CHARAKTERISACE TĚTIVOVÝCH A TEČNOVÝCH MNOHOÚHELNÍKŮ

LADISLAV KOSMÁK, Praha.

(Došlo dne 2. listopadu 1954.) DT: 513.192

V práci jsou nalezeny nutné a dostatečné podmínky pro to, aby $n \geqq 4$ bodů v rovině leželo na kružnici a aby se n přímek dotýkalo kružnice. Podmínky jsou vyjádřeny jednoduchými incidenčními vztahy; nejdůležitějším pojmem v těchto úvahách je pojem t. zv. orthocentrické přímky, přiřazené skupině čtyř přímek, jejíž žádné tři přímky neprocházejí týmž bodem a která obsahuje nejvýše jednu dvojici rovnoběžek. — Věty, dokázané v této práci, mají aplikace při studiu jisté speciální křivky, jak bude ukázáno ve společné práci ing. dr F. Sedláka a autora.

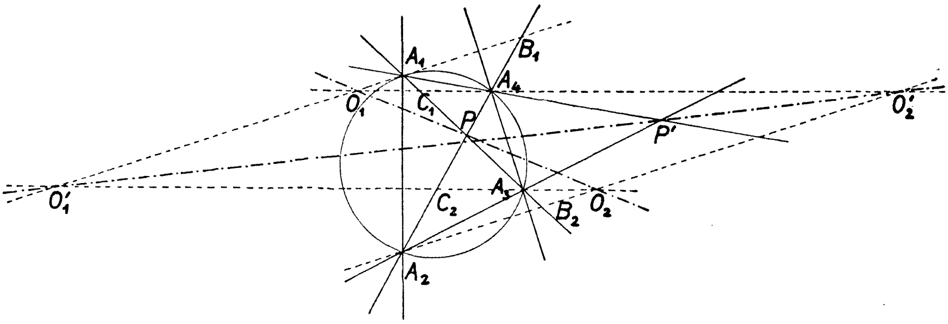
Je známo, že průsečíky výšek čtyř trojúhelníků, určených vždy třemi přímkami čtyřstranu*), leží na téže přímce; budeme ji nazývat *orthocentrická přímka* čtyřstranu. Obecněji platí: Je-li v rovině dáno n přímek ($n \geqq 4$), z nichž žádné dvě nejsou rovnoběžné a žádné tři neprocházejí týmž bodem, pak orthocentra všech trojúhelníků tvořených těmito přímkami leží na jedné přímce právě tehdy, když všechny dané přímky se dotýkají téže paraboly; přímka, na níž leží orthocentra, je řídicí přímkou této paraboly. — Obě tyto věty pocházejí od Steinera (Ges. Werke 1, str. 128, 134). Poznamenejme, že první z nich se nejjednodušeji dokáže dvojím použitím této věty: Jsou-li na přímce dány tři navzájem různé body A_1, A_2, A_3 a jsou-li pro $i = 1, 2, 3$ a_i, a'_i přímky takové, že $a_i \parallel a'_i$ a že a_i, a'_i neprocházejí bodem A_i a procházejí každá jedním ze zbývajících daných bodů tak, že a_1 prochází bodem A_2, a_2 bodem A_3 a a_3 bodem A_1, pak průsečíky dvojic přímek

$$(p_1, p'_2)\ ,$$
$$(p_2, p'_3)\ ,$$
$$(p_3, p'_1)$$

leží na téže přímce. — Toto tvrzení snadno plyne z vět o stejnolehlosti trojúhelníků.

*) Čtyřstranem zde rozumíme skupinu čtyř přímek, z nichž žádné dvě nejsou rovnoběžné a žádné tři neprocházejí jedním bodem.

Definici orthocentrické přímky nyní rozšíříme na případ skupiny čtyř přímek, z nichž žádné tři neprocházejí týmž bodem a právě dvě jsou rovnoběžné; orthocentrickou přímkou takové čtveřice přímek budeme rozumět kolmici spuštěnou na rovnoběžky z průsečíku zbývajících dvou přímek. Kromě toho pro jednodušší vyjadřování zavedeme tyto názvy: průsečík každých dvou z libovolné skupiny přímek v rovině nazveme vrcholem té skupiny a spojnici dvou jejích vrcholů, která do ní nepatří, budeme říkat diagonála dané skupiny. Nyní platí:



Obr. 1.

Věta I. *Nechť body A_1, A_2, A_3, A_4 nejsou vrcholy rovnoběžníka a nechť žádné tři z nich neleží na téže přímce. Pak tyto body leží na kružnici právě tehdy, když orthocentrická přímka libovolné skupiny* **P** *čtyř přímek s vrcholy v těchto bodech buďto prochází průsečíkem diagonál té skupiny, na nichž po dvou leží dané čtyři body, anebo, neprotínají-li se tyto diagonály, je s nimi rovnoběžná.*

Důkaz. I. Nechť body A_1, A_2, A_3, A_4 leží na kružnici k. Rozlišujme tři možnosti.

a) Body A_1, A_2, A_3, A_4 jsou vrcholy lichoběžníka. Pak je tvrzení zřejmé, neboť tětivový lichoběžník je rovnoramenný.

Můžeme tedy předpokládat, že skupina **P** je čtyřstran. Pak jsou možné dva případy.

b) Průsečík diagonál, na nichž leží dané čtyři body, leží uvnitř čtyřúhelníka s vrcholy A_1, A_2, A_3, A_4. Je-li v tomto čtyřúhelníku při některém vrcholu pravý úhel, je tvrzení opět zřejmé; není-li tomu tak, jsou všecky body označené v obr. 1 navzájem různé a platí (viz obr. 1):

$$\triangle\, A_4C_1P \sim \triangle\, C_2A_3P \sim \triangle\, A_1B_1P \sim \triangle\, B_2A_2P\,,$$

neboť tyto trojúhelníky mají stejně velký úhel při vrcholu P a kromě toho

$$\sphericalangle\, PA_4C_1 = \sphericalangle\, PC_2A_3 = \tfrac{1}{2}\pi - \sphericalangle\, A_1A_2A_4 = \tfrac{1}{2}\pi - \sphericalangle\, A_1A_3A_4 = \sphericalangle\, PB_2A_2 = \\ = \sphericalangle\, PA_1B_1\,.$$

Platí tedy

$$\overline{C_1P} : \overline{A_3P} = \overline{A_1P} : \overline{B_2P} = \overline{A_1C_1} : \overline{A_3B_2}\,,$$

a ježto

$$\triangle A_1O_1C_1 \sim \triangle B_2O_2A_3 ,$$

je

$$\overline{C_1P} : \overline{A_3P} = \overline{C_1O_1} : \overline{A_3O_2} .$$

Při tom

$$\sphericalangle PC_1O_1 = \sphericalangle PA_3O_2 ,$$

takže

$$\triangle PC_1O_1 \sim \triangle PA_3O_2 ,$$

a ježto sobě odpovídající strany jsou rovnoběžné a oba trojúhelníky mají společný vrchol P, leží body P, O_1, O_2 na téže přímce.

c) Průsečík diagonál, spojujících vždy dva z daných bodů, leží vně čtyřúhelníka $A_1A_2A_3A_4$. Podle b) je trojúhelník $A_1O_1A_4$ homologický s trojúhelníkem $A_3O_2A_2$; jejich odpovídající si strany se protínají v bodech O_1', O_2', P', které podle Desarguesovy věty leží na přímce. Ježto body O_1', O_2' jsou body orthocentrické přímky daného čtyřstranu a bod P' příslušný průsečík jeho diagonál, je tím věta dokázána i v tomto posledním případě.

II. Dokážeme nyní, že podmínka, o níž jsme právě zjistili, že je nutná pro to, aby body A_1, A_2, A_3, A_4 ležely na kružnici, je také postačující.

To se použitím druhé ze Steinerových vět citovaných na začátku snadno dokáže v případě, že jeden z bodů A_1, A_2, A_3, A_4 leží uvnitř trojúhelníka s vrcholy ve zbývajících bodech. Kdyby totiž orthocentrická přímka skupiny **P** procházela příslušným průsečíkem diagonál, musela by řídící přímka paraboly, určené přímkami skupiny **P** jako tečnami, procházet vnitřkem této paraboly. — Kromě toho si čtenář snadno sám provede jednoduchý důkaz v případě, že body A_1, A_2, A_3, A_4 leží na dvou rovnoběžkách.

Předpokládejme tedy, že body A_1, A_2, A_3, A_4 neleží na kružnici, že čtyřúhelník s vrcholy v těchto bodech je konvexní a že **P** je čtyřstran. Všimněme si nejprve případu, že průsečík D příslušných diagonál skupiny **P** leží uvnitř čtyřúhelníka $A_1A_2A_3A_4$. Nechť je označení voleno tak, že přímky A_1A_3 a A_2A_4 jsou diagonály skupiny **P**. Bez újmy obecnosti budeme předpokládat, že úhel při vrcholu A_2 trojúhelníka $A_1A_2A_3$ je tupý.

Opišme trojúhelníku $A_1A_2A_3$ kružnici k a nechť A_0 je její průsečík s přímkou A_2A_4. Veďme nyní v trojúhelníku $A_1A_2A_3$ vrcholy A_1 a A_3 rovnoběžku s protější stranou tohoto trojúhelníka a označme B_1, B_2 průsečíky těchto přímek s diagonálou A_2A_4. Dále vztyčme kolmici h_1 v bodě A_1 na přímku A_1A_2 a h_2 v bodě A_3 na přímku A_2A_3. Aspoň jedna z přímek h_1, h_2 protne přímku A_2A_4; protne-li ji jen jedna, je některá z přímek A_1A_2, A_2A_3 kolmá na diagonálu A_2A_4; dejme tomu, že je to přímka A_1A_2. Orthocentrum trojúhelníka tvořeného přímkami A_1A_2, A_3A_4, A_4A_1 leží potom na přímce A_2A_4 a je různé od bodu D, neboť jinak by bylo $A_1A_3 \perp A_3A_4$ a body A_1, A_2, A_3, A_4 by ležely na kružnici. Orthocentrum trojúhelníka tvořeného přímkami A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4

však neleží na přímce A_2A_4, takže v tomto případě orthocentrická přímka skupiny **P** nemůže procházet bodem D.

Můžeme tedy předpokládat, že obě přímky h_1, h_2 protnou přímku A_2A_4, a to h_1 v bodě H_1 a h_2 v bodě H_2. Ježto není $A_1A_2 \perp A_2A_3$, je bod H_1 různý od B_1 a H_2 různý od B_2. Podrobný rozbor jednotlivých možností polohy bodu vzhledem k bodům A_0, B_1, B_2, H_1, H_2 vede nyní k výsledku, že v žádném případě nemůže orthocentrická přímka skupiny **P** procházet bodem D. Tyto úvahy jsou sice zdlouhavé, avšak velmi snadné, a proto upouštíme od jejich výkladu.

Zbývá případ, že se diagonály skupiny **P** protínají vně čtyřúhelníka $A_1A_2A_3A_4$. Pak zcela obdobným způsobem jako v první části důkazu použitím Desarguesovy věty lze ukázat, že prochází-li orthocentrická přímka takové skupiny průsečíkem D diagonál, prochází i orthocentrická přímka té skupiny čtyř přímek s vrcholy v daných bodech, jejíž diagonály se protínají uvnitř čtyřúhelníka, průsečíkem jejích příslušných diagonál, což je nemožné.

Věta 2. *Jsou-li dány body $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ($n \geqq 5$), z nichž žádné tři neleží na přímce, pak existuje uspořádaná skupina $n - 3$ čtveřic těchto bodů, která má tyto vlastnosti:*

a) *každá čtveřice kromě první má s předcházející tři společné body;*

b) *žádná z nich neobsahuje vrcholy rovnoběžníka;*

c) *každý z daných bodů patří do některé čtveřice.*

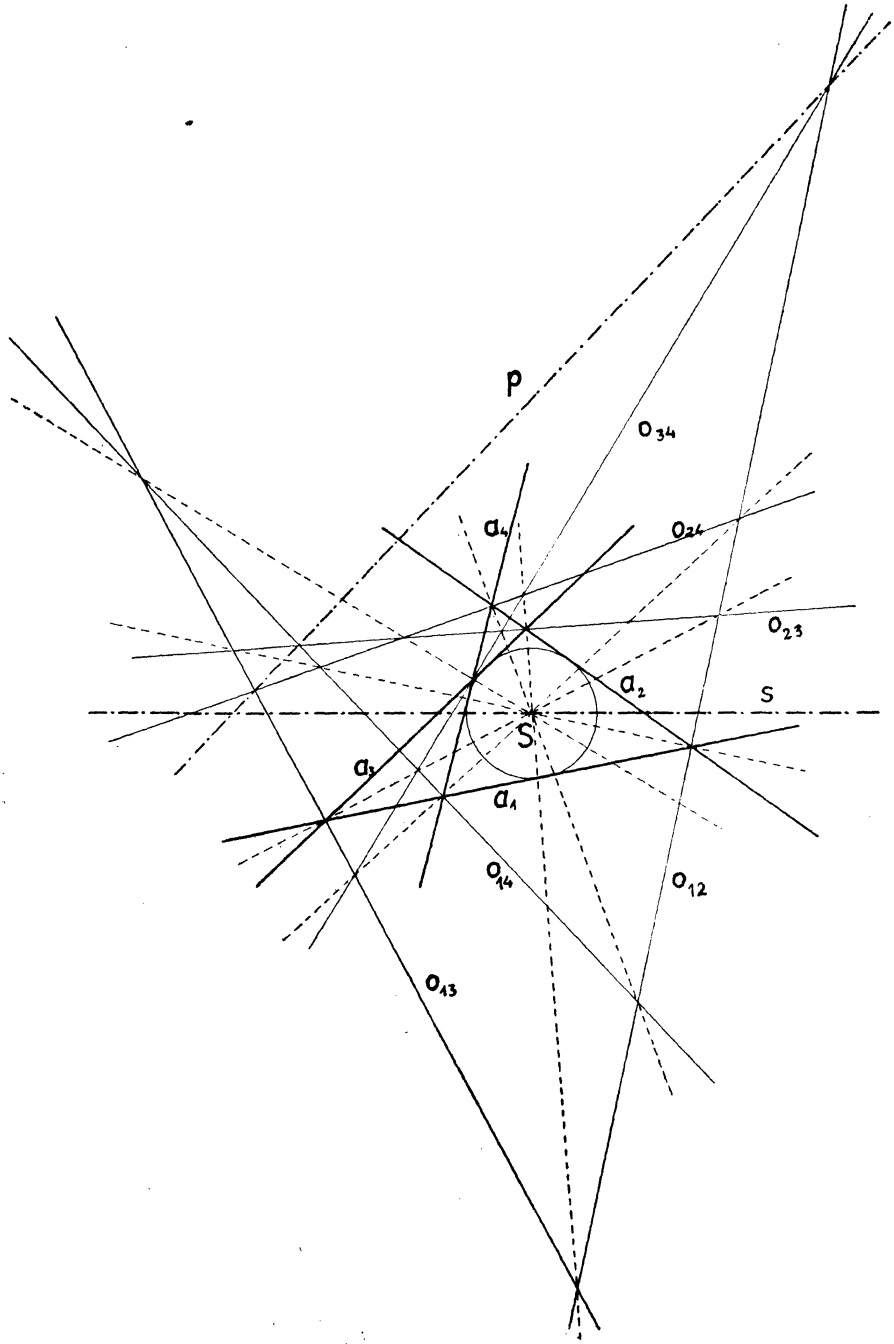
Důkaz se provede úplnou indukcí. Správnost tvrzení se snadno ověří pro $n = 5$. Je-li pak $n > 5$ a předpokládáme-li, že věta 2 platí pro $n - 1$ bodů $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$, stačí k uspořádané skupině $n - 4$ čtveřic, která je jim přiřazena podle věty 2, připojit jako poslední tu ze dvou čtveřic, jež podle prvního kroku důkazu odpovídají skupině pěti bodů skládající se z poslední čtveřice uspořádané skupiny odpovídající bodům $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$ a z bodu A_n, která obsahuje bod A_n.

Věta 3. *Je-li n přirozené číslo, $n \geqq 5$, pak n bodů, z nichž žádné tři neleží na přímce, leží na kružnici právě tehdy, když pro každou z $n - 3$ čtveřic, které jsou daným n bodům přiřazeny podle věty 2, platí, že orthocentrická přímka libovolné skupiny čtyř přímek, která má vrcholy v bodech této čtveřice, prochází průsečíkem diagonál té skupiny, na nichž leží body této čtveřice anebo, neprotínají-li se, je s nimi rovnoběžná.*

Důkaz. Věta 3 bezprostředně plyne z věty 1 a 2.

Definice. Skupina $n \geqq 4$ přímek se nazývá tečnová, právě když všechny její přímky se dotýkají téže kružnice.

Věta 4. *Skupina čtyř přímek, z nichž žádné tři neprocházejí týmž bodem a nejvýš dvě jsou rovnoběžné, je tečnová právě tehdy, když platí: Sestrojíme-li osy dvojic různoběžek této skupiny tak, aby žádná neprocházela vnitřkem jednoho z konvexních útvarů, omezených všemi přímkami skupiny, pak orthocentra všech trojúhelníků, tvořených těmito přímkami, leží na téže přímce.* (Viz obr. 2.)



Obr. 2.

Důkaz. I. Nechť skupina čtyř přímek splňuje předpoklady věty 4. Tvrzení věty 4 zřejmě platí v případě, že daná skupina je souměrná podle osy, která její přímky buď neprotíná nebo protíná ve vrcholech skupiny; není-li tomu tak, je snadno patrno, že žádné tři osy, sestrojené podle věty 4, neprocházejí týmž bodem a žádné dvě z nich nejsou rovnoběžné. Trojúhelník tvořený těmito přímkami nazveme význačný, jsou-li přímky jeho stran osami úhlů (vnějších nebo vnitřních) při vrcholech některého trojúhelníka, tvořeného danými přímkami. Průsečíky výšek všech význačných trojúhelníků zřejmě leží ve středu S kružnice, jíž se dané přímky dotýkají. Dále si uvědomme, že čtyřúhelník omezený zmíněnými osami dvojic různoběžek dané skupiny, které procházejí dvěma dvojicemi protějších vrcholů dané skupiny, je tětivový; o tom se lze snadno přesvědčit výpočtem jeho úhlů.

Všimněme si nyní, že každý čtyřstran tvořený osami definovanými ve větě 4 buďto je tětivový nebo obsahuje význačný trojúhelník. Z toho podle věty 1 snadno plyne, že orthocentrické přímky všech těchto čtyřstranů procházejí bodem S, což však není možné jinak, než že všecky tyto přímky splývají.

II. Není-li skupina čtyř přímek, z nichž žádné tři neprocházejí týmž bodem a žádné dvě nejsou rovnoběžné, tečnová, je snadno patrno, že žádné tři průsečíky výšek význačných trojúhelníků neleží na přímce. Obsahuje-li daná skupina dvojici rovnoběžek, zjistíme, že orthocentra obou význačných trojúhelníků určují přímku různou od spojnice průsečíků dvojic os, které se protínají pod pravým úhlem.

Věta 5. *Je-li dána skupina $n \geq 5$ přímek, z nichž žádné tři neprocházejí týmž bodem, pak existuje uspořádaná skupina $n - 3$ čtveřic těchto přímek taková, že platí:*

a) *každá čtveřice kromě první má s předcházející tři společné přímky;*
b) *každá z daných přímek patří do některé čtveřice;*
c) *v každé čtveřici jsou nejvýš dvě rovnoběžky.*

Důkaz této věty se snadno provede úplnou indukcí zcela obdobně jako u věty 3.

Z věty 4 a 5 ihned plyne

Věta 6. *Skupina $n \geq 5$ přímek, z nichž žádné tři neprocházejí týmž bodem, je tečnová právě tehdy, když každá z čtveřic přímek, které jsou jí přiřazeny podle věty 5, splňuje podmínku věty 4.*

Poznámka. Všimněme si, že ve čtyřstranu průsečíky těch os (sestrojených podle věty 4) dvojic přímek, které procházejí protějšími vrcholy, leží na přímce.

Резюме

ХАРАКТЕРИЗАЦИЯ МНОГОУГОЛЬНИКОВ, ОБРАЗОВАННЫХ ХОРДАМИ И КАСАТЕЛЬНЫМИ ОКРУЖНОСТИ

ЛАДИСЛАВ КОСМАК (Ladislav Kosmák), Прага.

(Поступило в редакцию 2. XI. 1954 г.)

Известно, что точки пересечения высот четырех треугольников, образованных сторонами полного четырехсторонника, лежат на прямой; эту прямую мы называем *ортоцентрической прямой* четырехсторонника. Главным результатом настоящей работы являются следующие две теоремы:

1. *Четыре точки в плоскости, которые не лежат в вершинах никакого параллелограмма или трапеции и из которых никакие три не лежат на одной прямой, лежат на окружности тогда и только тогда, если ортоцентрическая прямая произвольного четырехсторонника с вершинами в этих точках проходит через точки пересечения тех его диагоналей, на которых лежат данные четыре точки или, если они непересекаются, она параллельна им.*

2. *Четыре прямые, образующие четырехсторонник, касаются окружности тогда и только тогда, если ортоцентры всех треугольников, образованных биссектрисами внешних углов (т. е. тех, которые не содержат внутренность выпуклого четырехугольника, ограниченного данными прямыми) образованных парами данных прямых, лежат на одной прямой.*

Автор доказывает эти утверждения в несколько более общем виде и обобщает их на случай $n > 4$ точек и прямых.

Résumé

UNE CARACTERISATION DES POLYGONES INSCRIPTIBLES ET CIRCONSCRIPTIBLES

LADISLAV KOSMÁK, Prague.

(Reçu le 2 novembre 1954.)

Les orthocentres des quatre triangles formés des droites d'un quadrilatère complet sont situés sur la droite qu'on appelle *droite orthocentrique* de ce quadrilatère. Les résultats fondamentaux de ce travail consistent en deux théorèmes suivants:

1. *La condition nécessaire et suffisante pour que les quatre points donnés dans un plan dont nuls trois n'appartient à une même droite et qui ne sont les sommets d'aucun parallélogramme ou trapèze soient situés sur une circonférence est que la droite orthocentrique de tout quadrilatère complet avec les sommets dans les points donnés passe par le point d'intersection des diagonales de ce quadrilatère qui joignent les points donnés ou, si ces diagonales ne se rencontrent pas, qu'elle soit parallèle avec elles.*

2. *La condition nécessaire et suffisante pour que quatre droites du plan dont nulles trois ne se coupent à un même point et nulles deux ne sont parallèles soient tangentes à une circonférence est que les orthocentres de tous les triangles formés des bissectrices des angles extérieurs (c'est-à-dire n'ayant pas de points communs avec l'intérieur du quadrilatère convexe formé des quatre droites données) formées des droites données se trouvent sur une droite.*

L'auteur démontre ces théorèmes et en donne des généralisations.