Karel Koutský; Václav Polák

Poznámka o postradatelných bodech v úplných sestavách bodů a přímek v rovině

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 85 (1960), No. 1, 60--69

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/108121`

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 85 (1960), Praha

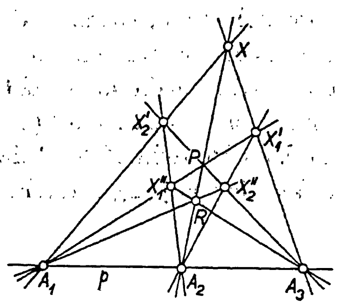
POZNÁMKA O POSTRADATELNÝCH BODECH V ÚPLNÝCH SESTAVÁCH BODŮ A PŘÍMEK V ROVINĚ

KAREL KOUTSKÝ a VÁCLAV POLÁK, Brno

(Došlo dne 13. března 1959)

Práce studuje úplné sestavy (S, $\mathfrak{P}$) bodů a přímek v rovině, u nichž všechny postradatelné body leží na přímce. Je-li těchto postradatelných bodů h ($\geqq 3$) a body množiny S neleží na přímce, platí kard S $\geqq 3h$ (věta 1). Dále se ukazuje, že k h ($\geqq 3$) libovolně zvoleným různým bodům na přímce existuje netriviální úplná sestava (S, $\mathfrak{P}$), která má tyto body za všechny své body postradatelné (věta 2).

Řekneme, že uspořádaná dvojice (S, $\mathfrak{P}$) je *úplná sestava bodů a přímek v rovině*[1]) (v dalším jen úplná sestava), jestliže S je konečná neprázdná množina bodů v euklidovské rovině a $\mathfrak{P}$ je množina všech přímek, na nichž leží alespoň dva různé body množiny S. Dva různé body A, B množiny S určují přímku množiny $\mathfrak{P}$, kterou značíme $p(A, B)$. Jestliže přímka $p \in \mathfrak{P}$ obsahuje pouze dva body z S, nazývá se *prostá*. Bod množiny S, který leží alespoň na jedné prosté přímce, se nazývá *nepostradatelný*. Jinak se nazývá *postradatelný*.



Obr. 1.

Práce studuje úplné sestavy (S, $\mathfrak{P}$), u kterých existuje přímka $p \in \mathfrak{P}$, na níž leží všechny postradatelné body, neleží však na ní všechny body z S. Nechť počet postradatelných bodů je h. Studujme případ $h \geqq 3$.

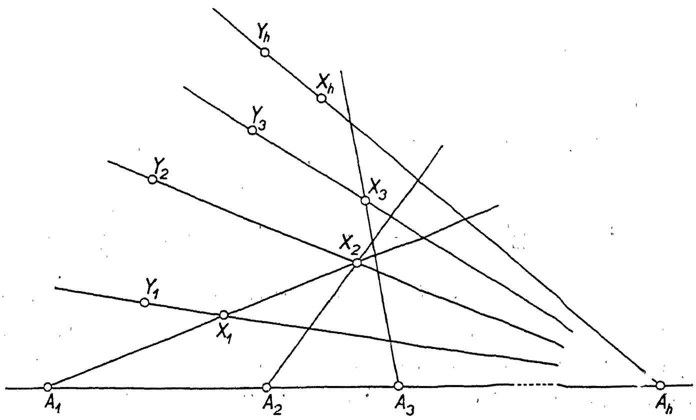
Příklad. Pro každé přirozené $h \geqq 3$ existuje úplná sestava (S, $\mathfrak{P}$) s uvedenými vlastnostmi a taková, že kard S $= 3h$. Nechť např. $X_1, \ldots, X_{2h}$ jsou po sobě jdoucí vrcholy pravidelného konvexního $2h$-úhelníka. Označme $U_1, \ldots, U_h$ úběžné body přímek $p(X_1, X_2), \ldots, p(X_h, X_{h+1})$. Nechť f je kolineace v rovině taková, že množina $S = \{f(X_1), \ldots, f(X_{2h}), f(U_1), \ldots, f(U_h)\}$ je ohraničená. Taková kolineace f zřejmě existuje. Body $A_i = f(U_i)$ leží vesměs v jedné

[1]) Tyto sestavy jsou studovány např. v práci: KELLY, L. M., MOSER, W. O.: On the number of ordinary lines determined by n points. Canad. J. Math. *10* (1958), 210—219.

přímce a tvoří množinu všech postradatelných bodů hledané úplné sestavy $(\mathsf{S}, \mathfrak{P})$ (viz obr. 1).

Následující věta ukazuje, že uvedené příklady mají minimální počet bodů.

Věta 1. *Nechť $h \geqq 3$ je přirozené číslo, $(\mathsf{S}, \mathfrak{P})$ úplná sestava, která obsahuje právě h postradatelných bodů a nechť všechny tyto body leží na jedné přímce. Nechť body množiny S neleží vesměs na této přímce. Pak* kard $\mathsf{S} \geqq 3h$.



Obr. 2.

Důkaz. Nechť $A_1, \ldots, A_h$ jsou postradatelné body, p přímka, na níž všechny leží.

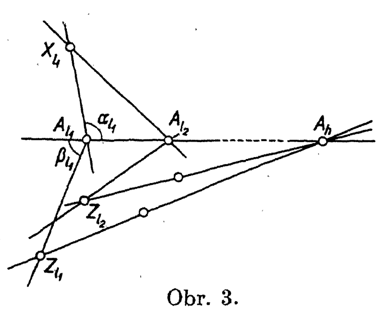
1. Nechť body množiny $\mathsf{S} - p$ leží vesměs na jedné polorovině určené přímkou p. Orientujme přímku p tak, že tato polorovina je po levé straně a pořadí postradatelných bodů na přímce ve smyslu této orientace je $A_1, \ldots, A_h$. Označme p_1 polopřímku vycházející z A_1, obsahující alespoň jeden bod $X \in \mathsf{S} -$ $- p$ a takovou, že ze všech takových polopřímek má úhel $\alpha_1 = \sphericalangle A_hA_1X$ nejmenší hodnotu (měříme ve smyslu proti směru ručiček hodinových). Nechť X_1 je bod množiny $(\mathsf{S} - p) \cap p_1$, který je nejblíže bodu A_1 (obr. 2). Podobně definujme polopřímky p_j a body X_j $(j = 2, \ldots, h)$. Poněvadž na každé polopřímce p_j leží alespoň dva body množiny $\mathsf{S} - p$, jsou body X_j vesměs navzájem různé a úhly α_j tvoří ostře rostoucí posloupnost. Přímky $p(A_h, X_j)$ tvoří svazek h různých přímek procházejících bodem A_h. Poněvadž tento bod je postradatelný, leží na každé přímce $p(A_h, X_j)$ ještě třetí bod $Y_j \in \mathsf{S} - p$ a věta platí.

2. Nechť body množiny $\mathsf{S} - p$ leží po obou stranách přímky p. Orientujme přímku p a označme π_1 resp. π_2 levou resp. pravou polorovinu určenou přímkou p. Nechť pořadí postradatelných bodů na přímce ve smyslu této orientace je $A_1, \ldots, A_h$. Proveďme hořejší konstrukci polopřímek p_j a bodů X_j pro body množiny $(\mathsf{S} - p) \cap \pi_1$. Jestliže X_j jsou vesměs různé body pro $j = 1, 2, \ldots, h$ — jsme hotovi (postupujeme analogicky jako v případě 1). Nechť některé tyto

body splynou. Pak v množině $\{1, 2, \ldots, h\}$ existuje neprázdná část N taková, že pro každé $i \in N$ existuje $j \neq i$, $j \in N$ tak, že $X_i \equiv X_j$ a taková, že ze všech podmnožin s uvedenou vlastností je množina N maximální. Nechť $N = \{l_1, l_2, \ldots, l_r\}$, $l_1 < l_2 < \ldots < l_r$. Nechť $i < i'$ a $X_i \equiv X_{i'}$. Pak zřejmě pro všechna přirozená j, $i \leqq j \leqq i'$ platí $j \in N$ a $X_j \equiv X_i$. Odtud plyne existence přirozených čísel $t \geqq 1$ a $r_i \geqq 2$, $i = 1, 2, \ldots, t$ tak, že $X_{l_1} \equiv X_{l_2} \equiv \ldots \equiv X_{l_{r_1}} \not\equiv X_{l_{r_1+1}} \equiv \equiv \ldots \equiv X_{l_{r_1+r_2}} \not\equiv X_{l_{r_1+r_2+1}} \equiv \ldots \not\equiv X_{l_{\sum_{i=1}^{t-1} r_i+1}} \equiv \ldots \equiv X_{l_{\sum_{i=1}^{t} r_i}}$. Zřejmě dále platí $2 \leqq \sum_{i=1}^{t} r_i = r \leqq h$ a

$$1 \leqq l_1,\ l_2 = l_1 + 1,\ \ldots,\ l_{r_1} = l_1 + r_1 - 1\,,$$
$$1 + l_{r_1} \leqq l_{r_1+1},\ l_{r_1+2} = l_{r_1+1} + 1,\ \ldots,\ l_{r_1+r_2} = l_{r_1+1} + r_2 - 1\,,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$1 + l_{\sum_{i=1}^{t-1} r_i} \leqq l_{\sum_{i=1}^{t-1} r_i+1},\ l_{\sum_{i=1}^{t-1} r_i+2} = l_{\sum_{i=1}^{t-1} r_i+1} + 1,\ \ldots,\ l_{\sum_{i=1}^{t} r_i} = l_{\sum_{i=1}^{t-1} r_i+1} + r_t - 1\,.$$

Množina $\{1, 2, \ldots, h\} - N$ (pokud není prázdná) nechť sestává z čísel $k_1, k_2, \ldots, k_s$, kde $k_1 < k_2 < \ldots < k_s$. Tedy $h = r + s$. Body X_{k_i} $(i = 1, 2, \ldots, s)$ spolu s bodem X_{l_1} jsou vesměs různé a určují $s + 1$ různých přímek vycházejících z A_h. Na každé z nich existuje ještě třetí bod množiny S, takže již máme zaručeno $2s + 2$ bodů z $\mathsf{S} - p$. Na polopřímce opačné k polopřímce p_{l_1} existuje alespoň jeden bod množiny $(\mathsf{S} - p) \cap \pi_2$ (obr. 3). Označme q_{l_1} polopřímku vycházející z bodu A_{l_1}, obsahující alespoň jeden bod X množiny $(\mathsf{S} - p) \cap \pi_2$ a takovou, že ze všech takových přímek má úhel $\beta_{l_1} = 180° - \sphericalangle XA_{l_1}A_h$ nejmenší hodnotu. Zřejmě $\beta_{l_1} \leqq \alpha_{l_1}$. Označme Z_{l_1} bod množiny $(\mathsf{S} - p) \cap q_{l_1}$ nejbližší bodu A_{l_1}. Obdobně zkonstruujme body Z_{l_j} $(j = 2, \ldots, r - 1)$. Tyto body jsou vesměs různé a určují $r - 1$ různých přímek vycházejících z A_h. Žádná z těchto přímek neobsahuje body množiny $(\mathsf{S} - p) \cap \pi_1$ a tedy musí existovat na každé z nich alespoň ještě jeden další bod množiny $(\mathsf{S} - p) \cap \pi_2$. Tím máme v polorovině π_2 nalezeno $2r - 2$ bodů množiny $\mathsf{S} - p$ a tedy kard $(\mathsf{S} - p) \geqq 2h$ a věta je dokázána.



Obr. 3.

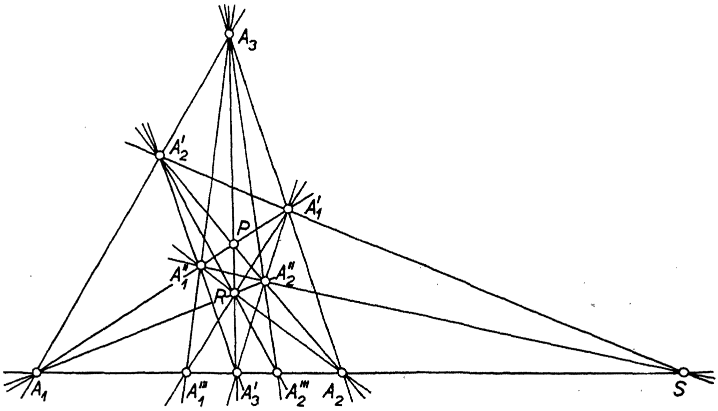
Naskýtá se otázka, sestrojit k předem daným h $(\geqq 3)$ různým bodům na přímce úplnou sestavu tak, aby její body neležely vesměs na přímce a ony předem dané body byly právě všechny její body postradatelné. Následující věta kladně odpovídá na položenou otázku.

Věta 2. *Nechť je dáno na přímce h $(\geqq 3)$ různých bodů. Pak existuje úplná sestava $(\mathsf{S}, \mathfrak{P})$ tak, že všechny její body neleží v jedné přímce a uvedené body jsou všechny její body postradatelné.*

Ke konstrukci takové úplné sestavy potřebujeme předběžné úvahy.

Lemma 1. *Nechť P je bod ležící uvnitř trojúhelníka A_1, A_2, A_3. Nechť $A_1' = p(P, A_1) \cap p(A_2, A_3)$, $A_2' = p(P, A_2) \cap p(A_1, A_3)$, $A_3' = p(P, A_3) \cap p(A_1, A_2)$. Nechť $A_1'' = p(P, A_1) \cap p(A_2', A_3')$, $A_2'' = p(P, A_2) \cap p(A_1', A_3')$ a nechť $A_1''' = p(A_1, A_2) \cap p(A_1'', A_3)$, $A_2''' = p(A_1, A_2) \cap p(A_2'', A_3)$. Potom*

(a) *přímky $p(P, A_3)$, $p(A_1, A_2'')$, $p(A_2, A_1'')$, $p(A_1', A_1''')$, $p(A_2', A_2''')$ se protínají v jednom bodě R,*



Obr. 4.

(b) *přímky $p(A_1, A_2)$, $p(A_1', A_2')$, $p(A_1'', A_2'')$ se buď protínají v jednom bodě S nebo jsou spolu rovnoběžné.*

Důkaz. Nechť P leží uvnitř trojúhelníka A_1, A_2, A_3. Pak body P, A_1, A_2, A_3 jsou vesměs různé. Snadno nahlédneme, že body $A_1', A_2', A_3', A_1'', A_2'', A_1''', A_2'''$ skutečně existují a že jsou různé jak mezi sebou, tak i od bodů P, A_1, A_2, A_3. Odtud následuje, že všechny přímky, o nichž se mluví v tvrzení (a) i (b), jsou jednoznačně určeny (viz obr. 4). Snadno lze zjistiti, že žádné tři z bodů P, A_2, A_1', A_3' neleží v jedné přímce. Tyto čtyři body tedy určují úplný čtyřroh. Jest pak dále ihned patrno, že body A_1, A_3, A_2'' jsou jeho diagonálními body. Podle známých projektivních vlastností úplného čtyřrohu je čtveřice přímek $p(P, A_1)$, $p(A_1, A_3')$, $p(A_1, A_3)$, $p(A_1, A_2'')$ harmonická. Budiž nyní R' průsečík přímek $p(A_3, A_3')$, $p(A_1, A_2'')$. Tento průsečík vždy existuje, neboť lze snadno nahlédnouti, že body A_1, A_2'' leží v různých polorovinách vyťatých přímkou $p(A_3, A_3')$. Průnik zmíněné harmonické čtveřice přímek s přímkou $p(A_3, A_3')$ je bodová čtveřice P, A_3', A_3, R'. Nutně tedy tato bodová čtveřice je též harmonická, tj. platí $(P, A_3', A_3, R') = -1$.[2]) Dále se zjistí, že žádné tři z bodů P, A_1, A_2', A_3' neleží v jedné přímce. Tyto čtyři body tedy rovněž určují úplný

[2]) Pro čtyři body A, B, C, D, ležící v jedné přímce, značí (A, B, C, D) jejich dvojpoměr. Tedy $(A, B, C, D) = \dfrac{\overline{AC}}{\overline{BC}} : \dfrac{\overline{AD}}{\overline{BD}}$.

čtyřroh. Diagonální jeho body jsou A_2, A_3, A_1'. Čtveřice přímek $p(P, A_2)$, $p(A_2, A_3')$, $p(A_2, A_3)$, $p(A_2, A_1'')$ je tedy nutně harmonická. Budiž nyní R'' průsečík přímek $p(A_3, A_3')$, $p(A_2, A_1'')$. Tento průsečík vždy existuje, neboť lze snadno nahlédnouti, že body A_2, A_1'' leží v různých polorovinách vyťatých přímkou $p(A_3, A_3')$. Průnik předešlé harmonické čtveřice přímek s přímkou $p(A_3, A_3')$ je pak bodová čtveřice P, A_3', A_3, R''. Ta ovšem nutně musí býti též harmonická, takže platí $(P, A_3', A_3, R'') = -1$. Z obou získaných relací $(P, A_3', A_3, R') = -1$, $(P, A_3', A_3, R'') = -1$ nutně následuje $R' = R''$. Označíme-li tento bod písmenem R (jak je uděláno v obrázku), plyne z předcházejícího, že přímky $p(A_3, A_3') = p(P, A_3)$, $p(A_1, A_2'')$, $p(A_2, A_1'')$ se protínají v bodě R, čímž je dokázána část tvrzení (a).

Abychom dokázali celé tvrzené (a), stačí dokázat, že přímky $p(A_1', A_1''')$, $p(A_2', A_2''')$ procházejí bodem R. Především je z předešlého patrno, že platí $(P, A_3', A_3, R) = -1$. Dále se poměrně snadno nahlédne, že bod R je různý od každého z bodů $P, A_1, A_2, A_3, A_1', A_2', A_3', A_1'', A_2'', A_1''', A_2'''$. Nyní je patrné, že bod A_1'' neleží ani na přímce $p(A_3, A_3')$, ani na přímce $p(A_1, A_2)$. Promítneme-li pak harmonickou čtveřici bodů P, A_3', A_3, R z bodu A_1'' do přímky $p(A_1, A_2)$, dostaneme bodovou čtveřici A_1, A_3', A_1''', A_2, jež je nutně též harmonická. Platí tedy $(A_1, A_3', A_1''', A_2) = -1$. Lehce dále zjistíme, že přímky $p(A_1, A_1''')$, $p(A_3, A_3')$ se protínají v nějakém bodě R_1. To plyne z toho, že body A_1', A_1''' leží v různých polorovinách vyťatých přímkou $p(A_3, A_3')$. Nyní ale bod A_1' neleží ani na přímce $p(A_1, A_2)$, ani na přímce $p(A_3, A_3')$. Promítneme-li nyní harmonickou čtveřici A_1, A_3', A_1''', A_2 z bodu A_1', do přímky $p(A_3, A_3')$, dostaneme bodovou čtveřici P, A_3', R_1, A_3, která nutně je též harmonická. Bude tedy platit $(P, A_3', R_1, A_3) = -1$ a tedy též $(P, A_3', A_3, R_1) = -1$. Z obou relací $(P, A_3', A_3, R) = -1$, $(P, A_3', A_3, A_1) = -1$ pak ihned plyne $R_1 = R$. Podle definice bodu R_1 to ale znamená, že přímka $p(A_1', A_1''')$ prochází bodem R.

Dále zjistíme, že bod A_2'' neleží ani na přímce $p(A_3, A_3')$, ani na přímce $p(A_1, A_2)$. Promítneme-li nyní harmonickou čtveřici P, A_3', A_3, R z bodu A_2'' do přímky $p(A_3, A_3')$, dostaneme harmonickou čtveřici A_2, A_3', A_2''', A_1. Platí tedy $(A_2, A_3', A_2''', A_1) = -1$. Lehce se zjistí, že přímky $p(A_2', A_2''')$, $p(A_3, A_3')$ se protínají v nějakém bodě R_2. To plyne z toho, že body A_2', A_2''' leží v různých polorovinách vyťatých přímkou $p(A_3, A_3')$. Nyní ale bod A_2' neleží ani na přímce $p(A_1, A_2)$, ani na přímce $p(A_3, A_3')$. Promítneme-li tedy harmonickou čtveřici A_2, A_3', A_2''', A_1 z bodu A_2' do přímky $p(A_3, A_3')$, dostaneme bodovou čtveřici P, A_3', R_2, A_3, která musí být rovněž harmonická. Platí tedy $(P, A_3', R_2, A_3) = -1$ a tedy též $(P, A_3', A_3, R_2) = -1$. Z obou relací $(P, A_3', A_3, R) = -1$, $(P, A_3', A_3, R_2) = -1$ pak ihned plyne $R_2 = R$. Podle definice bodu R_2 to ale znamená, že přímka $p(A_2', A_2''')$ prochází bodem R. Tím je tvrzení (a) úplně dokázáno.

Důkaz tvrzení (b) provedeme v projektivní rovině a pak teprve přejdeme k obyčejné rovině euklidovské.

Budiž S průsečík přímek $p(A_1, A_2)$, $p(A_1', A_2')$ (bod S může ovšem být i nevlastním bodem). Všimněme si nyní úplného čtyřrohu A_1, A_2, A_1', A_2'. Jeho diagonální body jsou A_3, S, P. Podle známých projektivních vlastností úplného čtyřrohu je čtveřice přímek $p(A_3, A_1)$, $p(A_3, A_2)$, $p(A_3, P)$, $p(A_3, S)$ harmonická. Průsek této harmonické čtveřice přímek s přímkou $p(A_1, A_2)$ je bodová čtveřice A_1, A_2, A_3', S. Ta ovšem musí být též harmonická, takže platí $(A_1, A_2, A_3' S) = -1$. Budiž dále S' průsečík přímek $p(A_1, A_2)$, $p(A_1'', A_2'')$ (bod S' může případně být i nevlastním bodem). Všimněme si nyní úplného čtyřrohu A_1, A_2, A_2'', A_1''. Jeho diagonálními body jsou body P, R, S'. Ze známých projektivních vlastností úplného čtyřrohu pak plyne, že čtveřice přímek $p(P, A_1)$, $p(P, A_2)$, $p(P, R)$, $p(P, S')$ je harmonická. Ježto pak podle již dokázaného tvrzení (a) je $p(P, R) = p(A_3, A_3')$, je zřejmé, že průnik této harmonické čtveřice přímek s přímkou $p(A_1, A_2)$ je bodová čtveřice A_1, A_2, A_3', S'. Tato bodová čtveřice je též harmonická, takže platí $(A_1, A_2, A_3', S') = -1$.

Z obou získaných rovností $(A_1, A_2, A_3', S) = -1$, $(A_1, A_2, A_3', S') = -1$ ale okamžitě následuje $S' = S$. Přímky $p(A_1, A_2)$, $p(A_1', A_2')$, $p(A_1'', A_2'')$ mají v projektivní rovině společný bod S. Je-li tento bod S vlastním bodem, pak tyto přímky se protínají též v euklidovské rovině v bodě S. Je-li S nevlastní, jsou navzájem rovnoběžné. Tvrzení (b) je dokázáno. Důkaz lemmatu je hotov.

Lemma 2. *Nechť* $(\mathsf{S}, \mathfrak{P})$ *je úplná sestava, jejíž body neleží vesměs v přímce. Množinu všech jejích postradatelných bodů označme* H. *Nechť* kard $\mathsf{H} \geqq 3$ *a existuje přímka* p *tak, že* $\mathsf{H} \subset p$ *a* $\mathsf{S} \cap p = \mathsf{H}$. *Nechť na přímce* p *je dána množina* H' k $(\geqq 0)$ *dalších bodů tak, že žádným z nich neprochází ani jedna přímka množiny* $\mathfrak{P} - \{p\}$. *Pak existuje úplná sestava* $(\overline{\mathsf{S}}, \overline{\mathfrak{P}})$ *tak, že* $\mathsf{S} \subset \overline{\mathsf{S}}$ *a množina* $\overline{\mathsf{H}} = \mathsf{H} \cup \mathsf{H}'$ *tvoří množinu všech jejích postradatelných bodů.*

Důkaz provedeme úplnou indukcí podle k. Pro $k = 0$ lemma evidentně platí (neboť položíme $\overline{S} = S$). Nechť k je libovolné přirozené číslo a nechť naše lemma platí pro všechna $0 \leqq l < k$. Nechť $A \in \mathsf{H}'$ a $X \in \mathsf{S} - \mathsf{H}$.

Zřejmě každému vnitřnímu bodu Y úsečky $\overline{AX}$ přísluší právě jediná neidentická kolineace f, která má střed v bodě A, osu v přímce p a $f(X) = Y$. Položme $\mathsf{S}_1 = \mathsf{S} \cup f(\mathsf{S}) \cup \{A\}$ a sestrojme úplnou sestavu $(\mathsf{S}_1, \mathfrak{P}_1)$. Dokážeme, že bod Y lze zvolit tak, aby $(\mathsf{S}_1, \mathfrak{P}_1)$ byla úplná sestava, jejíž všechny postradatelné body tvoří množinu $\mathsf{H} \cup \{A\}$ a žádná přímka množiny $\mathfrak{P}_1 - \{p\}$ neprochází žádným bodem množiny $\mathsf{H}' - \{A\}$. Potom lemma snadno dokážeme, neboť kard $(\mathsf{H}' - \{A\}) = k - 1 < k$ a podle indukčního předpokladu existuje úplná sestava $(\overline{\mathsf{S}}, \overline{\mathfrak{P}})$ s požadovanými vlastnostmi.

Nechť Y_0 je libovolný vnitřní bod úsečky $\overline{AX}$ a f_0 příslušná kolineace. Položme $\mathsf{S}_1 = \mathsf{S} \cup f_0(\mathsf{S}) \cup \{A\}$ a sestrojme úplnou sestavu $(\mathsf{S}_1, \mathfrak{P}_1)$.

Množina $\mathfrak{P}_1$ sestává jednak z množiny $\mathfrak{P} \cup f_0(\mathfrak{P})$, jednak z množiny $\mathfrak{P}'$ přímek, které spojují některý bod množiny $\mathsf{S} - \mathsf{H}$ s některým bodem množiny $f_0(\mathsf{S} - \mathsf{H})$.

Množinu všech přímek úplné sestavy $(\mathsf{S}_1, \mathfrak{P}_1)$, které procházejí bodem A, označme $\mathfrak{P}_1(A)$. Zřejmě $(\mathfrak{P}_1(A) - \{p\}) \subset \mathfrak{P}'$. Odtud plyne, že bod A je postradatelným bodem úplné sestavy $(\mathsf{S}_1, \mathfrak{P}_1)$. Zřejmě též každý bod množiny H je postradatelným bodem úplné sestavy $(\mathsf{S}_1, \mathfrak{P}_1)$.

Při spojitém pohybu bodu Y uvnitř úsečky $\overline{AX}$ se přímky množiny $f(\mathfrak{P}) - \{p\}$ spojitě otáčejí kolem svých průsečíků s přímkou p a každá z přímek množiny $\mathfrak{P}' - \mathfrak{P}_1(A)$ se spojitě otáčí kolem jistého bodu množiny $\mathsf{S} - \mathsf{H}$. Ostatní přímky množiny $\mathfrak{P}_1$, tj. přímky množiny $\mathfrak{P} \cup \mathfrak{P}_1(A)$ zůstávají pevné.

Žádným bodem množiny H' neprochází zřejmě přímka množiny $(\mathfrak{P} \cup f(\mathfrak{P})) - \{p\}$. Body množiny H' procházejí kromě přímky p nejvýše přímky množiny $\mathfrak{P}'$.

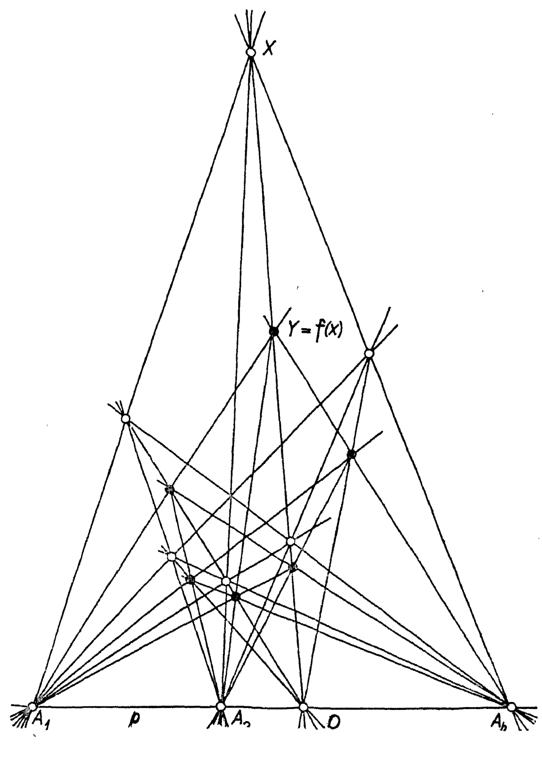
Vraťme se nyní k naší pevné kolineaci f_0. Nechť bodem $B \in \mathsf{H}' - \{A\}$ prochází přímka $t \in \mathfrak{P}_1 - \{p\}$. Pak zřejmě $t \in \mathfrak{P}'$. Přímka t se při spojitém pohybu bodu Y otáčí kolem jistého pevného bodu $T \in \mathsf{S} - \mathsf{H}$. Na úsečce $\overline{AX}$ existuje tedy okolí δ bodu Y_0 tak, že pro všechna $Y \in \delta - \{Y_0\}$ bude příslušná přímka t protínat přímku p nikoli v bodě B, ale v bodě, který leží dostatečně blízko bodu B. Poněvadž množiny H', $\mathfrak{P}'$ jsou konečné, lze okolí δ volit tak malé, že pro každé $Y \in \delta - \{Y_0\}$ příslušná množina $\mathfrak{P}_1 - \{p\}$ obsahuje vesměs přímky neprocházející žádným bodem množiny $\mathsf{H}' - \{A\}$. (Okolí δ sestrojíme jakožto průnik všech okolí sestrojených k jednotlivým nežádoucím případům.)

Nechť $q \in \mathfrak{P}$ je prostá přímka úplné sestavy $(\mathsf{S}, \mathfrak{P})$. Jestliže q není prostá v úplné sestavě $(\mathsf{S}_1, \mathfrak{P}_1)$, pak existuje bod $Z \in \mathsf{S}$ tak, že $f_0(Z) \in q$. Zřejmě $Z \bar{\in} \mathsf{H}$, $f_0(Z) \in p(A, Z)$. Podle předpokladu $A \bar{\in} q$. Jsou tedy přímky q, $p(A, Z)$ různé. Poněvadž se při spojitém pohybu bodu Y žádná z obou přímek nepohybuje, kdežto bod $f(Z)$ se pohybuje spojitě po přímce $p(A, Z)$, existuje na úsečce $\overline{AX}$ okolí δ' bodu Y_0 tak, že pro každé $Y \in \delta' - \{Y_0\}$ neleží bod $f(Z)$ na přímce q. Poněvadž jde o konečně mnoho případů, lze okolí δ' zvolit tak malé, aby přímka q byla prostá v úplné sestavě $(\mathsf{S}_1, \mathfrak{P}_1)$. Ba dokonce můžeme δ' zvolit tak malé, že každá prostá přímka úplné sestavy $(\mathsf{S}, \mathfrak{P})$ zůstane prostou též v úplné sestavě $(\mathsf{S}_1, \mathfrak{P}_1)$. (Okolí δ' sestrojíme jakožto průnik všech okolí sestrojených k jednotlivým nežádoucím případům.)

Nechť $q \in \mathfrak{P}$ je prostá přímka úplné sestavy $(\mathsf{S}, \mathfrak{P})$. Jestliže $f_0(q)$ není prostá v úplné sestavě $(\mathsf{S}_1, \mathfrak{P}_1)$, existuje bod $Z \in \mathsf{S}$ tak, že $Z \in f_0(q)$. Zřejmě $Z \bar{\in} \mathsf{H}$. Tedy Z neleží na přímce p. Spojitým pohybem bodu Y se přímka $f(q)$ spojitě otáčí kolem svého průsečíku s přímkou p. Odtud plyne, že na úsečce $\overline{AX}$ existuje okolí δ'' bodu Y_0 tak, že pro každé $Y \in \delta'' - \{Y_0\}$ bod Z neleží na $f(q)$. Poněvadž jde o konečně mnoho případů, lze okolí δ'' zvolit tak malé, aby pro každé $Y \in \delta'' - \{Y_0\}$ byla přímka $f(q)$ prostá v úplné sestavě $(\mathsf{S}_1, \mathfrak{P}_1)$. Z téhož důvodu lze okolí δ'' zvolit tak malé, že pro každé $Y \in \delta'' - \{Y_0\}$ a pro každou prostou přímku q úplné sestavy $(\mathsf{S}, \mathfrak{P})$ je $f(q)$ prostá v úplné sestavě $(\mathsf{S}_1, \mathfrak{P}_1)$.

Jestliže za bod Y zvolíme libovolný bod množiny $\delta \cap \delta' \cap \delta'' - \{Y_0\}$, bude mít příslušná úplná soustava $(S_1, \mathfrak{P}_1)$ za všechny své postradatelné body množinu $H \cup \{A\}$ a žádná z přímek množiny $\mathfrak{P}_1 - \{p\}$ nebude procházet žádným bodem množiny $H' - \{A\}$. Důkaz našeho lemmatu je hotov.

Důkaz věty 2. Množinu daných h bodů na přímce p označme H, jejich uspořádání na přímce zleva doprava nechť je $A_1, A_2, \ldots, A_h$ $(h \geqq 3)$. Pro trojici A_1, A_2, A_h sestrojme úplnou sestavu $(S, \mathfrak{P})$ následujícím způsobem: Zvolme



Obr. 5. [3]

libovolně bod X tak, aby neležel na přímce p (obr. 1). Na přímce $p(A_2, X)$ zvolme mezi body X, A_2 třetí bod P. Označme X_1' resp. X_2' průsečík přímek $p(A_h, X), p(P, A_1)$ resp. $p(A_1, X), p(P, A_h)$. Dále označme X_1'' resp. X_2'' průsečík přímek $p(A_1, X_1'), p(A_2, X_2')$ resp. $p(A_h, X_2'), p(A_2, X_1')$. Z našeho lemmatu 1 plyne, že přímky $p(A_2, X), p(A_h, X_1''), p(A_1, X_2'')$ se protínají v jednom bodě R. Položme $S = \{A_1, A_2, A_h, X, X_1', X_2', X_1'', X_2'', R\}$. Je patrno, že na přímce p bod $O = p \cap p(X, X_2'')$ je pevný a že leží na přímce $p(R, X_2')$ pro každou takto sestrojenou úplnou sestavu (neboť $(A_1, O, A_2, A_h) = -1$).

[3]) Body označené ● vznikají z bodů označených ○ popsanou kolineací.

Jestliže bod O je různý od všech bodů A_i, užijeme lemmatu 2. Jestliže pro některé A_{i_0} ($i_0 = 3, \ldots, h - 1$) je $O = A_{i_0}$, dokážeme, že existuje neidentická kolineace f se středem v O a osou p tak, že pro úplnou sestavu $(\mathsf{S}_1, \mathfrak{P}_1)$, kde $\mathsf{S}_1 = \mathsf{S} \cup f(\mathsf{S}) \cup \{O\}$, jsou splněny předpoklady lemmatu 2. Naše věta tím bude dokázána.

Všechny body A_i ($i = 3, 4, \ldots, i_0 - 1, i_0 + 1, \ldots, h - 1$) leží uvnitř úsečky $\overline{A_2A_h}$ a jsou různé od bodu O. Přímku p uvnitř úsečky $\overline{A_2A_h}$ protínají dvě prosté přímky úplné sestavy $(\mathsf{S}, \mathfrak{P})$ $p(X, X_2'')$, $p(R, X_2')$, a to obě v bodě O. Uvnitř úsečky $\overline{A_2A_h}$ kromě bodu O neexistuje již žádný další průsečík přímky p s některou přímkou množiny $\mathfrak{P}$.

Postupem naprosto stejným, jaký je uveden v důkazu lemmatu 2, lze vyhledat kolineaci f (obr. 5) tak, že úplná sestava $(\mathsf{S}_1, \mathfrak{P}_1)$, kde $\mathsf{S}_1 = \mathsf{S} \cup f(\mathsf{S}) \cup$ $\cup \{O\}$, má následující vlastnosti:

(α) Žádným bodem A_i ($i = 3, \ldots, i_0 - 1, i_0 + 1, \ldots, h - 1$) neprochází přímka množiny $\mathfrak{P}_1 - \{p\}$.

(β) Každá prostá přímka q úplné sestavy $(\mathsf{S}, \mathfrak{P})$, která neprochází bodem O, je prostá též v úplné sestavě $(\mathsf{S}_1, \mathfrak{P}_1)$ a rovněž přímka $f(q)$ je v této sestavě prostá. Zřejmě jediné dvě prosté přímky v úplné sestavě $(\mathsf{S}, \mathfrak{P})$, které přestanou být prosté v úplné sestavě $(\mathsf{S}_1, \mathfrak{P}_1)$, jsou $p(X, X_2'')$, $p(R, X_2')$. Poněvadž z každého bodu množiny $\{X, R, X_2', X_2''\}$ vychází jedna prostá přímka úplné sestavy $(\mathsf{S}, \mathfrak{P})$, jež neprochází bodem O, nemůže být žádný bod množiny $\{X, R, X_2',$ $X_2'', f(X), f(R), f(X_2'), f(X_2'')\}$ postradatelným bodem úplné sestavy $(\mathsf{S}_1, \mathfrak{P}_1)$. Z vlastnosti ($\beta$) plyne dále, že úplná sestava $(\mathsf{S}_1, \mathfrak{P}_1)$ má body A_1, A_2, A_{i_0}, A_h za jediné své postradatelné body. Předpoklady lemmatu 2 jsou splněny. Věta 2 je dokázána.

Резюме

ЗАМЕЧАНИЕ О ПРОПУСТИМЫХ ТОЧКАХ В ПОЛНЫХ СИСТЕМАХ ТОЧЕК И ПРЯМЫХ В ПЛОСКОСТИ

КАРЕЛ КОУТСКЫ (Karel Koutský) и ВАЦЛАВ ПОЛАК (Václav Polák), Брно

Полной системой точек и прямых в плоскости называется упорядоченная пара $(\mathsf{S}, \mathfrak{P})$ конечных множеств — множества S точек в плоскости и множества $\mathfrak{P}$ всех прямых, на которых лежат по крайней мере две точки множества S. Прямая $p \in \mathfrak{P}$ называется простой, когда card $(\mathsf{S} \cap p) = 2$. Точка $A \in \mathsf{S}$ называется пропустимой, когда она не лежит ни на одной простой прямой множества $\mathfrak{P}$.

В работе исследуются полные системы $(\mathsf{S}, \mathfrak{P})$ точек и прямых в плоскости, в которых все пропустимые точки лежат на одной прямой. Если H — множество всех пропустимых точек в $(\mathsf{S}, \mathfrak{P})$, card $\mathsf{H} = h \geqq 3$, и все точки множества S не лежат на одной прямой, то card $\mathsf{S} \geqq 3h$ (теорема 1). Далее показывается, что к произвольному множеству H (card $\mathsf{H} \geqq 3$) точек на прямой существует нетривиальная полная система $(\mathsf{S}, \mathfrak{P})$ так, что H является множеством всех ее пропустимых точек (теорема 2).

Summary

NOTE ON THE OMISSIBLE POINTS IN COMPLETE SYSTEMS OF POINTS AND STRAIGHT LINES IN THE PLANE

Karel Koutský and Václav Polák, Brno

A complete system of points and straight lines in the plane is an ordered couple $(\mathsf{S}, \mathfrak{P})$, where S is a finite set of points in the plane and $\mathfrak{P}$ is the set of all straight lines, each of which contains at least two different points of S. A straight line $p \in \mathfrak{P}$ is called an ordinary straight line when card $(\mathsf{S} \cap p) = 2$. A point $A \in \mathsf{S}$ is called an omissible point, when it is contained in no ordinary straight line of $\mathfrak{P}$.

Complete systems $(\mathsf{S}, \mathfrak{P})$ all of whose omissible points lie on one straight line are studied. If the number of these points is $h \geqq 3$ and the relation $\mathsf{S} \subset p$ is false for every straight line p of the plane, then card $\mathsf{S} \geqq 3h$ (theorem 1). If there is given a finite point set H on a straight line p and card $\mathsf{H} = h \geqq 3$, then a complete non-trivial system $(\mathsf{S}, \mathfrak{P})$ exists whose omissible points form the set H (theorem 2).