Časopis pro pěstování matematiky, roč. 80 (1955)

O EXISTENCI ROVINNÝCH MNOHOÚHELNÍKŮ S PŘEDEPSANÝMI ÚHLY

KAREL ČULÍK, Brno.

(Došlo dne 20. září 1954.) DT: 513.192

E. ČECH položil otázku, zda čísla $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ $(n \geqq 3)$, která splňují nerovnosti

$$0 < \alpha_i < 2\pi\,, \quad i = 1, 2, \ldots, n \tag{1}$$

a rovnici

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = (n-2)\,\pi\,, \tag{2}$$

jsou v daném pořadí velikostmi úhlů rovinného n-úhelníka.

A. RÉNYI ukázal,[1]) že odpověď na Čechovu otázku je kladná. Na Čechovu otázku lze navíc odpovědět (věta 2.4), že čísla α_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ $(n \geqq 3)$, která splňují podmínky (1) a (2), jsou v daném pořadí velikostmi úhlů jednoduchého n-úhelníka.

Čechovu otázku lze přirozeně zobecnit tím, že podmínku (2) nahradíme zcela obecnou podmínkou

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = m\pi\,, \tag{3}$$

kde m je přirozené číslo, které splňuje nerovnosti $0 < m < 2n$ a podmínku $m \equiv n \pmod 2$.

Čísla α_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ $(n \geqq 3)$, která splňují podmínky (1) a (3), obecně *nejsou* velikostmi úhlů rovinného n-úhelníka. Lze však udat nutné a dostatečné podmínky, kdy tomu tak je (věta 4.2).

V souvislosti s úvahami o existenci rovinných mnohoúhelníků s předepsanými velikostmi jejich úhlů se ukázalo výhodným zavést pojem n-lomené čáry a vyšetřovat některé vlastnosti n-lomených čar, jako je na příklad absolutní jednoduchost (definice 4. a věta 3.3).

1. Rovinný mnohoúhelník definujeme ve smyslu L. POINSOTA:[2])

Definice 1. *Nechť prvky konečné posloupnosti* $A_1, A_2, \ldots, A_n$ $(n \geqq 2)$ *značí*

---

[1]) *A. Rényi*: Poznámka o úhlech mnohoúhelníka, Čas. pro pěst. matematiky, *78* (1953), str. 305—306.

[2]) *L. Poinsot* vychází od skupiny bodů, pomocí nichž definuje strany mnohoúhelníka, zatím co na příklad *A. F. Möbius* od skupiny úseček a žádá jisté podmínky na jejich incidenci, jak je to známo z kombinatorické topologie (viz *M. Brückner*: Vielecke und Vielflache, str. 12—16).

body eukleidovské roviny, které splňují podmínku: $A_{i-1} \neq A_i \neq A_{i+1}$ pro každé i, při čemž klademe $A_j = A_k$, když $j \equiv k \pmod n$. Pak soustavu úseček A_1A_2, $A_2A_3, \ldots, A_{n-1}A_n, A_nA_1$ nazýváme rovinným n-úhelníkem nebo mnohoúhelníkem a označujeme jej $A_1A_2 \ldots A_n$. Body A_i nazýváme jeho vrcholy a úsečky (uzavřené) A_iA_{i+1} jeho stranami. Orientované úhly $\sphericalangle A_{i-1}A_iA_{i+1}$ polopřímek A_iA_{i-1}, A_iA_{i+1} nazýváme úhly první třídy a orientované úhly $\sphericalangle A_{i+1}A_iA_{i-1}$ nazýváme úhly druhé třídy n-úhelníka $A_1A_2 \ldots A_n$. Body ležící na stranách nazýváme body mnohoúhelníka.

Z definice vyplývá, že symboly $A_1A_2 \ldots A_n$ a $A_iA_{i+1} \ldots A_nA_1 \ldots A_{i-1}$ označují týž mnohoúhelník pro každé i. Kromě toho je zřejmé, že každý mnohoúhelník ve smyslu definice 1 je *souvislý*.[3])

Každé třídě úhlů n-úhelníka $A_1A_2 \ldots A_n$ odpovídá jeden „*břeh*" tohoto n-úhelníka.[4]) V dostatečně malém okolí jeho stran lze oba břehy od sebe odlišit barvami nebo šrafováním, jak to učinil také Rényi (viz jeho obrazce).

Velikosti úhlů obou tříd n-úhelníka $A_1A_2 \ldots A_n$, $\alpha_i \equiv \sphericalangle \overrightarrow{A_{i-1}A_iA_{i+1}} \pmod{2\pi}$ resp. $\alpha'_i \equiv \sphericalangle \overrightarrow{A_{i+1}A_iA_{i-1}} \pmod{2\pi}$, jsou jednoznačně určeny požadavkem

$$0 \leqq \alpha_i < 2\pi \text{ resp. } 0 \leqq \alpha'_i < 2\pi\,, \quad i = 1, 2, \ldots, n\,. \tag{1'}$$

1.1. *Nechť je dán n-úhelník $A_1A_2 \ldots A_n$ $(n \geqq 2)$ a nechť α_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ jsou velikosti úhlů jedné jeho třídy. Pak vždy existuje nezáporné celé číslo m, které splňuje nerovnosti $0 \leqq m < 2n$ a podmínku $m \equiv n \pmod 2$ tak, že*

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = m\pi\,. \tag{3'}$$

Důkaz. Z požadavku (1′) na čísla α_i vyplývá, že $0 \leqq \sum_{i=1}^{n} \alpha_i < 2n\pi$ a tedy také existence čísla m, které splňuje nerovnosti $0 \leqq m < 2n$. Snadno se dokáže tvrzení, že $\sphericalangle \overrightarrow{A_1A_2A_3} + \sphericalangle \overrightarrow{A_2A_3A_4} + \ldots + \sphericalangle \overrightarrow{A_{n-1}A_1A_n} + \sphericalangle \overrightarrow{A_nA_1A_2} \equiv$ $\equiv n\pi \pmod{2\pi}$ pro každé $n \geqq 2$. Odtud bezprostředně vychází, že $m \equiv n \pmod 2$, tedy také, že m je celé.

1.2. *Nechť α_i resp. α'_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ $(n \geqq 2)$ značí velikosti úhlů první resp. druhé třídy n-úhelníka. Pak platí:*

a) $\alpha_i = 0 \Leftrightarrow \alpha'_i = 0$ *pro každé i;*

b) $\alpha_i \neq 0 \Rightarrow \alpha_i + \alpha'_i = 2\pi$ *pro každé i;*

c) $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i + \sum_{i=1}^{n} \alpha'_i = 2(n - s)\,\pi$, *kde s je celé nezáporné číslo,* $0 \leqq s \leqq n$, *které značí počet nulových úhlů některé třídy.*

d) $s = 0 \Leftrightarrow \alpha_i \neq 0$ *pro každé i, t. j.* α_i *splňují* (1).

Důkaz je zřejmý.

---

[3]) Právě *Möbius* připouští ve své definici mnohoúhelníky nesouvislé.

[4]) Definici „*břehu*" viz *E. Steinitz-H. Rademacher*: Vorlesungen über die Theorie der Polyeder, str. 12.

Definice 2. *Nechť je dán rovinný n-úhelník $A_1A_2 \dots A_n$, který splňuje podmínky:*

(a) $A_i \neq A_j$ *pro každé* $i \neq j$;

(b) *pro žádný vrchol* A_i *neplatí, že* A_i *leží mezi vrcholy* A_j *a* A_{j+1};

(c) *žádné dvě strany* A_iA_{i+1} *a* A_jA_{j+1}, $i \neq j$, *nemají společný vnitřní bod.*

Pak říkáme, že n-úhelník $A_1A_2 \dots A_n$ *je jednoduchý.*[5])

Jednoduchý rovinný mnohoúhelník dělí rovinu na dvě disjunktní oblasti,[6]) vnitřek a vnějšek, které zřejmě odpovídají jeho „břehům", takže u jednoduchého mnohoúhelníka lze třídy jeho úhlů krátce nazývat třídou vnitřních a třídou vnějších úhlů.

Dále je zřejmé, že jestliže n-úhelník je jednoduchý, musí velikosti jeho vnitřních i vnějších úhlů splňovat Čechovu podmínku (1) (podle podmínky (c)) a musí být $n \geqq 3$.

Nechť je dán n-úhelník, jehož jedna třída úhlů je co do pořadí a velikosti určena čísly α_i, $i = 1, 2, \dots, n$ ($n \geqq 3$), která splňují podmínku (1). Potom podle 1.2 d) je $s = 0$ a z 1.2 c) vyplývá, že vždy lze zvolit takovou třídu úhlů daného n-úhelníka, pro jejichž velikosti platí $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \leqq n\pi$. Potom o čísle $m = \frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$, jehož existence je zaručena v tvrzení 1.1, lze předpokládat, že $0 < m \leqq n$ a lze definovat celé číslo k vztahem $m = n - 2(k + 1)$. Pomocí tohoto čísla lze Čechovu podmínku (2) zobecnit na podmínku

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = \{n - 2(k + 1)\} \pi , \tag{4}$$

kde k je celé číslo a splňuje nerovnosti $-1 \leqq k \leqq \left[\frac{n-3}{2}\right]$[7]) a $n \geqq 3$.

Čechovu zobecněnou otázku je tedy možno vyslovit takto: *Nechť čísla* α_i, $i = 1, 2, \dots, n$ ($n \geqq 3$), *splňují podmínky* (1) *a* (4). *Existuje pro každé* $n \geqq 3$ *a každé celé* k, *splňující vztah* $-1 \leqq k \leqq \left[\frac{n-3}{2}\right]$, *rovinný n-úhelník, jehož úhly (jedné z obou tříd) jsou co do velikosti a pořadí určeny čísly* α_i?

1.3. *Nechť* α_i *resp.* α'_i, $i = 1, 2, \dots, n$ ($n \geqq 3$) *značí velikosti úhlů první resp. druhé třídy n-úhelníka a splňují podmínku* (1). *Pak* α_i *splňují podmínku* (2) *tehdy a jen tehdy, když* α'_i *splňují podmínku*

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha'_i = (n + 2) \pi . \tag{2'}$$

Důkaz je zřejmý podle 1.2.

---

[5]) Viz *D. Hilbert*: Grundlagen der Geometrie, 7. vyd., str. 9—11.

[6]) Jednoduchý rovinný mnohoúhelník je *Jordanovou* křivkou a dělí tedy rovinu na dvě disjunktní oblasti (viz na příklad *v. Kerékjartó*: Vorlesungen über Topologie, str. 59).

[7]) Symbolem $[x]$ označujeme *Gaussovu* funkci, t. j. největší celé číslo c, pro které $c \leqq x$.

2. Zobecněnou Čechovu otázku pro případ $k = 0$, kdy podmínka (4) přejde v původní Čechovu podmínku (2), vyšetřoval Rényi. Pro $n > 4$ lze volit čísla

$$\alpha_i = \frac{n-2}{n}\pi\,, \quad i = 1, 2, \ldots, n\,,$$

která zřejmě splňují podmínky (1) i (2). Přesto tato čísla nevyhovují Rényiho požadavku,[8]) kterého ve svém důkazu užívá. Toto nedopatření je odstraněno následující větou 2.1.

V dalším všude klademe $\alpha_i = \alpha_j$, když $i \equiv j \pmod{n}$.

2.1. *Nechť čísla $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ splňují podmínky* (1) *a* (2) *a nechť $n > 4$. Pak vždy existuje alespoň jeden index j takový, že $\pi < \alpha_j + \alpha_{j+1} < 3\pi$.*

Důkaz. Především existuje alespoň jeden index g takový, že $\pi < \alpha_g + \alpha_{g+1}$, neboť kdyby neexistoval, platilo by $\alpha_i + \alpha_{i+1} \leqq \pi$ pro každé i a podle (2) by muselo být

$$2(n-2)\pi = \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i + \alpha_{i+1}) \leqq n\pi\,.$$

Odtud však plyne $n \leqq 4$ a to je spor. Dále existuje alespoň jeden index h takový, že $\alpha_h + \alpha_{h+1} < 3\pi$, neboť kdyby neexistoval, bylo by $\alpha_i + \alpha_{i+1} \geqq 3\pi$ pro každé i, a tedy podle (2)

$$2(n-2)\pi = \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i + \alpha_{i+1}) \geqq 3n\pi\,.$$

Z toho však vychází, že $n \leqq -4$ a to je zase spor.

Nechť $\mathfrak{H}$ je množina všech indexů h, pro něž platí $\alpha_h + \alpha_{h+1} < 3\pi$. Její prvky označme $h_1, h_2, \ldots, h_p$, kde $1 \leqq p \leqq n$, neboť podle předešlého $\mathfrak{H}$ není prázdná. Nechť dále $\mathfrak{R}$ je množina všech zbývajících indexů. Mohou nastat dva případy: 1. Jestliže $p = n$, pak mezi indexy $h_i \in \mathfrak{H}$ musí existovat, podle předešlého, alespoň jeden index h takový, že $\pi < \alpha_h + \alpha_{h+1}$. Potom h je hledaný index, neboť platí $\pi < \alpha_h + \alpha_{h+1} < 3\pi$. 2. Jestliže $p < n$, pak množina $\mathfrak{R}$ není prázdná a jistě v ní existuje index r takový, že pro vhodný index $h \in \mathfrak{H}$ platí $r + 1 = h$ a ovšem $\alpha_r + \alpha_{r+1} \geqq 3\pi$. Dále důkaz vedeme sporem. Předpokládejme, že pro každý index $h_i \in \mathfrak{H}$ platí $\alpha_{h_i} + \alpha_{h_i+1} \leqq \pi$, tedy zejména platí $\alpha_h + \alpha_{h+1} \leqq \pi$. Odtud však vyplývá, že $\alpha_h < \pi$, neboť podle (1) je $\alpha_{h+1} > 0$. Ježto $\alpha_h = \alpha_{r+1}$ a podle (1) je $\alpha_r < 2\pi$, musí být $\alpha_r + \alpha_{r+1} < 3\pi$ a to je spor. Musí tedy existovat alespoň jeden index $h_j \in \mathfrak{H}$ takový, že pro něj platí $\pi < \alpha_{h_j} + \alpha_{h_j+1}$ a to je hledaný index.

2.2. *Nechť $A_1A_2 \ldots A_n$ je jednoduchý rovinný n-úhelník ($n \geqq 3$) a nechť čísla α_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ značí v tomto pořadí velikosti úhlů jedné jeho třídy. Pak čísla α_i*

[8]) Rényi totiž používá tvrzení: „*není-li pro každé $i = 1, 2, \ldots, n$ ($n \geqq 3$) $\alpha_i + \alpha_{i+1} = \pi$, pak musí existovat takový index j, že $\alpha_j + \alpha_{j+1} > \pi$, avšak $\alpha_{j+1} + \alpha_{j+2} \leqq \pi$*“.

jsou velikostmi jeho vnitřních resp. vnějších úhlů, když a jen když splňují podmínku (2) *resp. podmínku* (2').

Důkaz. Především čísla α_i splňují podmínku (1). Dále je známo a snadno se indukcí dokáže, že jestliže čísla α_i jsou velikostmi vnitřních úhlů n-úhelníka, že splňují podmínku (2). Z tvrzení 1.3 bezprostředně vyplývá také dostatečnost podmínky (2), aby α_i byly velikosti vnitřních úhlů, a také nutnost a dostatečnost podmínky (2'), aby α_i byly velikosti vnějších úhlů n-úhelníka.

Podmínky (1) a (2) resp. (2') na velikosti úhlů rovinného n-úhelníka jsou nutnými podmínkami jednoduchosti tohoto n-úhelníka. Obecně však tyto podmínky nestačí, neboť pro každé $n > 4$ lze snadno udat n-úhelníky se stejnými úhly, z nichž jeden je jednoduchý a druhý nikoliv. Naproti tomu se snadno dokáže tvrzení:

2.3. *Trojúhelník je jednoduchý, když a jen když velikosti jeho úhlů splňují podmínku* (1). *Čtyrúhelník je jednoduchý, když a jen když velikosti jeho úhlů splňují podmínky* (1) *a* (2) *resp.* (2').

2.4. *Nechť čísla* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ $(n \geqq 3)$ *splňují podmínky* (1) *a* (2) *resp.* (1) *a* (2'). *Pak vždy existuje jednoduchý rovinný n-úhelník takový, že jeho vnitřní resp. vnější úhly jsou co do velikosti a pořadí určeny čísly* α_i.

Důkaz. Z tvrzení 1.3 je zřejmé, že větu stačí dokázat pro podmínky (1) a (2). Důkaz je jenom doplněným a současně opraveným důkazem Rényiho, proto postupujeme stejně jako on.

Rozlišíme dva případy: 1. Nechť platí $\alpha_i + \alpha_{i+1} = \pi$ pro každé i. Rényi ukázal, že v tomto případě je $n = 4$ a také, že vždy existuje rovnoběžník, jehož vnitřní úhly jsou co do velikosti a pořadí určeny čísly $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$. Ale rovnoběžník je vždy jednoduchým čtyrúhelníkem. 2. Nechť existuje alespoň jeden index i, pro který platí $\alpha_i + \alpha_{i+1} \neq \pi$. Dále důkaz vedeme indukcí. Pro $n = 3$ je věta správná, neboť podle 2.3 je trojúhelník, jehož existence je zřejmá, také jednoduchý. Nechť je tedy $n \geqq 4$ a předpokládejme, že věta je dokázána pro každé n', které $3 \leqq n' < n$. Jestliže α_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ jsou daná čísla, pak vždy existuje index j takový, že $\pi < \alpha_j + \alpha_{j+1} < 3\pi$, neboť pro $n > 4$ je to zaručeno tvrzením 2.1 a pro $n = 4$ se to snadno dokáže. Definujme číslo $\alpha^* = \alpha_j + \alpha_{j+1} - \pi$. Pak zřejmě $(n - 1)$ čísel $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{j-1}, \alpha_j^*, \alpha_{j+2}, \ldots, \alpha_n$ splňuje podmínku (1) a jak Rényi ukázal také podmínku (2), takže podle induktivního předpokladu existuje jednoduchý $(n - 1)$-úhelník $A_1A_2 \ldots A_{j-1}A_j^* . A_{j+2} \ldots A_n$, jehož vnitřní úhly co do velikosti a pořadí jsou určeny uvedenými $(n - 1)$ čísly. Rozlišíme dva případy: 1. $\alpha_j^* \neq \pi$. Pak existuje dostatečně malé $\varepsilon > 0$ tak, že uvnitř kruhového okolí vrcholu A_j^* o poloměru ε neleží kromě vrcholu A_j^* a vnitřních bodů stran $A_{j-1}A_j^*$ a $A_j^*A_{j+2}$ již žádný bod $(n - 1)$-úhelníka. Uvnitř tohoto okolí lze provést každou z Rényiho konstrukcí podle jeho obrazů a_1, a_2, b_1, b_2, takže vzniklý n-úhelník je jednoduchý a má předepsané úhly, které podle 2.2 musí být úhly vnitřními. 2. $\alpha_j^* = \pi$. Pak opět existuje dostatečně malé $\varepsilon > 0$ tak, že uvnitř okolí úsečky $A_{j-1}A_{j+2}$, které je definováno jako vnitřek ekvidistanty ve vzdálenosti ε, neleží kromě bodů stran $A_{j-1}A_j^*$ a $A_j^*A_{j+2}$ a vnitřních bodů stran $A_{j-2}A_{j-1}$ a $A_{j+2}A_{j+3}$ již žádný bod $(n-1)$-úhelníka. V tomto okolí lze provést Rényiho konstrukce podle jeho obrazu c, takže vzniklý n-úhelník je jednoduchý a jeho vnitřní úhly, jak plyne opět z 2.2, jsou co do pořadí a velikosti určeny čísly α_i.

3. Budeme vyšetřovat rovinné lomené čáry. **Definice 1'.** *Nechť prvky konečné posloupnosti $A_0, A_1, \ldots, A_n, A_{n+1}$ $(n \geq 0)$ značí body eukleidovské roviny, které splňují podmínku: $A_{i-1} \neq A_i \neq A_{i+1}$ pro každé $i = 1, 2, \ldots, n$. Pak soustavu úseček $A_0A_1, A_1A_2, \ldots, A_nA_{n+1}$ nazýváme n-lomenou čarou a označujeme ji $(A_0A_1 \ldots A_nA_{n+1})$. Body A_i nazýváme vrcholy a úsečky (uzavřené) A_iA_{i+1} nazýváme stranami n-lomené čáry $(A_0A_1 \ldots A_{n+1})$. Orientované úhly $\sphericalangle A_{i-1}A_iA_{i+1}$ polopřímek A_iA_{i-1} a A_iA_{i+1} nazýváme úhly první třídy a orientované úhly $\sphericalangle A_{i+1}A_iA_{i-1}$ nazýváme úhly druhé třídy n-lomené čáry $(A_0A_1 \ldots A_{n+1})$ pro $i = 1, 2, \ldots, n$. Body ležící na stranách nazýváme body n-lomené čáry.*

Definice 2'. *Nechť je dána rovinná n-lomená čára $(A_0A_1 \ldots A_{n+1})$, která splňuje podmínky:*

(a') *$A_i \neq A_j$ pro každé $i \neq j$;*
(b') *pro žádný vrchol A_i neplatí, že A_i leží mezi vrcholy A_j a A_{j+1};*
(c') *žádné dvě strany A_iA_{i+1} a A_jA_{j+1}, $i \neq j$, nemají společný vnitřní bod.*

Pak říkáme, že n-lomená čára $(A_0A_1 \ldots A_{n+1})$ je jednoduchá.

3.1. *Ke každému rovinnému n-úhelníku $A_1A_2 \ldots A_n$ existuje nejednoduchá n-lomená čára $(A_nA_1A_2 \ldots A_nA_1)$, která má tytéž úhly jako daný n-úhelník.*

Důkaz je zřejmý.

Definice 3. *Dvě n-lomené čáry $(A_0A_1 \ldots A_{n+1})$ a $(B_0B_1 \ldots B_{n+1})$ nazýváme isogonálními, jestliže velikosti úhlů α_i a β_i některé z jejich tříd splňují podmínku $\alpha_i = \beta_i$ pro každé $i = 1, 2, \ldots, n$.*

Vzhledem k 3.1 lze o isogonalitě hovořit také mezi n-úhelníky a také mezi n-úhelníky a n-lomenými čarami.

Vztah isogonality je ekvivalencí na množině všech rovinných n-lomených čar a také na množině všech rovinných n-úhelníků a určuje tedy rozklady těchto množin ve třídy isogonálních n-lomených čar případně ve třídy isogonálních n-úhelníků. Budeme vyšetřovat ty třídy n-lomených čar, jejichž prvky jsou vesměs jednoduché n-lomené čáry a tím také ty třídy, které neobsahují žádné n-úhelníky. Proto definujeme:

Definice 4. *n-lomenou čáru nazýváme absolutně jednoduchou, jestliže každá s ní isogonální n-lomená čára je jednoduchá.*

3.2. *Nechť n-lomená čára $(A_0A_1 \ldots A_{n+1})$ je absolutně jednoduchá. Pak každá* *m-lomená čára* $(A_iA_{i+1} \dots A_{i+m}A_{i+m+1})$, *kde* $0 \leqq i \leqq n$, $0 \leqq m \leqq n - i$, *je absolutně jednoduchá.*

Důkaz je zřejmý.

3.3. *Rovinná n-lomená čára* $(A_0A_1 \dots A_{n+1})$ *je absolutně jednoduchá, když a jen když velikosti úhlů* $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ $(n \geqq 0)$ *jedné její třídy splňují podmínku* (1) *a podmínku*

$$h\pi \leqq \sum_{i=j}^{j+h} \alpha_i \leqq (h + 2)\pi \tag{5}$$

pro každé $j = 1, 2, \dots, n - 1$ *a každé* h, *pro které* $1 \leqq h \leqq n - j$.

Důkaz. I. Nechť $(A_0A_1 \dots A_{n+1})$ splňuje podmínky (1) a (5). Důkaz vedeme indukcí. Pro $n = 0$ i $n = 1$ splňuje 0-lomená čára (A_0A_1) i každá 1-lomená čára $(A_0A_1A_2)$ podmínky jednoduchosti z definice 2′ a je tedy absolutně jednoduchá. Nechť tedy dále je $n > 1$ a předpokládejme, že věta je dokázána pro každé $n' < n$. Konečně nechť $(B_0B_1 \dots B_{n+1})$ je libovolná n-lomená čára isogonální s $(A_0A_1 \dots A_{n+1})$, takže pro velikosti úhlů některé její třídy platí $\alpha_i = \beta_i$ pro každé i. Podle definice 4. stačí dokázat jednoduchost n-lomené čáry $(B_0B_1 \dots \dots B_{n+1})$. Avšak je zřejmé, že $(B_0B_1 \dots B_{n-1}B_n)$ a $(B_1B_2 \dots B_nB_{n+1})$ jsou $(n - 1)$-lomené čáry, které splňují podmínky (1) a (5), takže podle induktivního předpokladu jsou absolutně jednoduché. Vzhledem k definici 2′ stačí k jednoduchosti $(B_0B_1 \dots B_{n+1})$ ukázat, že polopřímky B_1B_0 a B_nB_{n+1} nemají žádný společný bod. Předpokládejme opak a jejich společný bod označme C. Především musí být $B_1 \neq C \neq B_n$, neboť kdyby $B_1 = C$ resp. $B_n = C$, nebyla by $(B_1B_2 \dots B_{n+1})$ resp. $(B_0B_1 \dots B_n)$ absolutně jednoduchá, což je spor. Potom $(n + 1)$-úhelník $B_1B_2 \dots B_nC$ je jednoduchý a označme $\sphericalangle \overrightarrow{B_nCB_1} \equiv \gamma \pmod{2\pi}$, kde $0 \leqq \gamma < 2\pi$. Podle předešlého dokonce platí $0 \neq \gamma \neq \pi$, takže čísla γ, $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ jednak splňují podmínku (1), jednak podle 2.2 podmínku (2) nebo podmínku (2′), t. j. jejich součet s je buďto $s = (n - 1)\pi$ nebo $s = (n + 3)\pi$. Avšak z podmínky (5) pro $j = 1$, $h = n - 1$ vyplývá

$$(n - 1)\pi \leqq \sum_{i=1}^{n} \beta_i \leqq (n + 1)\pi\,,$$

takže buď

$$(n - 1)\pi = s = \sum_{i=1}^{n} \beta_i + \gamma > \sum_{i=1}^{n} \beta_i \geqq (n - 1)\pi$$

nebo

$$\gamma = \sum_{i=1}^{n} \beta_i + \gamma - \sum_{i=1}^{n} \beta_i \geqq s - (n + 1)\pi = 2\pi\,,$$

což je v obou případech spor. Tedy polopřímky B_1B_0 a B_nB_{n+1} nemají společný bod.

II. Nechť $(A_0A_1 \dots A_{n+1})$ je absolutně jednoduchá. Potom zřejmě α_i splňují podmínku (1). Pro $n = 0$ a $n = 1$ je podmínka (5) splněna prázdně. Dále důkaz vedeme indukcí. Nechť tedy $n \geqq 2$ a předpokládejme, že věta je dokázána pro každé $n' < n$. Ježto $(A_0 A_1 \dots A_{n+1})$ je absolutně jednoduchá, jsou, podle 3.2, také $(n-1)$-lomené čáry $(A_0 A_1 \dots A_n)$ a $(A_1 A_2 \dots A_{n+1})$ absolutně jednoduché, takže podle induktivního předpokladu platí

$$h\pi \leqq \sum_{i=j}^{j+h} \alpha_i \leqq (h+2)\,\pi$$

pro každé $j = 1, 2, \dots, n-2$ a každé $h = 1, 2, \dots, n-j-1$ a také pro každé $j = 2, 3, \dots, n-1$ a každé $h = 1, 2, \dots, n-j$. Zejména tedy platí

$$(n-2)\,\pi \leqq \sum_{i=2}^{n} \alpha_i \leqq n\pi\,.$$

Předpokládejme, že $(A_0 A_1 \dots A_{n+1})$ nesplňuje podmínku (5). Podle předešlého to znamená, že ji nesplňuje pro $j = 1, h = n-1$, t. j. platí

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i < (n-1)\,\pi \quad \text{nebo} \quad \sum_{i=1}^{n} \alpha_i > (n+1)\,\pi\,.$$

V prvním případě potom platí

$$(n-2)\,\pi \leqq \sum_{i=2}^{n} \alpha_i < \sum_{i=1}^{n} \alpha_i < (n-1)\,\pi\,,$$

takže lze definovat

$$\beta = (n-1)\,\pi - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\,.$$

Potom číslo β splňuje nerovnost $0 < \beta < \pi$ a tedy s čísly α_i podmínku (1). Protože součet těchto $(n+1)$ čísel je roven $\{(n+1)-2\}\,\pi$, což je podmínka (2) a $n+1 \geqq 3$, existuje podle 2.4 $(n+1)$-úhelník $B_1 B_2 \dots B_n B$, jehož úhly co do velikosti a pořadí jsou určeny čísly α_i a číslem β. Podle 3.1 však také existuje n-lomená čára $(B B_1 B_2 \dots B_n B)$, která zřejmě není jednoduchá, avšak je isogonální s $(A_0 A_1 \dots A_{n+1})$, což je spor.

V druhém případě dojdeme ke sporu ihned, jakmile přejdeme k velikostem úhlů zbývající třídy, které, podle 1.2 b), jsou určeny vztahy $\alpha_i' = 2\pi - \alpha_i$, $i = 1, 2, \dots, n$, a pro něž platí

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i' = \sum_{i=1}^{n} (2\pi - \alpha_i) = 2n\pi - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i < (n-1)\,\pi\,.$$

Odtud se také vidí, že podmínku (5) splňují vždy současně obě třídy úhlů.

3.4. *Každá 3-lomená čára, jejíž úhly α_i, $i = 1, 2, 3$ splňují podmínku (1) a podmínku $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 3\pi$, t. j. podmínku (4) pro $k = -1$, je absolutně jednoduchá.*

Důkaz. Podle 3.3 stačí ukázat, že α_i splňují (5). Mohou nastat tyto případy: 1. $j = 1$, $h = 2$. Pak $2\pi \leqq \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 3\pi \leqq 4\pi$; 2. $j = 1$, $h = 1$. Pak jistě je $\alpha_1 + \alpha_2 \leqq 3\pi$ a kdyby $\alpha_1 + \alpha_2 < \pi$, bylo by $\alpha_3 > 2\pi$, což je spor, tedy platí $\pi \leqq \alpha_1 + \alpha_2 \leqq 3\pi$; 3. $j = 2$, $h = 1$. Pak opět $\pi \leqq \alpha_2 + \alpha_3 \leqq 3\pi$ jako ve 2.

Jestliže čísla α_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ ($n \geqq 2$) splňují podmínku (1), ale nesplňují podmínku (5), pak zřejmě splňují tuto podmínku: existuje alespoň jeden index j, $1 \leqq j \leqq n - 1$, a přirozené číslo h, $1 \leqq h \leqq n - j$, tak, že platí

$$\text{buď } \sum_{i=j}^{j+h} \alpha_i < h\pi \text{ nebo } \sum_{i=j}^{j+h} \alpha_i > (h + 2)\pi . \tag{6}$$

3.5. *Nechť α_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, značí velikosti úhlů jedné třídy absolutně jednoduché n-lomené čáry a splňují podmínku (4) pro $k = -1$, t. j. $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = n\pi$. Pak každá n-lomená čára, jejíž úhly co do velikosti a pořadí jsou určeny nějakou cyklickou permutací α_{c_i} čísel α_i, je absolutně jednoduchá.*

Důkaz. Pro $n = 0, 1, 2$ je to zřejmé a pro $n = 3$ to platí podle 3.4. Nechť tedy $n \geqq 4$. Podle 3.3 stačí dokázat, že každá cykl. permutace α_{c_i} splňuje podmínku (5) pro indexy i. Dokážeme to sporem. Nechť tedy existuje cykl. permutace α_{c_i} čísel α_i, která nesplňuje (5), t. j. splňuje (6) pro index c_j, $1 \leqq j \leqq n - 1$ a přirozené číslo h, $1 \leqq h \leqq n - j$.

Pak především platí $h \leqq n - 3$. Kdyby totiž bylo $h = n - 1$, muselo by být $j = 1$, ale pak je $n\pi = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = \sum_{i=j}^{j+h} \alpha_{c_i}$ a tento výraz, podle toho, která z nerovností (6) platí, je buď $< (n - 1)\pi$ nebo $> (n + 1)\pi$, což je v obou případech spor. Kdyby dále bylo $h = n - 2$, mohlo by být $j = 1$, případně $j = 2$. Platí-li první nerovnost z (6), musí být $\sum_{i=j}^{j+n-2} \alpha_{c_i} < (n - 2)\pi$ a odtud pro $j = 1$ vyplývá $\alpha_{c_n} > 2\pi$ a pro $j = 2$ vyplývá $\alpha_{c_1} > 2\pi$, což je v obou případech spor. Platí-li konečně druhá nerovnost z (6), musí být $\sum_{i=j}^{j+n-2} \alpha_{c_i} > n\pi$, což je pro $j = 1$ i pro $j = 2$ zase spor.

Podle 3.3 základní permutace α_i splňuje (5). Proto musí být $c_{j+h} < c_j$ a dokonce, protože $h \leqq n - 3$, musí platit $c_{j+h} + 2 < c_j$. Potom je $c_{j+h+1} = u$, $c_{j-1} = u + v$, kde $2 \leqq u \leqq n - 3$ a $v = n - (h + 1) - 1$, takže $1 \leqq v \leqq \leqq n - 3$ a $u + v \leqq n - 1$ čili $v \leqq n - 1 - u < n - u$. Avšak současně platí $\sum_{i=u}^{u+v} \alpha_i = n\pi - \sum_{i=j}^{j+h} \alpha_{c_i}$ a tento výraz, podle toho, zda platí první nebo druhá nerovnost z (6), je buď $> n\pi - h\pi = (v + 2)\pi$ nebo $< n\pi - (h + 2)\pi = v\pi$. To však znamená, že čísla α_i nesplňují (5), a to je spor.

4. Na základě výsledků z předešlého odstavce můžeme odpovědět na zobecněnou Čechovu otázku. Nejdříve dokážeme pomocnou větu:

4.1. *Nechť čísla $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ splňují podmínky (1), (6) a podmínku (4) pro $k \neq 0$. Pak vždy existuje cyklická permutace α_{c_i} čísel α_i, která splňuje podmínku:*

existuje index c_u, $1 \leqq u \leqq n - 1$ a přirozené číslo v, $1 \leqq v \leqq n - 3$, tak, že platí

$$(v - 1)\,\pi < \sum_{i=u}^{u+v} \alpha_{c_i} < v\pi\,. \tag{6'}$$

Důkaz. Nejdříve nechť $k > 0$, tedy $n \geqq 5$. Pak platí $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = [n - 2(k + 1)]\,\pi \leqq (n - 4)\,\pi$. Položíme-li $j = 1$, $h = n - 3$, lze psát $\sum_{i=j}^{j+h} \alpha_i = \sum_{i=1}^{n-2} \alpha_i < (n - 4)\,\pi < h\pi$. Mezi všemi dvojicemi čísel j, h, které splňují tento vztah, t. j. splňují první z nerovností (6), existuje taková dvojice u, v, že v je minimální, což znamená, že pro žádný index u a přirozené číslo $v - 1$ tento vztah není splněn. Tedy platí $(v - 1)\,\pi \leqq \sum_{i=u}^{u+v-1} \alpha_i < \sum_{i=u}^{u+v} \alpha_i < v\pi$ a ježto zřejmě $v \leqq n - 3$, je pro index u a přirozené číslo v splněna (6') přímo pro základní permutaci čísel α_i.

Nechť dále $k = -1$, tedy $n \geqq 4$ a $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = n\pi$. Označme j, h dvojici čísel, pro kterou je splněna podle předpokladu podmínka (6). Jestliže je splněna první nerovnost z (6), pak mezi všemi dvojicemi, které jí vyhovují, existuje taková dvojice u, v, že v je minimální, t. j. platí $(v - 1)\,\pi \leqq \sum_{i=u}^{u+v-1} \alpha_i < \sum_{i=u}^{u+v} \alpha_i < v\pi$. Stejně jako v důkaze k 3.5 se ukáže, že $v \leqq n - 3$, takže pro dvojici u, v je splněna (6') opět přímo pro základní permutaci čísel α_i.

Jestliže je splněna druhá nerovnost z (6), nechť dvojice j, h je taková, že h je maximální, t. j. platí $(h + 2)\,\pi < \sum_{i=j}^{j+h} \alpha_i < \sum_{i=j}^{j+h+1} \alpha_i \leqq (h + 3)\,\pi$. Stejně jako v důkaze k 3.5 se ukáže, že $h \leqq n - 3$. Uvažujme cyklickou permutaci α_{j+h+1}, $\alpha_{j+h+2}, \ldots, \alpha_n, \alpha_1, \ldots, \alpha_{j+h}$, t. j. permutaci α_{c_i}, kde $c_i \equiv j + h + i \pmod n$ pro $i = 1, 2, \ldots, n$. Zvolme přirozená čísla u, v tak, že platí $u = 1$ a $v = n - h - 2$. Snadno se vidí, že platí $1 \leqq v \leqq n - 3$ a také, že platí

$$(v - 1)\,\pi = [(n - h - 2) - 1]\,\pi < \sum_{i=u}^{u+v} \alpha_{c_i} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i - \sum_{i=j}^{j+h} \alpha_i <$$
$$< (n - h - 2)\,\pi = v\pi\,.$$

Existuje tedy cyklická permutace α_{c_i} čísel α_i, pro kterou je splněna podmínka (6'), a to pro dvojici indexů u, v.

4.2. *Nechť čísla α_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ $(n \geqq 3)$ splňují podmínky* (1) *a* (3). *Potom platí:*

1. *Jestliže $m \neq n$, pak vždy existuje rovinný n-úhelník, jehož úhly jedné třídy co do velikosti a pořadí jsou určeny čísly α_i.*

2. *Jestliže $m = n$, pak n-úhelník, jehož úhly jedné třídy jsou co do velikosti a pořadí určeny čísly α_i, existuje tehdy a jen tehdy, když čísla α_i splňují podmínku* (6).

Důkaz. Na základě 1.2 lze se omezit na případ, kdy $m \leqq n$ a potom podmínku (3) nahradit podmínkou (4), takže větu lze dokázat ve dvou částech.

I. Nechť $k \geqq 0$. Větu dokážeme indukcí vzhledem ke k. Pro $k = 0$ je věta správná podle 2.4. Nechť dále $k \geqq 1$, tedy $n \geqq 5$ a předpokládejme, že věta je správná pro každé nezáporné celé $k' < k$. Podle 4.1 existuje jistá cyklická permutace čísel α_i, pro kterou je splněna podmínka (6'). Pro jednoduchost budeme tuto cyklickou permutaci označovat jako permutaci základní, t. j. platí: existuje index u, $1 \leqq u \leqq n - 1$ a přirozené číslo v, $1 \leqq v \leqq n - 3$, pro něž platí

$$(v - 1)\pi < \sum_{i=u}^{u+v} \alpha_i < v\pi .$$

Definujeme číslo $\beta' = v\pi - \sum_{i=u}^{u+v} \alpha_i$. Pak zřejmě $(v + 2)$ čísel $\alpha_u, \alpha_{u+1}, \ldots, \alpha_{u+v}, \beta'$ splňuje podmínky (1) a (2). Protože $v + 2 \geqq 3$, musí podle 2.4 existovat $(v + 2)$-úhelník $A'_u A'_{u+1} \ldots A'_{u+v} B'$, jehož úhly co do velikosti a pořadí jsou určeny čísly β', α_i, kde $u \leqq i \leqq u + v$. Avšak $v \leqq m = n - 2(k + 1)$, takže zbývá ještě $p = n - (v + 1) \geqq n - \{n - 2(k + 1)\} - 1 = 2k + 1 \geqq 3$ úhlů, které jsme zatím neuvažovali. Označíme-li $\mathfrak{M}$ množinu všech jejich indexů $1, 2, \ldots, u - 1, u + v + 1, \ldots, n$, pak jejich součet splňuje nerovnosti

$$\{n - 2(k + 1) - v\}\pi < \sum_{i\in\mathfrak{M}} \alpha_i < \{n - 2(k + 1) - (v - 1)\}\pi .$$

Definujeme $\beta = 2\pi - \beta'$. Pak platí

$$\sum_{i\in\mathfrak{M}} \alpha_i + \beta = \sum_{i\in\mathfrak{M}} \alpha_i + 2\pi - v\pi + \sum_{i=u}^{u+v} \alpha_i = \{(p + 1) - 2[(k - 1) + 1]\}\pi ,$$

což je podmínka (4) pro $k' = k - 1$, které vyhovuje nerovnostem

$$0 \leqq k' = k - 1 \leqq \left[k - \frac{1}{2}\right] = \left[\frac{2k + 1 - 2}{2}\right] \leqq \left[\frac{(p + 1) - 3}{2}\right].$$

Tedy $(p + 1)$ čísel $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{u-1}, \beta, \alpha_{u+v+1}, \ldots, \alpha_n$ splňuje podmínku (4) a zřejmě i podmínku (1), takže podle induktivního předpokladu existuje $(p + 1)$-úhelník $A_1 A_2 \ldots A_{u-1} B A_{u+v+1} \ldots A_n$, jehož úhly co do velikosti a pořadí jsou určeny uvedenými čísly.

Eukleidovským pohybem lze $(v + 2)$-úhelník $A'_u A'_{u+1} \ldots A'_{u+v} B'$ přemístit do polohy $A_u A_{u+1} \ldots A_{u+v} B$ tak, že vrchol B leží mezi A_{u-1} a A_u a také mezi A_{u+v} a A_{u+v+1} a břeh $(v + 2)$-úhelníka, který odpovídá velikostem úhlů α_i, kde $u \leqq i \leqq u + v$, přechází v bodě B ve břeh $(p + 1)$-úhelníka $A_1 A_2 \ldots A_{u-1} . . B A_{u+v+1} \ldots A_n$, kterému odpovídají velikosti úhlů $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{u-1}, \alpha_{u+v+1}, \ldots, \alpha_n$. Pak n-úhelník $A_1 A_2 \ldots A_n$ má požadované úhly, co do velikosti a pořadí určené předepsanými čísly $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$.

II. Nechť $k = -1$. Nutnost podmínky (6) je zřejmá, neboť n-úhelník, který nesplňuje (6), splňuje (5), avšak (5) je podle 3.3 dostatečnou podmínkou absolutní jednoduchosti n-lomené čáry isogonální s daným n-úhelníkem, což je spor. Dokážeme dostatečnost podmínky (6). Podle 4.1 lze opět předpokládat, že základní permutace čísel α_i splňuje (6′), t. j. existuje index u, $1 \leqq u \leqq n - 1$ a přirozené číslo v, $1 \leqq v \leqq n - 3$ tak, že platí

$$(v - 1)\,\pi < \sum_{i=u}^{u+v} \alpha_i < v\pi\,.$$

Definujeme číslo

$$\beta' = v\pi - \sum_{i=u}^{u+v} \alpha_i\,.$$

Pak zřejmě $(v + 2)$ čísel $\alpha_u, \alpha_{u+1}, \ldots, \alpha_{u+v}, \beta'$ splňuje podmínky (1) a (2) a ježto $v + 2 \geqq 3$, existuje podle 2.4 jednoduchý $(v + 2)$-úhelník $A'_u A'_{u+1} \ldots A'_{u+v} B'$, jehož vnitřní úhly co do velikosti a pořadí jsou určeny uvedenými čísly. Pak zbývá $n - (v + 1) \geqq 2$ čísel $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{u-1}, \alpha_{u+v+1}, \ldots, \alpha_n$ a označíme-li $\mathfrak{M}$ množinu všech jejich indexů, zřejmě platí

$$(n - v)\,\pi < \sum_{i \in \mathfrak{M}} \alpha_i < (n - v + 1)\,\pi\,.$$

Definujeme číslo $\beta = (n - v + 2)\,\pi - \sum_{i \in \mathfrak{M}} \alpha_i$. Potom $(n - v)$ čísel $\alpha_1, \alpha_2, \ldots,$ $\alpha_{u-1}, \beta, \alpha_{u+v+1}, \ldots, \alpha_n$ splňuje podmínky (1) a (2′) a zřejmě $n - v \geqq 3$, takže podle 2.4 existuje $(n - v)$-úhelník $A_1 A_2 \ldots A_{u-1} B A_{u+v+1} \ldots A_n$, jehož vnější úhly co do velikosti a pořadí jsou dány uvedenými čísly. Konečně platí $\beta =$ $= 2\pi - \beta'$, takže eukleidovským pohybem lze hořejší $(v + 2)$-úhelník přemístit do polohy $A_u A_{u+1} \ldots A_{u+v} B$ tak, že vrchol B leží mezi vrcholy A_{u-1} a A_u a také mezi A_{u+v} a A_{u+v+1}. Při tom zřejmě vnitřní břeh $(v + 2)$-úhelníka přechází v bodě B ve vnější břeh $(n - v)$-úhelníka, takže čísla $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ jsou velikostmi úhlů jedné třídy n-úhelníka $A_1 A_2 \ldots A_n$.

Závěrem chceme upozornit, že celé číslo k, které bylo přiřazeno mnohoúhelníku v podmínce (4), má jednoduchý geometrický význam a že dovoluje podat jistou klasifikaci rovinných mnohoúhelníků a lomených čar. Obě tyto otázky budou řešeny v dalším článku.