{yk}{n}\right),\\ &y_1 \text{ — произвольно,} \qquad y_{n+1} = \arg\max_Y F\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{xk}{n}, y\right). \end{aligned}$$

При билинейной функции $F(x, y)$ [1] является методом Брауна-Робинсон, сходимость которого доказана в [1]. Неоднократно предпринимались попытки доказать сходимость этого метода в форме [1]. С точки зрения автора заключения о сходимости этого метода в форме [1], сделанные в [2] и [3] несколько преждевременны, т. к. и в [2] и в [3] всё-таки не выяснены до конца вопросы о поведении ломаных Эйлера относительно пучка решений системы дифференциальных уравнений с многозначными правыми частями. В предлагаемой работе доказаны теоремы о сходимости [1] для случая строго выпукло-вогнутой непрерывной функции $F(x, y)$, теорема о достаточном условии сходимости [1] при выпукло-вогнутой функции $F(x, y)$.

Введём обозначения $\tilde{x}_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{x_k}{n}$, $\tilde{y}_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{y_k}{n}$. Введём в рассмотрение отображения $\varphi : Y \to X$, $\psi : X \to Y$ такие, что $\max\limits_{Y} F(x, y) = F(x, \psi(x))$, $\min\limits_{X} F(x, y) = F(\varphi(y), y)$. Если функция $F(x, y)$ непрерывна, строго выпукла по x, строго вогнута по y, $x \in X$, $y \in Y$, X, Y — выпуклые компакты, то φ, ψ — непрерывные функции. Тогда [1] в новых обозначениях примет вид

$$\begin{aligned} &\tilde{x}_1 \text{ — произвольно,} \qquad \tilde{x}_{n+1} = \tilde{x}_n + \frac{1}{n+1}(\varphi(\tilde{y}_n) - \tilde{x}_n), \\ &\tilde{y}_1 \text{ — произвольно,} \qquad \tilde{y}_{n+1} = \tilde{y}_n + \frac{1}{n+1}(\psi(\tilde{x}_n) - \tilde{y}_n). \end{aligned} \tag{2}$$

Итеративный процесс [2] можно рассматривать как конечно-разностную аппроксимацию системы дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} &\dot{\tilde{x}}(t) = \varphi(\tilde{y}(t)) - \tilde{x}(t), \qquad \tilde{x}(0) = \tilde{x}_1, \\ &\dot{\tilde{y}}(t) = \psi(\tilde{x}(t)) - \tilde{y}(t), \qquad \tilde{y}(0) = \tilde{y}_1. \end{aligned} \tag{3}$$

Наоборот, [3] можно рассматривать как непрерывный аналог [2].

Теорема 1. *Интегральные кривые системы дифференциальных уравнений* [3] *(если они существуют) при любых начальных условиях сходятся к точке* $(x^*, y^*) \in X \times Y$ *— седловой точке функции* $F(x, y)$ *— непрерывной, строго выпуклой по* x*, строго вогнутой по* y*,* $x \in X$*,* $y \in Y$*,* X*,* Y *— выпуклые компакты.*

Доказательство. Для доказательства достаточно построить функцию Ляпунова $V(\tilde{x}(t), \tilde{y}(t))$ — неотрицательно определённую, равную нулю только в точке (x^*, y^*) и строго убывающую вдоль интегральных кривых системы дифференциальных уравнений [3]. Выберем в качестве функции Ляпунова

$$V(\tilde{x}(t), \tilde{y}(t)) = F(\tilde{x}(t), \psi(\tilde{x}(t))) - F(\varphi)\, \tilde{y}(t)), \tilde{y}(t)).$$

Седловая точка $(x^*, y^*) \in X \times Y$ во введённых обозначениях отвечает условию $\varphi(y^*) = x$, $\psi(x^*) = y^*$.

Из принципа минимакса очевидно, что

$$\begin{aligned} V(\tilde{x}(t), \tilde{y}(t)) &= F(\tilde{x}(t), \psi(\tilde{x}(t))) - F(\varphi)\, \tilde{y}(t)), \tilde{y}(t)) = \\ &= \max_{Y} F(\tilde{x}(t), y) - \min_{X} F(x, \tilde{y}(t)) \geq \\ &\geq \min_{X} \max_{Y} F(x, y) - \max_{Y} \min_{X} F(x, y) \geq 0 \end{aligned}$$

и равенство нулю выполняется только в седловой точке. Показана дательная определённость функции $V(\tilde{x}(t), \tilde{y}(t))$.

Покажем теперь убывание $V(\tilde{x}(t), \tilde{y}(t))$ вдоль интегральных кривых системы

[3]. Имеем систему дифференциальных уравнений

$$(4)\qquad \begin{aligned}&\dot{\tilde{x}}(t) + \tilde{x}(t) = \varphi(\tilde{y}(t)), \quad \text{или} \quad e^{-t}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(e^t\tilde{x}(t)) = \varphi(\tilde{y}(t)),\\ &\dot{\tilde{y}}(t) + \tilde{y}(t) = \psi(\tilde{x}(t)), \quad \text{(что то же)} \quad e^{-t}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(e^t\tilde{y}(t)) = \psi(\tilde{x}(t)).\end{aligned}$$

Интегрируя [4] на отрезке $[t, t + \Delta t]$ получим

$$(5)\qquad \begin{aligned}&\tilde{x}(t + \Delta t) = \tilde{x}(t)\,e^{-\Delta t} + (1 - e^{-\Delta t})\int_t^{t+\Delta t}\frac{e^\tau}{e^{t+\Delta t} - e^t}\,\varphi(\tilde{y}(\tau))\,\mathrm{d}\tau,\\ &\tilde{y}(t + \Delta t) = \tilde{y}(t)\,e^{-\Delta t} + (1 - e^{-\Delta t})\int_t^{t+\Delta t}\frac{e^\tau}{e^{t+\Delta t} - e^t}\,\psi(\tilde{x}(\tau))\,\mathrm{d}\tau.\end{aligned}$$

Введём обозначения $e^{-\Delta t} = \lambda > 0$ $(\Delta t \neq 0 \Rightarrow \lambda > 0, \lambda < 1)$, $p(\tau) = \dfrac{e^\tau}{e^{t+\Delta t} - e^t}$.

Причем $\int_t^{t+\Delta t} p(\tau)\,\mathrm{d}\,\tau = 1$ и $p(\tau) > 0 \quad \tau \neq 0$.

Подставляя [5] в $V(\tilde{x}(t + \Delta t), y(t + \Delta t))$ и пользуясь строгой выпуклостью $F(x, y)$ по x и строгой вогнутостью по y получим

$$V(\tilde{x}(t + \Delta t), \tilde{y}(t + \Delta t)) = F(\tilde{x}(t + \Delta t), \psi(\tilde{x}(t + \Delta t)) - F(\varphi(\tilde{y}(t + \Delta t)), \tilde{y}(t + \Delta t)) =$$

$$= F(\tilde{x}(t)\,.\,\lambda + (1 - \lambda)\int_t^{t+\Delta t} p(\tau)\,\varphi(\tilde{y}(\tau))\,\mathrm{d}\tau, \psi(\tilde{x}(t)\,.\,\lambda + (1 - \lambda)\int_t^{t+\Delta t} p(\tau)\,\varphi(\tilde{y}(\tau))\,\mathrm{d}\tau)) -$$

$$- F(\varphi(\tilde{y}(t)\,.\,\lambda + (1 - \lambda)\int_t^{t+\Delta t} p(\tau)\,\psi(\tilde{x}(\tau))\,\mathrm{d}\tau),$$

$$\tilde{y}(t)\,.\,\lambda + (1 - \lambda)\int_t^{t+\Delta t} p(\tau)\,\psi(\tilde{x}(\tau))\,\mathrm{d}\tau) < \lambda F(\tilde{x}(t), \psi(\tilde{x}(t + \Delta t))) +$$

$$+ (1 - \lambda)\int_t^{t+\Delta t} p(\tau)\,F(\varphi(\tilde{y}(\tau)), \psi(\tilde{x}(t + \Delta t))\,\mathrm{d}\tau - \lambda F(\varphi(\tilde{y}(t + \Delta t),$$

$$\tilde{y}(t)) - (1 - \lambda)\int_t^{t+\Delta t} p(\tau)\,F(\varphi(\tilde{y}(t + \Delta t)), \psi(\tilde{x}(\tau)))\,\mathrm{d}\tau.$$

Так как

$$F(\tilde{x}(t), \psi(\tilde{x}(t))) \geq F(\tilde{x}(t), \psi(\tilde{x}(t + \Delta t))),$$

$$F(\varphi(\tilde{y}(t)), \tilde{y}(t)) \leq F(\varphi(\tilde{y}(t + \Delta t)), \tilde{y}(t)),$$

то

$$V(\tilde{x}(t + \Delta t), \tilde{y}(t + \Delta t) \leq \lambda[F(\tilde{x}(t), \psi(\tilde{x}(t))) - F(\varphi(\tilde{y}(t)), \tilde{y}(t))] +$$

$$+ (1-\lambda) \int_t^{t+\Delta t} p(\tau)\left[F(\varphi(\tilde{y}(\tau)), \psi(\tilde{x}(t+\Delta t))) - F(\varphi(\tilde{y}(t+\Delta t)), \psi(\tilde{x}(\tau)))\right] \mathrm{d}\tau =$$

$$= \lambda V(\tilde{x}(t), \tilde{y}(t)) + (1-\lambda) \int_t^{t+\Delta t} p(\tau)\left[F(\varphi(y(\tau)), \psi(\tilde{x}(t+\Delta t))) -\right.$$

$$\left. - F(\varphi(\tilde{y}(t+\Delta t)), \psi(\tilde{x}(\tau)))\right] \mathrm{d}\tau.$$

Построим оценку для производной функции $V(\tilde{x}(t), \tilde{y}(t))$:

$$\frac{\mathrm{d}V(\tilde{x}(t), \tilde{y}(t))}{\mathrm{d}t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{V(\tilde{x}(t+\Delta t), \tilde{y}(t+\Delta t)) - V(\tilde{x}(t), \tilde{y}(t))}{\Delta t} \le$$

$$\le \lim_{\Delta t \to 0} \left[\frac{\lambda - 1}{\Delta t} V(\tilde{x}(t), \tilde{y}(t)) + \frac{(1-\lambda)}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} p(\tau)\left[F(\varphi(\tilde{y}(\tau)),\right.\right.$$

$$\left.\left. \psi(\tilde{x}(t+\Delta t))) - F(\varphi(\tilde{y}(t+\Delta t)), \psi(\tilde{x}(\tau)))\right] \mathrm{d}\tau \right] =$$

$$= V(\tilde{x}(t), \tilde{y}(t)) \cdot \lim_{\Delta t \to 0} \frac{e^{-\Delta t} - 1}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1 - e^{-\Delta t}}{\Delta t} \cdot \lim_{\Delta t \to 0} \int_t^{t+\Delta t} p(\tau)$$

$$\left[F(\varphi(\tilde{y}(\tau)), \psi(\tilde{x}(t+\Delta t))) - F(\varphi(\tilde{y}(t+\Delta t))\, \psi(\tilde{x}(\tau)))\right] \mathrm{d}\tau.$$

Так как

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{e^{-\Delta t} - 1}{\Delta t} = -\lim_{\Delta t \to 0} \frac{1 - e^{-\Delta t}}{\Delta t} = -1$$

и

$$\lim_{\Delta t \to 0} \int_t^{t+\Delta t} p(\tau)\left[F(\varphi(\tilde{y}(\tau)), \psi(\tilde{x}(t+\Delta t))) - F(\varphi(\tilde{y}(t+\Delta t)), \psi(\tilde{x}(\tau)))\right] \mathrm{d}\tau = 0,$$

то $\dfrac{\mathrm{d}V(\tilde{x}(t), \tilde{y}(t))}{\mathrm{d}t} \le -V(\tilde{x}(t), \tilde{y}(t)) \le 0$, причём равенство нулю выполнено только в седловой точке. Это и доказывает утверждение теоремы.

Из теоремы непосредственно следует и сходимость итеративного процесса [1]. С другой стороны сходимость [1] может быть доказана рассуждениями аналогичными доказательству теоремы 1.

Теорема 2. *Если $F(x, y)$ — непрерывная, строго выпуклая по x и строго вогнутая по y функция, X, Y — выпуклые компакты, то*

$$\lim_{n \to \infty} \tilde{x}_n = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{n} = x^*, \qquad \lim_{n \to \infty} \tilde{y}_n = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{y_k}{n} = y^*,$$

где $(x^*, y^*) \in X \times Y$ — седловая точка функции $F(x, y)$ на $X \times Y$,
$\{\tilde{x}_n, \tilde{y}_n\}$ — последовательности построенные по правилу [2], *а*
$\{x_n, y_n\}$ — посделовательности построенные ио правилу [1].

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$V(\tilde{x}_n, \tilde{y}_n) = F(\tilde{x}_n, \psi(\tilde{x}_n)) - F(\varphi(\tilde{y}_n), \tilde{y}_n \geq 0,$$

(равенство нулю выполняется только в седловой точке $(x^*, y^*) \in X - Y$). Аналогично предыдущему доказательству при

$$\tilde{x}(\alpha) = \tilde{x}_n + \alpha(\varphi(\tilde{y}_n) - \tilde{x}_n), \qquad \tilde{y}(\alpha) = y_n + \alpha(\psi(\tilde{x}_n) - \tilde{y}_n)$$

можно получить

$$V(\tilde{x}(\alpha), \tilde{y}(\alpha)) \leq (1 - \alpha)\, V(\tilde{x}_n, \tilde{y}_n) + \alpha[F(\varphi(\tilde{y}_n), \psi(\tilde{x}(\alpha))) - F(\varphi(\tilde{y}(\alpha)), \psi(\tilde{x}_n))]$$

и

$$\frac{\partial V(\tilde{x}(\alpha), \tilde{y}(\alpha))}{\partial g} = \lim_{\alpha \to 0} \frac{V(\tilde{x}(\alpha), \tilde{y}(\alpha)) - V(\tilde{x}_n, \tilde{y}_n)}{\alpha} \leq -V(\tilde{x}_n, \tilde{y}_n) \leq 0,$$

равенство указанной производной по направлению $g = (\varphi(\tilde{y}_n) - \tilde{x}_n) \times (\psi(\tilde{x}_n) - - \tilde{y}_n)$ нулю выполняется только в седловой точке.

Так как

$$V(\tilde{x}_{n+1}, \tilde{y}_{n+1}) \leq \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) V(\tilde{x}_n, \tilde{y}_n) +$$
$$+ \frac{1}{n+1}[F(\varphi(\tilde{y}_n), \psi(\tilde{x}_{n+1})) - F(\varphi(\tilde{y}_{n+1}), \quad \psi(\tilde{x}_n))]$$

продолжая неравенство до $\tilde{x}_1, \tilde{y}_1$ получаем

$$V(\tilde{x}_{n+1}, \tilde{y}_{n+1}) \leq \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\left(1 - \frac{1}{n}\right) V(\tilde{x}_{n-1}, \tilde{y}_{n-1}) +$$
$$+ \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\frac{1}{n}[F(\varphi(\tilde{y}_{n-1}), \psi(\tilde{x}_n)) - F(\varphi\tilde{y}_n, \psi(\tilde{x}_{n-1}))] +$$
$$+ \frac{1}{n+1}[F(\varphi(\tilde{y}_n), \psi(\tilde{x}_{n+1})) - F(\varphi(\tilde{y}_{n+1}), \psi(\tilde{x}_n))] =$$
$$= \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\left(1 - \frac{1}{n}\right) V(\tilde{x}_{n-1}, \tilde{y}_{n-1}) +$$
$$+ \frac{1}{n+1}[F(\varphi(\tilde{y}_{n-1}), \psi(\tilde{x}_n)) - F(\varphi(\tilde{y}_n), \psi(\tilde{x}_{n-1}))] +$$
$$+ \frac{1}{n+1}[F(\varphi(\tilde{y}_n), \psi(\tilde{x}_{n+1})) - F(\varphi(\tilde{y}_{n+1}), \psi(\tilde{x}_n))] \leq$$
$$\leq \prod_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{1}{k+1}\right) V(\tilde{x}_1\tilde{y}_1) + \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n}[F(\varphi(\tilde{y}_k), \psi(\tilde{x}_{k+1})) - F(\varphi(\tilde{y}_{k+1}), \psi(\tilde{x}_k))]$$

Если $F(x, y)$ непрерывная, строго выпуклая по x и строго вогнутая по y функция, то φ, ψ — непрерывные функции. Величины $\varphi(\tilde{y}_n) - \tilde{x}_n$, $\psi(\tilde{x}_n) - \tilde{y}_n$ ограничены в силу компактности множеств X и Y.

Поэтому

$$\lim_{n\to\infty}(\tilde{x}_{n+1}-\tilde{x}_n)=\lim_{n\to\infty}\left(\tilde{x}_n+\frac{1}{n+1}(\varphi(\tilde{y}_n)-\tilde{x}_n)-\tilde{x}_n\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}(\varphi(\tilde{y}_n)-\tilde{x}_n)=0$$

$$\lim_{n\to\infty}(\tilde{y}_{n+1}-\tilde{y}_n)=\lim_{n\to\infty}\left(\tilde{y}_n+\frac{1}{n+1}(\psi(\tilde{x}_n)-\tilde{y}_n)-\tilde{y}_n\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}(\psi(\tilde{x}_n)-\tilde{y}_n)=0.$$

Непрерывная функция, заданная на компактном множестве будет на этом множестве и равномерно непрерывна. Поэтому для $\forall\varepsilon>0$

$$\exists\,\delta=\delta(\varepsilon)\mid\forall\,x',x''\in X,\ |x'-x''|<\delta\Rightarrow|\Psi(x')-\Psi(x'')|<\varepsilon.$$

Откуда следует, что

$$\lim_{n\to\infty}(\psi(\tilde{x}_{n+1})-\psi(\tilde{x}_n))=0.$$

Аналогично

$$\lim_{n\to\infty}(\varphi(\tilde{y}_{n+1})-\varphi(\tilde{y}_n))=0.$$

Функция $F(x,y)$ непрерывна на выпуклом компакте X по x, а на выпуклом компакте Y по y, а следовательно и равномерно непрерывна на X и на Y. Это значит, что

$$\lim_{n\to\infty}|F(\varphi(\tilde{y}_n),\psi(\tilde{x}_{n+1}))-F(\varphi(\tilde{y}_n),\psi(\tilde{x}_n))|=$$

$$=\lim_{n\to\infty}|F(\varphi(\tilde{y}_n),\psi(\tilde{x}_n))-F(\varphi(\tilde{y}_{n+1}),\psi(x_n))|=0$$

и

$$\lim_{n\to\infty}|F(\varphi(\tilde{y}_n),\psi(\tilde{x}_{n+1}))-F(\varphi(\tilde{y}_{n+1}),\psi(\tilde{x}_n))|=0.$$

Поэтому для любого сколь угодно малого $\varepsilon>0$ существует конечный номер N такой, что для любого $n\geq N$

$$|F(\varphi(\tilde{y}_n),\psi(\tilde{x}_{n+1}))-F(\varphi(\tilde{y}_{n+1}),\psi(\tilde{x}_n))|\leq\varepsilon.$$

Продолжая оценивать значение предела

$$\lim_{n\to\infty}V(\tilde{x}_{n+1},\tilde{y}_{n+1})\leq\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{1}{k+1}\right)V(\tilde{x}_1,\tilde{y}_1)+$$

$$+ \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{N} [F(\varphi(\tilde{y}_k), \psi(\tilde{x}_{k+1})) - F(\varphi(\tilde{y}_{k+1}), \psi(\tilde{x}_k))] +$$

$$+ \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} \sum_{k=N+1}^{n} [F(\varphi(\tilde{y}_k), \psi(\tilde{x}_{k+1})) - F(\varphi(\tilde{y}_{k+1}), \psi(\tilde{x}_k))].$$

Величина $F(\varphi(\tilde{y}_k), \psi(\tilde{x}_{k+1})) - F(\varphi(\tilde{y}_{k+1}), \psi(\tilde{x}_k))$ при $k < N$ ограничена некоторой константой $C > 0$ а при $k \geq N$

$$F(\varphi(\tilde{y}_k), \psi(\tilde{x}_{k+1})) - F(\varphi(\tilde{y}_{k+1}), \psi(\tilde{x}_k)) \leq \varepsilon.$$

Кроме того $\prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{k+1}\right) = \frac{n}{n+1} \cdot \frac{n-1}{n} \dots \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{n+1}$, а $V(\tilde{x}_1, \tilde{y}_1)$ — положительная константа, поэтому

$$\lim_{n\to\infty} V(\tilde{x}_{n+1}, \tilde{y}_{n+1}) \leq \lim_{n\to\infty} \frac{NC}{n+1} + \lim_{n\to\infty} \frac{n-N-1}{n}. \qquad \varepsilon \lesssim \varepsilon.$$

Последнее неравенство выполняется для любого сколь угодно малого $\varepsilon > 0$, что означает $\lim\limits_{n\to\infty} V(\tilde{x}_{n+1}, \tilde{y}_{n+1}) = 0$. А так как $V(\tilde{x}, \tilde{y}) > 0$ и равна нулю только в седловой точке $(x^*, y^*) \in X \times Y$ функции $F(x, y)$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \tilde{x}_n = x^*$, $\lim\limits_{n\to\infty} \tilde{y}_n = y^*$, а также

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{n} = x^*, \qquad \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{y_k}{n} = y^*.$$

Утверждение теоремы доказано. Сходимость указанного процесса может быть не монотонной.

Пусть $F(x, y)$ — непрерывная, выпуклая по x и вогнутая по y функция, X, Y — выпуклые компакты. Добавляя малый квадратичный член можно рассмотреть строго выпукло-вогнутую функцию

$$F_1(x, y) = F(x, y) + \delta(x^2 - y^2).$$

Применяя итеративный метод [1] можно найти седловую точку функции $F_1(x, y)$, которая при специально подобранном $\delta > 0$ будет ε-оптимальной (ε-седловой) точкой функции $F(x, y)$.

В случае выпукло-вогнутой функции $F(x, y)$, $\varphi(y) \in X$, $\psi(x) \subset Y$ представляют собой выпуклые множества, а отображения φ, ψ являются точечно-множественными отображениями, поэтому [2] в этом случае принимает вид

$$\text{(6)} \quad \begin{aligned} &\tilde{x}_1 \text{ — произвольно}, \quad \tilde{x}_{n+1} = \tilde{x}_n + \frac{1}{n+1}(p_n - \tilde{x}_n),\ p_n \in \varphi(\tilde{y}_n), \\ &\tilde{y}_1 \text{ — произвольно}, \quad \tilde{y}_{n+1} = \tilde{y}_n + \frac{1}{n+1}(q_n - \tilde{y}_n),\ q_n \in \psi(\tilde{x}_n). \end{aligned}$$

В [6] элементы $p_n \in \varphi(\tilde{y}_n)$, $q_n \in \psi(\tilde{x}_n)$ выбираются произвольно, поэтому доказательство сходимости процесса [6] к множеству седловых точек функции $F(x, y)$ на $X \times Y$ становится проблематичным. Общего доказательства сходимости [6] для выпукло-вогнутых функций автору пока не известно. Справедливо следующее утверждение.

Теорема 3. *Если $F(x, y)$, $x \in X$, $y \in Y$ — непрерывная, выпуклая по x и вогнутая по y* функция, *X, Y — выпуклые компакты и если существует такой способ выбора членов последовательностей $\{p_n\}$, $\{q_n\}$ что $\lim_{n\to\infty}(p_{n+1} - p_n) = 0$, $\lim_{n\to\infty}(q_{n+1} - q_n) = 0$ то при таком выборе p_n, q_n $n = 1, \ldots, \infty$ имеет место*

$$\lim_{n\to\infty} \varrho\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{xk}{n}, \sum_{k=1}^{n} \frac{yk}{n}, \Omega\right) = 0.$$

Здесь $\Omega \subset X \times Y$ — множество седловых точек функции $F(x, y)$ на множествах X, Y.

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$V(\tilde{x}_n, \tilde{y}_n) = F(\tilde{x}_n, q_n) - F(p_n, \tilde{y}_n) \geq$$
$$\geq \min_X \max_Y F(x, y) - \max_Y \min_X F(x, y) \geq 0.$$

Равенство нулю выполняется только на точках множества Ω. Далее

$$V(\tilde{x}_{n+1}, \tilde{y}_{n+1}) \leq \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) V(\tilde{x}_n, \tilde{y}_n) + \frac{1}{n+1}(F(p_n, q_{n+1}) - F(p_{n+1}, q_n)) \leq$$
$$\leq \prod_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{1}{k+1}\right) V(\tilde{x}_1, \tilde{y}_1) + \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n}[F(p_k, q_{k+1}) - F(p_{k+1}, q_k)].$$

Функция $F(x, y)$ непрерывна по x на выпуклом компакте X и непрерывна по y на выпуклом компакте Y. Следовательно $F(x, y)$ на X, Y и равномерно непрерывна. Поэтому из того, что

$$\lim_{n\to\infty}(p_{n+1} - p_n) = 0, \qquad \lim_{n\to\infty}(q_{n+1} - q_n) = 0$$

следует, что

$$\lim_{n\to\infty}(F(p_k, q_{k+1}) - F(p_{k+1}, q_k)) =$$
$$= \lim_{n\to\infty}(F(p_k, q_{k+1}) - F(p_k, q_k) + F(p_k, q_k) - F(p_{k+1}, q_k)) = 0.$$

Следовательно, для любого сколь малого $\varepsilon > 0$ существует конечный номер N такой, что для любого $k \geq N$

$$|F(p_k, q_{k+1}) - F(p_{k+1}, q_k)| \leq \varepsilon.$$

Откуда

$$\lim_{n\to\infty} V(\tilde{x}_{n+1}, \tilde{y}_{n+1}) \leq \lim_{n\to\infty} \frac{NC}{n+1} + \lim_{n\to\infty} \frac{n-N}{n+1} \cdot \varepsilon \leq \varepsilon$$

для любого сколь угодно малого $\varepsilon > 0$. Величина

$$F(p_k, q_{k+1}) - F(p_{k+1}, q_k) \leq \max_Y F(p_k, y) - \min_X F(x, q_k) \leq C \qquad (C = \text{const} > 0),$$

так как указанные максимум и минимум достигаются. Следовательно $\lim_{n\to\infty} V(\tilde{x}_n, \tilde{y}_n) = 0$, что означает $\lim_{n\to\infty} \varrho((\tilde{x}_n, \tilde{y}_n), \Omega) = 0$.

Таким образом при указанном выборе $\{p_n\}$, $\{q_n\}$ последовательность точек $\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{n}$, $\sum_{k=1}^{n} \frac{y_k}{n}$ из множества $X \times Y$ сходится по расстоянию к множеству седловых точек Ω.

Одним из способов выбора p_{n+1}, q_{n+1} на $n+1$ шаге обеспечивающем сходимость является, по-видимому, выбор p_{n+1}, q_{n+1} по правилу

$$p_{n+1} = \arg \min_{p \in \varphi(y_n)} \varrho(p, p_n),$$

$$q_{n+1} = \arg \min_{q \in \psi(x_n)} \varrho(q, q_n).$$

ЛИТЕРАТУРА

[1] Д. Ж. Данскин, *Итеративный метод решения непрерывных игр*, В сб. Бесконечные антагонические игры, М., 1963, 123—132.

[2] В. З. Беленький, В. А. Волконский, *Итеративные методы в теории игр и программировании*, М., 1974.

[3] М. Б. Ласкин, *Обоснование сходимости метода Брауна для выпукло-вогнутых функций с помощью функции Ляпунова*, ENLARGED ABSTRACTS, EQUADIFF-6, Brno, ČSSR, 1985, p. 79—80.

Михаил Борисович Ласкин
Ленинградская лесотехническая академия имени С. М. Кирова
кафедра высшей математики
Институтский пр. д. 5
Ленинград
СССР.