Časopis pro pěstování matematiky

Anton Kotzig

Poznámka k rozkladom konečných párnych pravidelných grafov na lineárne faktory

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 83 (1958), No. 3, 348–354

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/108285`

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 83 (1958), Praha

POZNÁMKA K ROZKLADOM KONEČNÝCH PÁRNYCH PRAVIDELNÝCH GRAFOV NA LINEÁRNE FAKTORY

ANTON KOTZIG, Bratislava

(Došlo dne 23. října 1957) DT: 513.19

V práci študuje sa vzťah medzi počtom kružníc v kompozíciach lineárnych faktorov daného rozkladu konečného párneho pravidelného grafu $(2n + 1)$-ého stupňa a počtom jeho uzlov. Odvodzuje sa nutná podmienka pre existenciu takého rozkladu konečného párneho pravidelného grafu na lineárne faktory, že kompozícia ľubovoľných dvoch rôznych faktorov rozkladu je hamiltonovskou čiarou grafu.

Je známa táto veta: Ľubovoľný párny[1]) pravidelný graf n-tého stupňa dá sa rozložiť na n lineárnych faktorov. (Pozri [1], str. 171.)

Nech $n > 1$ a nech G je ľubovoľný párny pravidelný graf n-tého stupňa a nech $\mathfrak{R} = \{L_1, L_2, \dots, L_n\}$ je ľubovoľný rozklad grafu G na lineárne faktory.[2]) Graf $Q_{i,j}$, ktorý je kompozíciou lineárnych faktorov L_i, L_j (kde $i < j$; $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$; $Q_{i,j} = L_i \times L_j$), je zrejme kvadratickým faktorom grafu G a teda pravidelným grafom druhého stupňa, ktorý obsahuje všetky uzly z G. Ľubovoľná komponenta grafu $Q_{i,j}$ je preto kružnica grafu G. Zaveďme toto označenie: Znakom $\varkappa_{i,j}$ budeme označovať počet komponent (kružníc) grafu $Q_{i,j}$ a znakom $\varkappa(G, \mathfrak{R})$ označíme súčet $\sum_{j=i+1}^{n} \sum_{i=1}^{n-1} \varkappa_{i,j}$.[3])

V práci [2] (na str. 100) som uviedol príklady pravidelných grafov, ktoré majú túto vlastnosť: ľubovoľný graf $Q_{i,j}$ je hamiltonovskou čiarou grafu[4]) (t. j. platí $\varkappa_{i,j} = 1$ pre všetky dvojice $i < j$; $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$). Vzniká otázka, či pri danom počte uzlov a danom stupni pravidelného grafu existuje aspoň jeden taký párny pravidelný graf, ktorý má uvedenú vlastnosť.

[1]) Hovoríme, že graf G je párny, ak neobsahuje ako podgraf takú kružnicu, ktorá by mala nepárny počet hrán.

[2]) Je známe, že rozklad pravidelného grafu na faktory — a teda tiež na faktory lineárne — nie je vo všeobecnosti jednoznačný.

[3]) Označenie $\varkappa(G, \mathfrak{R})$ pre uvedený súčet volíme preto, že tento súčet je závislý jednak na tvare párneho grafu G a jednak na voľbe rozkladu $\mathfrak{R}$.

[4]) Podgraf Q grafu G nazýva sa hamiltonovskou čiarou grafu G, ak Q je kružnica obsahujúca všetky uzly grafu G.

Istú nutnú podmienku pre existenciu rozkladu $\mathfrak{R}$ s uvedenou vlastnosťou v párnom pravidelnom grafe nepárneho stupňa možno odvodiť z nasledujúcej vety, ktorá má však aj širší význam:

Veta 1. *Nech G je ľubovoľný párny graf $(2m + 1)$-ého stupňa $(m > 0)$ o $2n$ uzloch*[5]) *a nech $\mathfrak{R} = \{L_1, L_2, \ldots, L_{2m+1}\}$ je ľubovoľný rozklad tohoto grafu na lineárne faktory. Platí:*

$$\varkappa(G, \mathfrak{R}) \equiv mn(\mathrm{mod}\ 2)\ .$$

Dôkaz rozdelíme na dve časti. Dokážeme najprv, že veta platí pre $m = 1$ a pre ľubovoľné n. Potom dokážeme, že veta platí pre ľubovoľné m a ľubovoľné n.

I. Nech $m = 1$ (t. j. nech G je párny pravidelný graf tretieho stupňa). Ak je aj $n = 1$, t. j. ak G má iba dva uzly, potom G pozostáva okrem dvoch uzlov už len z troch hrán, ktoré tieto dva uzly spojujú. Každý z lineárnych faktorov z $\mathfrak{R} = \{L_1, L_2, L_3\}$ obsahuje po jednej hrane a každý z kvadratických faktorov $Q_{1,2}, Q_{1,3}, Q_{2,3}$ obsahuje jedinú kružnicu — dvojuholník. Je teda v danom prípade $\varkappa_{1,2} = \varkappa_{1,3} = \varkappa_{2,3} = 1$; $\varkappa(G, \mathfrak{R}) = 3$ a pre $n = m = 1$ veta zrejme platí.

Predpokladajme, že veta platí (pri $m = 1$) pre všetky $n \leqq k$, kde k je isté prirodzené číslo. Nech G je teraz ľubovoľný párny pravidelný graf tretieho stupňa, ktorý má $2k + 2$ uzlov.

(α) Ak v G existuje taká hrana h_1 spojujúca isté uzly u, v, že okrem hrany h_1 ešte ďalšie dve hrany $h_2 \neq h_3$ (kde $h_2 \neq h_1 \neq h_3$) taktiež spojujú uzly u, v, potom pri $k > 0$ graf G nie je súvislý. Podgraf G' pozostávajúci z uzlov u, v a hrán h_1, h_2, h_3 je súvislým párnym grafom tretieho stupňa a zbývajúca časť G'' grafu G je párnym pravidelným grafom tretieho stupňa o $2k$ uzloch. Označme znakom $\varkappa'_{i,j}$ resp. $\varkappa''_{i,j}$ počet kružníc faktora $Q'_{i,j}$ resp. $Q''_{i,j}$ (pričom $Q'_{i,j}$ resp. $Q''_{i,j}$ je táž časť faktora $Q'_{i,j}$, ktorá patrí do G' resp. do G''). Platí

$$\varkappa_{i,j} = \varkappa'_{i,j} + \varkappa''_{i,j} = 1 + \varkappa''_{i,j}\ ,$$

a pretože podľa predpokladu je $\varkappa''_{1,2} + \varkappa''_{1,3} + \varkappa''_{2,3} \equiv k(\mathrm{mod}\ 2)$, platí nutne aj $\varkappa_{1,2} + \varkappa_{1,3} + \varkappa_{2,3} \equiv (k + 1)\ (\mathrm{mod}\ 2)$.

(β) Predpokladajme, že v G neexistujú také dva uzly, ktoré by boli spojené troma hranami, že však existujú uzly u, v, ktoré spojujú hrany h_1, h_2. Nech h_3 je tretia hrana, s ktorou je incidentný uzol u a nech h_4 je tretia hrana, s ktorou je incidentný uzol v. Je zrejme $h_3 \neq h_4$.

Nech hrana h_3 (resp. h_4) spojuje uzly u, u' (resp. v, v'). Je $u' \neq v'$, lebo keby bolo $u' = v'$, potom by v G existoval trojuholník o hranách h_1, h_3, h_4, čo je spor s predpokladom, že G je párny graf. Bez ujmy na všeobecnosti možno predpokladať, že je $h_1 \in L_1$, $h_2 \in L_2$. Potom hrany h_3, h_4 obe patria do L_3.

[5]) Je známe, že počet uzlov nepárneho stupňa v ľubovoľnom grafe je vždy párny (pozri [1], str. 21).

Utvorme graf G' z grafu G takto: (1) Zrušme v G hrany h_1, h_2, h_3, h_4 a zrušme uzly u, v; (2) uzly u', v' spojme novou hranou h'. Graf G' je zrejme pravidelný graf tretieho stupňa o $2k$ uzloch a možno ho rozložiť na tri lineárne faktory L_1', L_2', L_3' takto: Do L_1' (resp. L_2') patria všetky nezrušené hrany z L_1 (resp. L_2) a do L_3' patrí h' a všetky nezrušené hrany z L_3. Že graf G' je opäť párnym grafom, je zrejmé. Označme znakom $\varkappa_{i,j}'$ počet kružníc faktora $Q_{i,j}' = L_i' \times L_j'$. Platí $\varkappa_{1,3}' = \varkappa_{1,2}$; $\varkappa_{2,3}' = \varkappa_{2,3}$. Kým totiž $Q_{1,3}$ (resp. $Q_{2,3}$) obsahuje istú kružnicu, do ktorej patria okrem iných hrán hrany h_3, h_1, h_4 (resp. hrany h_3, h_2, h_4), uvedená trojica hrán je v istej kružnici z $Q_{1,3}'$ (resp. z $Q_{2,3}'$) nahradená jedinou hranou h', ostatné hružnice faktorov $Q_{1,3}, Q_{1,3}'$ (resp. faktorov $Q_{2,3}, Q_{2,3}'$) sa ničím (ani počtom) nelíšia. Platí ďalej $\varkappa_{1,2} = \varkappa_{1,2}' + 1$, lebo všetky kružnice faktora $Q_{1,2}'$ sú tiež kružnicami faktora $Q_{1,2}$ a faktor $Q_{1,2}$ má oproti faktoru $Q_{1,2}'$ naviac ešte práve jednu kružnicu a to dvojuholník s hranami h_1, h_2. Teda je $\varkappa_{1,2} + \varkappa_{1,3} + \varkappa_{2,3} = \varkappa_{1,2}' + \varkappa_{1,3}' + \varkappa_{2,3}' + 1$, a pretože podľa predpokladu veta platí pre $n = k$ a G' má práve $2k$ uzlov, je nutne: $\varkappa_{1,2} + \varkappa_{1,3} + \varkappa_{2,3} \equiv (k + 1) \pmod 2$.

(γ) Predpokladajme napokon, že ľubovoľné dva uzly v G sú spojené najviac jednou hranou. Nech h_1 je ľubovolná hrana z L_1 a nech u, v sú uzly, s ktorými je incidentná hrana h_1. Označme znakom h_2 resp. h_2' hranu z L_2 incidentnú s uzlom u resp. v a znakom h_3 resp. h_3' hranu z L_3 incidentnú s uzlom u resp. v. Druhý uzol, s ktorým je hrana h_2 (resp. h_2'; resp. h_3; resp. h_3') incidentná, označme u_2 (resp. v_2; resp. u_3; resp. v_3). Je zrejmé $u_2 \neq u_3$ (ináč by bol uzol $u_2 = u_3$ spojený dvoma hranami s uzlom u), $v_2 \neq v_3$ (ináč by bol uzol $v_2 = v_3$ spojený dvoma hranami s uzlom v). Je tiež $v_2 \neq u_2 \neq v_3$; $v_2 \neq u_3 \neq v_3$ (ináč by v G existoval trojuholník — spor, lebo G je podľa predpokladu párny graf).

Utvorme z grafu G graf G' takto: (1) Zrušme hrany $h_1, h_2, h_3, h_2', h_3'$ a zrušme uzly u, v; (2) spojme uzly u_2, v_2 novou hranou h_2'' a spojme uzly u_3, v_3 novou hranou h_3''. Graf G' je zrejme pravidelný graf tretieho stupňa a má práve $2k$ uzlov.

Graf G' možno rozložiť na tri lineárne faktory takto: Lineárny faktor L_1' nech obsahuje všetky nezrušené hrany z L_1 a lineárny faktor L_2' (resp. L_3') nech obsahuje všetky nezrušené hrany z L_2 (resp. z L_3) a hranu h_2'' (resp. a hranu h_3''). $\mathfrak{R}' = \{L_1', L_2', L_3'\}$ je zrejme rozklad grafu G' na lineárne faktory.

Dokažme teraz, že G' je párny graf. Je známe (pozri [1], str. 170), že graf je párnym grafom práve vtedy, keď množinu jeho uzlov možno rozložiť na dve triedy uzlov tak, že ľubovoľná hrana grafu spojuje dva uzly patriace do rôznych tried. Preveďme tento rozklad najprv v grafe G. Do jednej z tried (označme ju $\mathfrak{A}_1$) okrem iných uzlov budú patriť uzly u_2, u_3, v, do druhej (označme ju $\mathfrak{A}_2$) budú patriť uzly u, u_2, u_3. Ak položíme $\mathfrak{A}_1' = \mathfrak{A}_1 - \{v\}$; $\mathfrak{A}_2' = \mathfrak{A}_2 - \{u\}$, bude $\{\mathfrak{A}_1', \mathfrak{A}_2'\}$ rozkladom množiny uzlov grafu G', ktorý má požadované vlastnosti. Preto G' je párny graf.

Označme znakom $G'_{i,j}$ ten kvadratický faktor grafu G', ktorý je kompozíciou faktorov L'_i, L'_j ($i < j$; $i, j \in \{1, 2, 3\}$) a znakom $\varkappa'_{i,j}$ počet jeho kružníc. Pretože počet uzlov grafu G' je $2k$ a G' je párny pravidelný graf tretieho stupňa, je podľa predpokladu:

$$\varkappa'_{1,2} + \varkappa'_{1,3} + \varkappa'_{2,3} \equiv k \pmod 2 .$$

Namiesto tej kružnice z $Q_{1,2}$, ktorá okrem iných hrán obsahuje hrany h_2, h_1, h'_2, vyskytuje sa v $Q'_{1,2}$ kružnica, ktorá obsahuje hranu h''_2 a ostatné hrany v oboch kružniciach sú rovnaké. Ľubovoľná iná kružnica z $Q_{1,2}$ je tiež kružnicou z $Q'_{1,2}$ a obrátene. Je teda $\varkappa'_{1,2} = \varkappa_{1,2}$. Podobne: Namiesto kružnice z $Q'_{1,3}$ obsahujúcej hrany h_3, h_1, h'_3 vyskytuje sa v $Q_{1,3}$ kružnica obsahujúca hranu h''_3 a ľubovoľná iná kružnica z $Q_{1,3}$ je tiež kružnicou z $Q'_{1,3}$ a obrátene. Teda je $\varkappa'_{1,3} = \varkappa_{1,3}$. Dokážeme, že platí: $\varkappa_{2,3} + \varkappa'_{2,3} \equiv 1 \pmod 2$. Označme znakom K_u (resp. K_v) kružnicu z $Q_{2,3}$ obsahujúcu uzol u (resp. uzol v). Predpokladajme, že je $K_u = K_v$; t. j., že kružnica z $Q_{2,3}$ obsahujúca uzol u obsahuje aj uzol v. Označme uzly tejto kružnice znakmi $w_1, w_2, \ldots, w_{2r}$ v poradí, v akom cez ne pri obiehaní kružnice prechádzame vychádzajúc z uzla $u = w_1$, pričom posledným uzlom pred návratom do uzla u bude uzol $w_{2r} = u_2$. Uzly w_{2i-1}, w_{2i} sú v G zrejme spojené hranou z L_3 a uzly w_{2i}, w_{2i+1}, sú spojené hranou z L_2. Nech $v = w_s$. Číslo s je zrejme párne. Keby totiž s bolo nepárne číslo, potom by ľubovoľná z ciest spojujúcich uzly u, v v kružnici K_u obsahovala párny počet hrán a takáto cesta spolu s hranou h_1 by tvorila v G kružnicu s nepárnym počtom hrán — spor s predpokladom, že G je párny graf. Teda s je párne číslo a pretože je $h'_3 \in L_3$, je nutne $v_3 = w_{s-1}$; $v_2 = w_{s+1}$. Pri vzniku grafu G' zrušia sa tieto hrany kružnice K_u: h_2, h_3, h'_2, h'_3 a teda z kružnice K_u zostanú v G' iba dve cesty: jedna (označme ju C_2) spojujúca uzol $w_{s+1} = v_2$ s uzlom $w_{2r} = u_2$; druhá (označme ju C_3) spojujúca uzol $w_1 = u_3$ s uzlom $w_{s-1} = v_3$. Cesta C_2 spolu s hranou h''_2 tvorí istú kružnicu K_2 grafu $Q'_{2,3}$ a cesta C_3 spolu s hranou h''_3 tvorí istú kružnicu $K_3 (K_3 \neq K_2)$ grafu $Q'_{2,3}$. Všetky ostatné kružnice z $Q_{2,3}$ (s výjimkou kružnice K_u) sú tiež kružnicemi z $Q'_{2,3}$ a všetky kružnice z $Q'_{2,3}$ iné než K_2, K_3 sú tiež kružnicami v $Q_{2,3}$. Je preto $\varkappa'_{2,3} = \varkappa_{2,3} + 1$ a teda za předpokladu, že je $K_u = K_v$, platí: $\varkappa_{1,2} + \varkappa_{1,3} + \varkappa_{2,3} \equiv (k + 1) \pmod 2$. Predpokladajme teraz, že je $K_u \neq K_v$. Potom ale prvky z kružnice K_u patriace do G' tvoria v G' istú cestu C_u spojujúcu uzly u_2, u_3 a prvky z K_v patriace do G' tvoria v G' istú cestu C_v spojujúcu uzly v_2, v_3. Cesty C_u, C_v spolu s hranami h''_2, h''_3 tvoria potom jedinú kružnicu patriacu do $Q'_{2,3}$. Ostatné kružnice z $Q'_{2,3}$ sú tiež kružnicami v $Q_{2,3}$ a ľubovoľná kružnica z $Q_{2,3}$ iná než K_v a iná než K_v je tiež kružnicou v $Q'_{2,3}$. Preto je $\varkappa'_{2,3} = \varkappa_{2,3} - 1$ a aj v prípade, že je $K_u \neq K_v$, platí: $\varkappa_{1,2} + \varkappa_{1,3} + \varkappa_{2,3} \equiv (k + 1)) \pmod 2$.

Ak teda (pri $m = 1$) veta platí pre $n \leqq k$, platí aj pre $n = k + 1$. Tým je prvá časť dôkazu vykonaná.

II. Nech $m > 1$. Predpokladajme, že veta platí pre ľubovoľné n, ak $m \leqq r$

(kde r je isté prirodzené číslo). Nech G je ľubovoľný párny pravidelný graf $(2r + 3)$-ého stupňa s $2n$ uzlami a $\mathfrak{R} = \{L_1, L_2, \ldots, L_{2r+3}\}$ je ľubovoľný jeho rozklad na lineárne faktory. Označme znakom G' podgraf grafu G definovaný takto: $G' = L_1 \times L_2 \times \ldots \times L_{2r+1}$. Graf $L_i \times L_{2r+2} \times L_{2r+3} = G_i$, (kde $i \in \{1, 2, \ldots, 2r + 1\}$) je párny pravidelný graf tretieho stupňa a graf G' je párny pravidelný graf $(2r + 1)$-ého stupňa.

Podľa časti I dôkazu tejto vety platí $\varkappa_{i,2r+2} + \varkappa_{i,2r+3} + \varkappa_{2r+2,2r+3} \equiv n \pmod 2$ pre ľubovoľné $i \in \{1, 2, \ldots, 2r + 1\}$. Ak prevediem súčet cez všetky $i \in \{1, 2, \ldots, \ldots, 2r + 1\}$ na oboch stranách a porovnáme, dostaneme:

$$\sum_{i=1}^{2r+1} \varkappa_{i,2r+2} + \sum_{i=1}^{2r+1} \varkappa_{i,2r+3} + (2r + 1)\, \varkappa_{2r+2,2r+3} \equiv (2r + 1)\, n \pmod 2 ,$$

čiže

$$\sum_{i=1}^{2r+1} \varkappa_{i,2r+2} + \sum_{i=1}^{2r+1} \varkappa_{i,2r+3} + \varkappa_{2r+2,2r+3} \equiv n \pmod 2 . \tag{*}$$

Je však

$$\varkappa(G, \mathfrak{R}) = \sum_{j=i+1}^{2r+3} \sum_{i=1}^{2r+2} \varkappa_{i,j} = \sum_{j=i+1}^{2r+1} \sum_{i=1}^{2r} \varkappa_{i,j} + \sum_{i=1}^{2r+1} \varkappa_{i,2r+2} + \sum_{i=1}^{2r+1} \varkappa_{i,2r+3} + \varkappa_{2r+2,2r+3} =$$
$$= \varkappa(G', \mathfrak{R}') + \sum_{i=1}^{2r+1} \varkappa_{i,2r+2} + \sum_{i=1}^{2r+1} \varkappa_{i,2r+3} + \varkappa_{2r+2,2r+3} ,$$

kde $\mathfrak{R}' = \{L_1, L_2, \ldots, L_{2r+1}\}$.

Podľa predpokladu je

$$\varkappa(G', \mathfrak{R}') \equiv rn \pmod 2$$

a teda (pozri (*)) platí: $\varkappa(G, \mathfrak{R}) \equiv (r + 1)\, n \pmod 2$.

Ak veta platí pre $m \leqq r$, platí aj pre $m = r + 1$. Pretože veta platí pre všetky n, ak $m = 1$, platí pre všetky n aj ak $m = 1, 2, 3, \ldots$ a teda platí pre ľubovoľné n a ľubovoľné m. Tým je dôkaz vety vykonaný.

Z vety 1 vyplýva ihneď táto veta:

Veta 2. *Nech G je párny pravidelný graf m-tého stupňa ($m > 2$) o $2n$ uzloch. Taký rozklad $\mathfrak{R} = \{L_1, L_2, \ldots, L_m\}$ grafu G na lineárne faktory, že kompozícia ľubovoľných dvoch lineárnych faktorov rozkladu je hamiltonovskou čiarou grafu G, môže existovať len vtedy, keď n je nepárne číslo.*

Dôkaz. Nech v G existuje rozklad $\mathfrak{R}$ s požadovanou vlastnosťou. Nech $G' = L_1 \times L_2 \times L_3$. Graf G' je podgrafom grafu G a G' je taký pravidelný párny graf tretieho stupňa, ktorý obsahuje všetky uzly grafu, pričom kompozície $L_1 \times L_2$; $L_1 \times L_3$; $L_2 \times L_3$ sú hamiltonovskými čiarami grafu G'. Nech $\mathfrak{R}' = \{L_1, L_2, L_3\}$. Platí: $\varkappa(G', \mathfrak{R}') = 3$ a podľa vety 1 je $\varkappa(G', \mathfrak{R}') \equiv n \pmod 2$. Z toho ihneď vyplýva $n \equiv 1 \pmod 2$, čo bolo treba dokázať.

Odvozená veta pripojuje k už odvodenej podmienke pre existenciu rozkladu $\mathfrak{R}$ s požadovanými vlastnosťami[6]) ďalšiu nutnú podmienku. Je totiž už dokázané toto:

Veta 3. *Graf, v ktorom existuje taký rozklad na lineárne faktory, že kompozícia ľubovoľných dvoch rôznych lineárnych faktorov rozkladu je hamiltonovskou čiarou grafu, je pravidelne súvislý.*

Dôkaz najde čitateľ v práci [2] (str. 99).

LITERATURA

[1] *D. König:* Theorie der endlichen und unendlichen Graphen, Leipzig, 1936.

[2] *A. Kotzig:* Súvislosť a pravidelná súvislosť konečných grafov, Bratislava, 1956.

Резюме

ЗАМЕЧАНИЕ К РАЗЛОЖЕНИЯМ КОНЕЧНОГО ЧЕТНОГО ГРАФА НА МНОЖИТЕЛИ ПЕРВОЙ СТЕПЕНИ

АНТОН КОЦИГ (Anton Kotzig), Братислава

(Поступило в редакцию 23/X 1957 г.)

В статье доказываются следующие теоремы:

1. *Пусть G — произвольный конечный четный регулярный граф $(2m + 1)$-ой степени $(m > 0)$, $2n$ — число его вершин, $\mathfrak{R} = \{L_1, L_2, \ldots, L_{2m+1}\}$ — произвольное разложение графа G на множители первой степени. Обозначим через $\varkappa_{i,j}$ число окружностей в композиции $L_i \times L_j$ $(i < j)$ и через $\varkappa(G, \mathfrak{R})$ сумму $\sum_{j=i+1}^{2m+1} \sum_{i=1}^{2m} \varkappa_{i,j}$. Имеет место следующее: $\varkappa(G, \mathfrak{R}) \equiv mn \pmod 2$.*

2. *Пусть G — произвольный конечный четный регулярный граф m-ой степени $(m > 2)$. Такое разложение $\mathfrak{R} = \{L_1, L_2, \ldots, L_m\}$ графа G на множители первой степени, что произвольная композиция $L_i \times L_j$ (где $i < j$; $i, j \in \{1, 2, \ldots, m\}$) является гамильтоновой линией графа G, может существовать только тогда, если число n вершин графа G удовлетворит следующему условию: $n \equiv 2 \pmod 4$.*

[6]) V práci [2], v ktorej bola spomenutá podmienka odvodená, skúmali sa tiež rozklady grafov všeobecnejších a nie iba rozklady párnych pravidelných grafov.

Zusammenfassung

BEMERKUNG ZU DEN FAKTORENZERLEGUNGEN DER ENDLICHEN PAAREN REGULÄREN GRAPHEN

ANTON KOTZIG, Bratislava

(Eingegangen am 23. Oktober 1957)

In der Arbeit werden folgende Sätze bewiesen:

1. *Es sei G ein endlicher paarer regulärer Graph* $(2m + 1)$*-ten Grades* $(m > 0)$ *mit* $2n$ *Knotenpunkten und es sei* $\mathfrak{R} = \{L_1, L_2, \ldots, L_{2m+1}\}$ *eine beliebige Zerlegung des Graphen G in lineare Faktoren. Bezeichnen wir mit* $\varkappa_{i,j}$ *die Anzahl der Kreise in der Komposition* $L_i \times L_j$ $(i < j)$ *und mit* $\varkappa(G, \mathfrak{R})$ *die Summe* $\sum_{j=i+1}^{2m+1} \sum_{i=1}^{2m} \varkappa_{i,j}$. *Es gilt immer* $\varkappa(G, \mathfrak{R}) \equiv mn \pmod 2$.

2. *Es sei G ein endlicher paarer regulärer Graph m-ten Grades* $(m > 2)$. *Eine solche Zerlegung* $\mathfrak{R} = \{L_1, L_2, \ldots, L_m\}$ *des Graphen G in lineare Faktoren, dass jede Komposition* $L_i \times L_j$ *(wo* $i < j$; $i, j \in \{1, 2, \ldots, m\}$*) eine Hamiltonsche Linie des Graphen G ist, kann nur dann existieren, wenn die Anzahl n der Knotenpunkte des Graphen G folgende Bedingung erfüllt:* $n \equiv 2 \pmod 4$.