Časopis pro pěstování matematiky, roč. 85 (1960), Praha

ÚLOHY A PROBLÉMY

K úloze č. 2 položené JANEM MAŘÍKEM v Časopise pro pěstování matematiky roč. *82* (1957), str. 100:

Buď m celé > 1. Nechť pro $x \in E_m$ a přirozené $i \in \langle 1, m \rangle$ značí symbol x_i i-tou souřadnici bodu x, pro $A \subset E_m$ a $\alpha \in E_1$ buď A_i^α množina všech $x \in A$, pro něž $x_i = \alpha$.

Rozhodněte, zda platí tato věta: Buď A řídká měřitelná množina v E_m. Nechť každá množina A_i^α ($i = 1, \ldots, m$, $\alpha \in E_1$) má jen spočetně mnoho komponent. Potom má A míru 0.

Poznámka. Podle věty 1 z článku J. Maříka „Poznámka o řídkých množinách v E_m", který vyšel v tomto časopise, roč. 81 (1956), str. 337—341, platí věta pro $m = 2$.

Je-li $m > 2$, je odpověď na tuto otázku záporná, jak ukazuje tento příklad:

Pišme $K_1 = \langle 0,1 \rangle$, $K_n = K_{n-1} \times \langle 0, 1 \rangle$ ($n = 2, 3, \ldots$). Označme symbolem L_m m-rozměrnou Lebesgueovu míru.

Ukážeme, že ke každému přirozenému $n \geqq 3$ a ke každému $a \in (0, 1)$ existuje množina A o následujících vlastnostech I—III:

I $A \subset K_n$, A je kontinuum řídké v E_n.
II $\mathsf{L}_n\, A \geqq a$.
III Pro každé $\alpha \in E_1$ a každé přirozené $i \in \langle 1, n \rangle$ je množina A_i^α souvislá.

Zvolme tedy $a \in (0, 1)$ a přirozené $n \geqq 3$ pevně. Buď C kontinuum řídké v E_2, $C \subset K_2$, $\mathsf{L}_2\, C \geqq a$. Nechť $\hat{C}$ je konvexní obal množiny C. Umluvme se, že symbol K_0 — pokud se někde objeví jako faktor v kartézském součinu — vždy vypustíme a položme

$$B = C \times K_{n-2}\,, \quad D = \hat{C} \times K_{n-3} \times \{1\}\,.$$

Pak množina $A = B \cup D$ má vlastnosti I—III. Vlastnost I je splněna, neboť B, D jsou kontinua řídká v E_n, $B \cap D \neq \emptyset$, $B \cup D \subset K_n$. Dále je $\mathsf{L}_n(B \cup D) = \mathsf{L}_n B = \mathsf{L}_2 C \geqq a$, takže platí také podmínka II. Pro přirozené $i \in \langle 3, n \rangle$ máme $B_i^\alpha = C \times K_{i-3} \times \{\alpha\} \times K_{n-i}$ jestliže $\alpha \in \langle 0, 1 \rangle$, $B_i^\alpha = \emptyset$ když $\alpha \in E_1 - \langle 0, 1 \rangle$. Dále je $D_n^\alpha = \emptyset$ pro $\alpha \neq 1$, $D_n^1 = D$, $D_i^\alpha = \emptyset$ kdykoli $\alpha \in E_1 - \langle 0, 1 \rangle$,

$$D_i^\alpha = \hat{C} \times K_{i-3} \times \{\alpha\} \times K_{n-i-1} \times \{1\}$$

pro $\alpha \in \langle 0, 1 \rangle$ a přirozená $i \in \langle 3, n)$. Vidíme, že pro $3 \leqq i \leqq n$ jsou množiny B_i^α, D_i^α vesměs souvislé, a není-li některá z nich prázdná, pak $B_i^\alpha \cap D_i^\alpha \neq \emptyset$; tedy také $A_i^\alpha = B_i^\alpha \cup D_i^\alpha$ je souvislá množina.

Je-li konečně $i = 1$ nebo $i = 2$, pak

$$B_i^\alpha = C_i^\alpha \times K_{n-2}\,, \quad D_i^\alpha = \hat{C}_i^\alpha \times K_{n-3} \times \{1\}\,.$$

Množina D_i^α je souvislá a v případě $B_i^\alpha \neq \emptyset$ má každá komponenta množiny B_i^α neprázdný průnik s D_i^α. Množina $A_i^\alpha = B_i^\alpha \cup D_i^\alpha$ je tudíž rovněž souvislá. Tím je podmínka III ověřena.

Josef Král, Praha

K problémům č. 1 a 4, položeným Janem Maříkem v Časopise pro pěstování matematiky, roč. *84* (1959), str. 105 a 374:

Buď Y archimedovský K-lineál, který je zároveň Banachovým (tj. úplným normovaným lineárním) prostorem s normou φ. Předpokládejme, že

$$\varphi(a) = \varphi(|a|) \tag{1}$$

pro každé $a \in Y$. Rozhodněte, zda platí implikace

$$a, b \in Y\,, \quad 0 \leqq a \leqq b \Rightarrow \varphi(a) \leqq \varphi(b)\,. \tag{2}$$

Odpověď na tuto otázku je záporná, což ukážeme na příkladě. Nechť V je prostor všech reálných funkcí s konečnou variací na intervalu $\langle 0, 1\rangle$; nechť Y je lineál všech spojitých funkcí z prostoru V. Variaci funkce f na intervalu $\langle 0, 1\rangle$ označme $\operatorname{var} f$. Pro $a \in V$ položme

$$\varphi(a) = |a(0)| + \operatorname{var} a\,.$$

Je známo, že V s normou φ je Banachův prostor. Nechť $a_n \in Y$ ($n = 1, 2, \ldots$), $a \in V$, $\lim_{n\to\infty} \varphi(a_n - a) = 0$. Potom pro každé $t \in \langle 0, 1\rangle$ platí

$$|a_n(t) - a(t) - a_n(0) + a(0)| \leqq \operatorname{var}(a_n - a)\,,$$
$$|a_n(t) - a(t)| \leqq \operatorname{var}(a_n - a) + |a_n(0) - a(0)| = \varphi(a_n - a)\,.$$

Vidíme, že $\lim_{n\to\infty} a_n(t) = a(t)$ stejnoměrně, takže funkce a je spojitá, $a \in Y$. Odtud plyne, že prostor Y je uzavřený ve V a tedy úplný.

Pro $a, b \in Y$ nechť $a \leqq b$ značí, že $a(t) \leqq b(t)$ pro všechna $t \in \langle 0, 1\rangle$. Potom je Y archimedovský K-lineál, jestliže pro $a \in Y$ klademe $a_+(t) = (a(t))_+$; snadno se ověří, že $a_+ \in Y$. Ukážeme, že platí (1). Buď tedy a libovolný prvek z Y. Protože $|a|(0) = |a(0)|$, stačí dokázat, že $\operatorname{var} a = \operatorname{var} |a|$. Snadno se zjistí, že $\operatorname{var} |a| \leqq \operatorname{var} a$. Buď naopak $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_k = 1$ libovolné dělení intervalu $\langle 0, 1\rangle$. Ke každému i ($1 \leqq i \leqq k$), pro něž jedno z čísel $a(t_{i-1})$, $a(t_i)$ je kladné a jedno záporné, existuje $x_i \in (t_{i-1}, t_i)$ tak, že $a(x_i) = 0$. Množina všech bodů t_i spolu se všemi body x_i tvoří dělení $0 = t'_0 < t'_1 < \ldots < t'_n = 1$. Potom $\sum_{i=1}^{k} |a(t_i) - a(t_{i-1})| \leqq \sum_{j=1}^{n} |a(t'_j) - a(t'_{j-1})| = \sum_{j=1}^{n} ||a|(t'_j) - |a|(t'_{j-1})| \leqq \operatorname{var} |a|$, takže je též $\operatorname{var} a \leqq \operatorname{var} |a|$. Platí tedy (1). Položíme-li však pro $t \in \langle 0, 1\rangle$

$$a(t) = \sin \pi t\,, \quad b(t) = 1\,,$$

pak $a, b \in Y$, $0 \leqq a \leqq b$, $\varphi(a) = 2$, $\varphi(b) = 1$ a tedy (2) neplatí.

Jan Hejcman, Praha