Časopis pro pěstování matematiky, roč. 80 (1950)

O ROVINNÉM BIHARMONICKÉM PROBLÉMU V OBLASTECH S ÚHLOVÝMI BODY

IVO BABUŠKA, Praha.

(Došlo dne 1. listopadu 1954.) DT 513.73

V [1] bylo naznačeno jedno řešení biharmonického problému za předpokladu, že hranice definiční oblasti měla dostatečně hladkou hranici. V praxi se však většinou vyskytují oblasti, které mají pouze po částech dostatečně hladkou hranici s úhlovými body.

V této krátké poznámce ukážeme, že metoda orthonormálních funkcí, jak byla naznačena v [1], vede k cíli úplně stejně jako v případě oblastí s hranicí dostatečně hladkou. Ukážeme, že i konvergence pro oblasti s úhlovými body je v podstatě stejná jako pro oblasti s hranicí dostatečně hladkou.

1. Některé definice a pomocné věty

V tomto odstavci vyslovíme některé definice a věty které budeme dále potřebovat.

Definice 1. *Buď C jednoduchá orientovaná křivka. Buď $\vartheta(s)$ úhel kladného směru tečny s osou x, kde s jest délka oblouku. Nechť $\vartheta(s)$ je totálně spojitá funkce a nechť*

$$\frac{\mathrm{d}\vartheta(s)}{\mathrm{d}s} \in L_p\,, \quad p > 1\,, \quad \text{t. j.} \quad \text{nechť} \int\limits_C \left|\frac{\mathrm{d}\vartheta(s)}{\mathrm{d}s}\right|^p \mathrm{d}s < \infty\,.$$

Potom budeme říkat, že křivka C je dostatečně hladká.

Křivku C budeme nazývat po částech dostatečně hladkou, jestliže je sjednocením konečného počtu oblouků O_i, $i = 1, 2, \ldots, N$ s koncovými body A_i (orientace oblouků je shodná s orientací křivky) takových, že

1. $\displaystyle\int\limits_{C_i} \left|\frac{\mathrm{d}\vartheta(s)}{\mathrm{d}s}\right|^p \mathrm{d}s < \infty$;[1])

2. $|\vartheta(A_i)_+ - \vartheta(A_i)_-| \neq 0$ [mod π],

[1]) V počátečním bodě oblouku béřeme derivaci zleva, v koncovém bodě derivaci zprava.

kde $\vartheta(A_i)_+$ resp. $\vartheta(A_i)_-$ značí limity hodnot úhlu kladného směru tečny s osou x v bodě A_i pro $A_i \precsim z \in C$ resp. $A_i \succsim z \in C$.[2])

Body A_i budeme nazývat singulárními body křivky C. Orientaci předpokládejme tak, že vnitřek je po levé straně.

Věta 1. *Buď C jednoduchá po částech dostatečně hladká křivka a Ω její vnitřek. Buď f spojitá funkce na $\bar{\Omega}$ taková, že*

$$\int_{\Omega}\int\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}p} \mathrm{d}\Omega < \infty .$$

Potom pro $1 < p \leqq 2$ platí

$$\left(\int_C |f|^q \,\mathrm{d}s\right)^{\frac{1}{q}} \leqq M\left\{\left[\int_{\Omega}\int\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right]^{\frac{p}{2}} \mathrm{d}\Omega\right]^{\frac{1}{p}} + \left[\frac{1}{\alpha}\int_{\Omega}\int |f|^p \,\mathrm{d}\Omega\right]^{\frac{1}{p}}\right\},$$

kde

$$\alpha = \iint_{\Omega} \mathrm{d}\Omega$$

a

$$q < \frac{p}{2-p}, \quad [\text{pro } p = 2 \text{ jest } q < \infty] .$$

Při tom konstanta M nezávisí na funkci f [závisí ovšem na q, p, Ω].

Důkaz. Viz [3], věta 2, str. 64, věta 2, str. 72 a poznámka str. 81.

Věta 2. *Buď Ω vnitřek jednoduché křivky C. Buďtež na Ω definovány funkce f_1 a f_2 takové, že*

$$\iint_{\Omega} |f_1|^p \,\mathrm{d}\Omega < \infty , \quad \iint_{\Omega} |f_2|^p \,\mathrm{d}\Omega < \infty .$$

Potom

$$\left[\iint_{\Omega}[(f_1)^2 + (f_2)^2]^{\frac{1}{2}p} \,\mathrm{d}\Omega\right]^{\frac{1}{p}} \leq \left[\iint_{\Omega}(f_1)^p \,\mathrm{d}\Omega\right]^{\frac{1}{p}} + \left[\iint_{\Omega}|f_2|^p \,\mathrm{d}\Omega\right]^{\frac{1}{p}} .$$

Důkaz plyne okamžitě z nerovnosti Minkovského.[3])

Definice 2. *Buď C jednoduchá, po částech dostatečně hladká křivka a Ω její vnitřek. Buď na Ω definována integrovatelná funkce f taková, že*

$$\int_{\Omega}\int\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}p} \mathrm{d}\Omega < \infty , \quad p > \frac{4}{3} .$$

Buď na C definována funkce g. Řekneme, že g je prodloužením funkce f na hranici

---

[2]) Značíme $z \precsim A_i$ resp. $z \succsim A_i$, jestliže v okolí A_i je bod z za bodem resp. před bodem A_i, jdeme-li ve směru orientace křivky.

[3]) Minkovského nerovnost je

$$[\int |x + y|^p \,\mathrm{d}\Omega]^{\frac{1}{p}} \leqq [\int |x|^p \,\mathrm{d}\Omega]^{\frac{1}{p}} + [\int |y|^p \,\mathrm{d}\Omega]^{\frac{1}{p}} .$$

C oblasti Ω, jestliže existuje posloupnost funkcí f_n, $n = 1, 2, \ldots$ spojitých na $\overline{\Omega}$ takových že je

$$\iint_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial(f_n - f)}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial(f_n - f)}{\partial y}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}p} \mathrm{d}\Omega + \iint_{\Omega} |f_n - f| \,\mathrm{d}\Omega \to 0\,, \quad n \to \infty\,,$$

$$\int_C |g - f_n|^2 \,\mathrm{d}s \to 0\,.$$

Poznámka 1. Jestliže f jest spojitá funkce na $\overline{\Omega}$, potom f na hranici je prodloužením i ve smyslu definice 2. Nehledíme-li případně na množinu míry nula, je to prodloužení jediné. (Srv. větu 1.) V tomto smyslu můžeme se dívat na definici 2 jako na zobecnění pojmu spojitého prodloužení.

Poznámka 2. V [1] zavedli jsme jiný pojem prodloužení (srv. def. 10 v [1]). Pro případ hranice dostatečně hladké jsou definice velmi podobné.

Poznámka 3. V definici 2 jsme předpokládali, že $p > \frac{4}{3}$. Vzhledem k větě 1 stačilo předpokládat, že $p > 1$ a místo $\int_C |g - f_n|^2 \,\mathrm{d}s \to 0$ požadovat, aby $\int |g - f_n| \,\mathrm{d}s \to 0$.

V dalším však vystačíme s případem $p \geqq \frac{4}{3}$ a získáme tím podobnost definice 2 a definice 10 v (1) pro případ dostatečně hladké hranice.

Věta 3. *Buď C jednoduchá, po částech dostatečně hladká orientovaná křivka a Ω její vnitřek. Buď $z_0 \in \Omega$. Potom pro každou holomorfní funkci φ definovanou na Ω takovou, že $\operatorname{Im} \varphi(z_0) = 0$ platí*

$$\iint_{\Omega} |\varphi|^{2-\varepsilon} \,\mathrm{d}\Omega \leqq K(\varepsilon)\Big(\iint_{\Omega} (\operatorname{Re} \varphi)^2 \,\mathrm{d}\Omega\Big)^{1-} \,.$$

Přitom nerovnost platí pro každé $1 < \varepsilon < 0$ a konstanta $K(\varepsilon)$ nezávisí na funkci φ.

Důkaz. Viz větu 3 [2].

2. O biharmonickém problému

V tomto odstavci ukážeme, že metoda orthogonálních funkcí, jak byla popsána v [1], konverguje i pro oblasti s hranicí po částech dostatečně hladkou.

Definice 3. *Buď C jednoduchá, po částech dostatečně hladká křivka a Ω její vnitřek. Buďtež na C definovány funkce h a k takové, že*

$$\int_C |h|^2 \,\mathrm{d}s < \infty\,, \quad \int_C |k|^2 \,\mathrm{d}s < \infty\,.$$

Potom regulárním biharmonickým problémem vzhledem k oblasti Ω a funkcím h a k nazveme úlohu nalézti integrovatelnou biharmonickou funkci U takovou, že

$$\iint_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x\, \partial y}\right)^2\right] \mathrm{d}\Omega < \infty$$

a funkce h a k jsou prodloužení $\dfrac{\partial U}{\partial x}$ *resp.* $\dfrac{\partial U}{\partial y}$ *na hranici C ve smyslu definice* 2.

Věta 4. *Buď C jednoduchá, po částech dostatečně hladká křivka a Ω její vnitřek. Regulární biharmonický problém vzhledem k oblasti Ω a funkcím h a k má řešení, jestliže existuje integrovatelná funkce f taková, že je*

1. $$\iint_\Omega \left[\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}\right)^2\right] \mathrm{d}\Omega < \infty .$$

2. *Funkce* $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ *resp.* $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ *má prodloužení h resp. k.*

Důkaz. Viz [3], str. 111 a další.

Platí nyní věta, jejíž tvrzení jest velmi podobné jako ve větě 19 v [1] a to i pro oblasti, jejichž hranice je křivka po částech dostatečně hladká.

Věta 5. *Buď C po částech dostatečně hladká a Ω její vnitřek. Buď $z_0 \in \Omega$. Buď ψ_n, $n = 1, 2, \ldots$, posloupnost celistvých[1]) funkcí splňující tyto předpoklady:*

1. Posloupnost funkcí $v_n = \mathrm{Re}\, \psi_n$ jest uzavřená v prostoru všech harmonických funkcí na Ω integrovatelných s je kvadrátem, t. j. ke každému $\varepsilon > 0$ a každé harmonické funkci v takové, že

$$\iint_\Omega v^2 \,\mathrm{d}\Omega < \infty ,$$

existují koeficienty α_i, $i = 1, 2, \ldots, N$, takové, že

$$\iint_\Omega (v - \sum_{i=1}^{N} \alpha_i v_i)^2 \,\mathrm{d}\Omega < \varepsilon .$$

2. Posloupnost funkcí $v_n = \mathrm{Re}\, \psi_n$ jest orthonormalisovaná, t. j. platí

$$\iint_\Omega v_n v_m \,\mathrm{d}\Omega = \begin{cases} 1 \text{ pro } n = m , \\ 0 \text{ pro } n \neq m . \end{cases}$$

3. Platí $\mathrm{Im}\, \psi_n(z_0) = 0$.

4. Platí $\psi_n = \Psi_n'$ a $\Psi_n(z_0) = 0$.

Buď dále g biharmonická funkce na Ω mající tyto vlastnosti:

1. $$\iint_\Omega \left[\left(\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial^2 g}{\partial x\, \partial y}\right)^2\right] \mathrm{d}\Omega < \infty ;$$

2. $$g = \mathrm{Re}\, [\bar{z}\varphi + \chi] ,^4)$$

kde φ a χ jsou jisté holomorfní funkce definované na Ω.

Potom označíme-li

$$\varphi_N' = \tfrac{1}{4} \sum_{n=1}^{N} \alpha_n \psi_n , \quad \varphi_N = \tfrac{1}{4} \sum_{n=1}^{N} \alpha_n \Psi_n ,$$

---

[1]) Předpoklad, že funkce ψ_n jsou celistvé není podstatný.
[4]) Každou biharmonickou funkci lze v tomto tvaru vyjádřit. Srv. [4], str. 108.

$$F = \frac{\partial g}{\partial x} + \mathrm{i}\frac{\partial g}{\partial y} = \varphi + z\bar{\varphi}' + \bar{\chi}\,,$$

$$\alpha_n = \operatorname{Im}\int_C \bar{F}\psi_n \,\mathrm{d}t\,,$$

$$\chi'_N(z) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_C \frac{\overline{F(t)} - \overline{\varphi_N(t)} - \bar{t}\,\overline{\varphi'_N(t)}}{t - z}\,\mathrm{d}t\,,$$

platí

1. $\varphi'_N \to \varphi'$ *skoro stejnoměrně na* Ω *a*

$$\iint_\Omega |\varphi'_N - \varphi'|^{2-\varepsilon}\,\mathrm{d}\Omega \to 0$$

pro každé $1 > \varepsilon > 0$,

2. $\varphi_N \to \varphi$ *skoro stejnoměrně na* Ω *a na* C *platí*

$$\int_C |\varphi_N - \varphi|^2\,\mathrm{d}s \to 0\,,$$ [5])

3. $\chi'_N \to \chi'$ *skoro stejnoměrně bodově na* Ω.

Důkaz přenechávám čtenáři. Je úplně stejný jako ve větě 19 [1]. Tvrzení 2 a druhá část v tvrzení 1 plyne z vět 1 a 3 této poznámky.

LITERATURA

[1] *Ivo Babuška*: Poznámka k jednomu řešení biharmonického problému. Časopis pro pěstování matematiky *79* (1954), 41—63.

[2] *Ivo Babuška*: Од одном свойстве гармонических функций. Чехосл. мат. журнал, *5* (80), 1955, 220—223.

[3] *С. Л. Соболев:* Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Изд. Лен. гос. унив. 1950.

[4] *Н. И. Мусхелишвили:* Некоторые основные задачи математической теории упругости. Изд. АН СССР, 1949.

Резюме

О ПЛОСКОЙ БИГАРМОНИЧЕСКОЙ ПРОБЛЕМЕ В ОБЛАСТЯХ С УГЛОВЫМИ ТОЧКАМИ

ИВО БАБУШКА (Ivo Babuška), Прага.

(Поступило в редакцию 1/XI 1954 г.)

В статье распространяются результаты работы „Заметка к одному решению бигармонической проблемы“ [1] на области, границы которых достаточно гладки по частям.

[5]) Poněvadž $\Delta g = 4 \operatorname{Re} \varphi'$, snadno z věty 1 nahlédneme, že φ má prodloužení ve smyslu definice 2 [t. j. její reálná a imaginární část]. Pod integračním znamením uvažujeme právě toto prodloužení.

Zusammenfassung

ÜBER DAS EBENE BIHARMONISCHE PROBLEM IN GEBIETEN MIT WINKELPUNKTEN

IVO BABUŠKA, Praha.

(Eingelangt 1. 11. 1954.)

Dieser Artikel enthält die Verbreitung der Resultate der „*Bemerkung zur gewissen Lösung des biharmonischen Problems*“ (Časopis pro pěstování matematiky, *79*, 1954, 41—63) auch für Gebiete die durch teilweise glatte Kurve begrenzt sind.