L. L. Velikovich

$(2, n)$ -- звёздно транзитивные графы

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 108 (1983), No. 2, 137--145

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/108416`

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 108 (1983), Praha

$(2, n)$ – ЗВЁЗДНО ТРАНЗИТИВНЫЕ ГРАФЫ

Л. Л. Великович, Гомель

(Поступило в редакцию 17/VIII. 1981 г.)

Во многих работах [1, 2, 7, 8] изучаются графы, группы автоморфизмов которых обладают определенными свойствами транзитивности. Настоящая статья продолжает исследования, начатые в [3–6].

Под графом $G = (V(G), X(G))$ будем понимать связный обыкновенный граф [7] с множеством вершин $V(G)$ и с множеством рёбер $X(G)$. Группу автоморфизмов графа G будем обозначать $\operatorname{Aut} G$. Вершины и рёбра графа называют [8] его элементами.

Пусть R_0-некоторое m-арное отношение на множестве вершин, а R_1-некоторое n-арное отношение на множестве рёбер графа G, инвариантные относительно автоморфизмов $(m, n \geqq 1)$. Обозначим через $H(m, n, R_0, R_1, G)$ множество упорядоченных наборов $(u_1, \ldots, u_m, x_1, \ldots, x_n)$ различных элементов графа G, где $u_i \in V(G)$, $x_j \in X(G)$, причём ни одна вершина u_i не инцидентна ни одному ребру x_j $(1 \leqq i \leqq m,\ 1 \leqq j \leqq n)$, вершины $u_1, \ldots, u_m$ находятся между собой в отношении R_0, а рёбра $x_1, \ldots, x_n$ – в отношении R_1. Обозначим через $H(\mathbf{m}, n, R_0, R_1, G)$ множество, полученное из множества $H(m, n, R_0, R_1, G)$ отождествлением всех наборов, отличающихся только порядком следования вершин.

В случае $m = 1$ $(n = 1)$ условимся, что отношение R_0 (соответсвенно R_1) является тождественным отображением множества $V(G)$ (соотвественно $X(G)$) на себя. Тождественное отображение множества $V(G)$ будем обозначать через ε_0, а множества $X(G)$ через ε_1.

Группу подстановок, индуцируемую группой автоморфизмов графа G на множестве $H(m, n, R_0, R_1, G)$ $(H(\mathbf{m}, n, R_0, R_1, G))$, будем обозначать через $\Gamma(m, n, R_0, R_1, G)$ (соответственно через $\Gamma(\mathbf{m}, n, R_0, R_1, G)$ и называть (m, n, R_0, R_1) – неинцидентной (соответственно $(\mathbf{m}, n, R_0, R_1)$ – неинцидентной) группой графа G. Граф G назовём (m, n, R_0, R_1) – транзитивны м(соответственно $(\mathbf{m}, n, R_0, R_1)$ – транзитивным), если группа $\Gamma(m, n, R_0, R_1, G)$ транзитивна [10] на множестве $H(m, n, R_0, R_1, G)$ (соответственно группа $\Gamma(\mathbf{m}, n, R_0, R_1, G)$ транзитивна на множестве $H(\mathbf{m}, n, R_0, R_1, G)$).

Будем говорить, что вершины $u_1, \ldots, u_m$ находятся в отношении σ_0 если любые две из них смежны, и что рёбра $x_1, \ldots, x_n$ находятся в отношении σ_1, если все эти рёбра инцидентны одной вершине. Граф G назовём (m, n) – звёздно транзитивным ((m, n) – звёздно транзитивным), если G является $(m, n, \sigma_0, \sigma_1)$ – транзитивным (соответственно $(m, n, \sigma_0, \sigma_1)$ – транзитивным). Ранее автором рассматривался случай, когда $m = 1$ [3–6]. В настоящей статье рассматриваетςя случай $m = 2$. Полностью описываются $(2, 1), (2, 2)$ – звёздно-транзитивные графы, а также $(2, n)$ – звёздно транзитивные регулярные [8] графы для любого n.

Несмежные рёбра графа будем называть параллельными. Двойной звездой называют [9] граф, представляющий собой объединение двух непересекающихся звёзд [8] с добавлением ребра, соединяющего их центры. Если исходные звёзды содержат соответственно k и l рёбер, то полученную двойную звезду обозначают $S(k, l)$.

Теорема 1. [5] *Граф G порядка $p \geqq 4$ будет $(2, 1)$ – звёздно транзитивным тогда и только тогда, когда G принадлежит к одному из следующих типов графов:*

$$C_5;\ K_p;\ K_{m,n}(m, n \geqq 2),\ \ \overline{K_{p-2} \cup \overline{K_2}}\ ;\ \ S\left(\frac{p}{2} - 1\ ;\ \frac{p}{2} - 1\right).$$

Доказательство. Пусть $u \in V(G)$, $x = w_1w_2 \in X(G)$, причём u и x не инцидентны. Определим расстояние $d^*(u, x)$ между u и x следующим образом: $d^*(u, x) = \{d(u, w_1);\ d(u, w_2)\}$ [3], где $d(u, w_i)$ – расстояние между вершинами u, w_i $(i = 1, 2)$ [8]. Пусть $y = v_1v_2$ – ребро графа G, параллельное ребру $x = w_1w_2$. Определим расстояние $d^{**}(x, y)$ между рёбрами x, y как неупорядоченную пару $\{d_1^*, d_2^*\}$, где $d_1^* = d^*(w_1, y)$, $d_2^* = d^*(w_2, y)$. Очевидно, если G – $(2, 1)$ – звёздно транзитивен, то расстояние между любыми двумя параллельными рёбрами одно и то же. Поэтому $\operatorname{diam} G \leqq 3$, где через $\operatorname{diam} G$ мы обозначаем диаметр графа G [8]. Если $\operatorname{diam} G = 1$, то $G = K_p$. Так как G – – $(2, 1)$ – звёздно транзитивен, то $H(2, 1, \sigma_0, \varepsilon_1, G) \neq \emptyset$ и G содержит не более двух рёбер, каждое из которых смежно со всеми остальными рёбрами.

Пусть $\operatorname{diam} G = 2$. Возможны три случая.

I. Для любого ребра графа G существует параллельное.

Пусть $G \neq C_5$. Предположим, что граф содержит треугольник $u_1u_2u_3$. Тогда в графе существует ребро u_iv $(1 \leqq i \leqq 3)$, инцидентное одной из вершин треугольника. Пусть, например, $i = 3$, и пусть $G_1 = \langle u_1, u_2, u_3, v\rangle$ [8]. Из $q(G_1) = 4$ следовало бы, что $d^{**}(u_1u_2;\ vu_3) \neq d^{**}(vu_3;\ u_1u_2)$. Поэтому $q(G_1) \geqq 5$. Если бы $G_1 = K_4$, то $G = K_p$. Следовательно, $G_1 = K_4 - x$. В силу $(2, 1)$ – звёздной транзитивности все подграфы графа G на четырёх вершинах есть $K_4 - x$. А это возможно только тогда, когда $G = K_4 - x$, что противоречит условию рассматриваемого случая. Значит, G не содержит треугольников, а следовательно, и простых циклов длины пять с диагоналями.

Предположим, что граф содержит пятиугольник без диагоналей $u_1u_2u_3u_4u_5$. Так как $G \neq C_5$, то в графе существует ребро, инцидентное только одной из вершин пятиугольника. Пусть, например, $x = u_5v$ и пусть $G_2 = \langle u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, v\rangle$. Так как граф не содержит треугольников, то $q(G_2) \leqq 7$. Рассмотрим возможные случаи.

1. $q(G_2) = 6$. Тогда $d^{**}(x, z) = \{\{1, 2\};\ \{2, 2\}\} \neq d^{**}(x, t) = \{\{2, 2\}\colon\ \{2, 2\}\}$, где $x = u_5v$, $y = u_1u_5$, $z = u_1u_2$, $t = u_2u_3$.

2. $q(G_2) = 7$.

а) $u_2v \in X(G_2)$, $d^{**}(x, z) = \{\{1, 2\}; \{1, 2\}\} \neq d^{**}(y, t) = \{\{1, 2\}; \{2, 2\}\}$.

б) $u_3v \in X(G_2)$, $d^{**}(y, t) = \{\{1, 2\};\ \{2, 2\}\} \neq d^{**}(x, z) = \{\{1, 2\},\ \{1, 2\}\}$, где $z = u_3u_4$.

Итак, граф не содержит простых циклов длины пять. Покажем, что G не содержит простых нечётных циклов длины $\geqq 7$. Пусть u_1, u_2, u_3, u_4 — вершины графа G, причём u_i смежна с u_{i+1} $(1 \leqq i \leqq 3)$. Тогда, очевидно, u_1 смежна с u_4. Пусть теперь c_{2n+1}-нечетный цикл длины $\geqq 7$ графа G с множеством вершин $\{u_i\}$, $1 \leqq i \leqq 2n + 1$, где u_i смежна с u_{i+1} и суммирование производится по $\operatorname{mod}\ (2n + 1)$. Тогда вершина u_1 должна быть смежной с вершиной u_4, а значит, с вершиной u_6 и, следовательно с вершиной u_8 и т.д. Поэтому u_1 должна быть смежной и с вершиной u_{2n}. Следовательно, граф G содержит треугольник $u_1u_{2n+1}u_{2n}$, что невозможно. Итак по теореме Кёнига [7, 8], G — двудольный граф, а так как в рассматриваемом случае $\operatorname{diam} G = 2$, то $G = K_{m,n}(m \geqq 2,\ n \geqq 2)$.

II. Граф содержит точно одно ребро x, смежное со всеми остальными рёбрами.

Предположим, что граф содержит треугольник $v_1v_2v_3$. Тогда ребро x должно принадлежать этому треугольнику. Пусть, например, $x = v_1v_2$ и пусть y — ребро графа G, не принадлежащее треугольнику $v_1v_2v_3$. Тогда $y = v_iu_1$ $(i = 1{,}2)$. Пусть, например, $y = v_2u_1$. По условию рассматриваемого случая в графе должно существовать ребро $z = v_1u_2$, инцидентное вершине v_1. Пусть $u_1 \neq u_2$. Рассматривая подграф $G_3 = \langle v_1v_2v_3, u_2\rangle$ как и в случае 1, заключаем, что $q(G_3) \geqq 5$. Следовательно, $u_2v_2 \in X(G)$. К аналогичному заключению приходим, рассматривая подграф $G_4 = \langle v_1, v_2, v_3, u_1\rangle : u_1v_1 \in X(G)$. Значит, граф G состоит из $p\,.\,2$ треугольников, имеющих общее ребро:

$$G = \overline{\overline{K}_{p-2} \cup \overline{K}_2}\,.$$

Допустим теперь, что граф не содержит треугольников. Пусть $v_1v_2v_3$ — диаметральная цепь графа G. Тогда $x = v_2u$. Очевидно, граф должен иметь ребро $y = uw$, неинцидентное вершине v_2, и $d(v_1, w) = 1$ или $d(v_1, w) = 2$. И в том и в другом случае G содержит ребро, параллельное x. Противоречие.

III. Граф содержит два ребра, каждое из которых смежно со всеми остальными рёбрами.

В этом случае $G = K_{1,p-1} + x$ [8] — граф, полученный из звезды $K_{1,p-1}$

добавлением ребра x при неизменном числе вершин. Но этот граф не является $(2, 1)$ – звёздно транзитивным.

Пусть теперь $\operatorname{diam} G = 3$. Тогда легко видеть, что G не содержит простых циклов длины $\leqq 7$. Покажем, что G не содержит простых циклов. Доказательство проведём индукцией по длине циклов.

Допустим, что G не содержит простых циклов C_k, где $k \leqq n - 1$, $n \geqq 8$. Тогда граф не содержит простых циклов C_n с диагоналями. Предположим, что граф содержит цикл C_n без диагоналей. Так как $\operatorname{diam} C_n \geqq 4$ при $n \geqq 8$, то концы этого диаметра в графе должны быть соединены простой цепью длины $\leqq 3$. Учитывая, что при $n \geqq 8$ справедливо неравенство $n > 3 + [n/2]$, где $[r]$ – целая часть числа r, получаем, что G содержит простой цикл длины $< n$. А это противоречит предположению индукции. Таким образом, G не содержит простых цыклов и, значит G – дерево [7].

Возможны два случая.

1. Для любого ребра графа существует параллельное.

Пусть $v_1v_2v_3v_4$ – диаметральная цепь графа G и пусть $y = u_1u_2$ – ребро графа, параллельное ребру v_2v_3. В силу диаметральности $(v_1 - v_4)$ – цепи $\deg v_1 = \deg v_2 = 1$. Следовательно, ребро y параллельно ребру $x = v_1v_2$. Так как $d^{**}(x, y) = \{\{1, 2\}; \{2, 3\}\}$, то вершина v_2 должна быть смежной с одной из вершин u_1, u_2, что невожможно.

2. Существует точно одно ребро x, смежное со всеми остальными рёбрами графа.

Пусть опять $(v_1 - v_4)$ – диаметральная цепь графа G. Тогда $x = v_2v_3$. Любое ребро $y \neq x$ графа должно быть инцидентно одной из вершин v_2, v_3. Пусть, например, $y = v_2u$. Если $\deg u \geqq 2$, то есть существует ребро $z \neq y$, инцидентное вершине u, то второй конец этого ребра должен совпадать с v_3. Значит, G содержит треугольник, что невозможно. Поэтому $\deg u = 1$ и все рёбра отличные от x, должны быть висячими. Следовательно, $G = S(k, l)$ – – двойная звезда. Учитывая, что G – $(2, 1)$ – звёздно транзитивен, получаем, что $G = S(p/2 - 1; p/2 - 1)$.

Обратное утверждение теоремы устанавливается непосредственной проверкой.

Для формулировки теоремы 2 нам понадобятся следующие обозначения. Граф, полученный из графа G подразбиением [8] ребра x, будем обозначать через G^x. Через $G^{\cdot}$ будем обозначать граф G^x для некоторого x при условии, что для любых рёбер x, y графа G графы G^x и G^y изоморфны.

Теорема 2. *Граф G порядка $p \geqq 5$ будет $(2, 2)$ – звёздно транзитивным тогда и только тогда, когда G принадлежит к одному из следующих типов графов:*

$$C_5;\ K_p;\ K_{m,n};\ \overline{K_{p-2} \cup \overline{K}_2};\ K_{1,p-1} + x;\ K^{\cdot}_{1,p-2};\ S\left(\frac{p}{2} - 1;\ \frac{p}{2} - 1\right).$$

Доказательство. Возможны три случая.

1) Для любого ребра графа G существует параллельное.

Предположим, что граф содержит такое ребро x, для которого существует только одно параллельное ребро y. Очевидно, G содержит ребро z, смежное с x, параллельное y. В силу $(2, 2)$ — звёздной транзитивности G рёбра x и z подобны. Значит, y — единственное ребро G, параллельное z. Поэтому все остальные рёбра графа должны быть смежными с каждым из рёбер x, z.

Допустим, что рёбра x, z принадлежат одному треугольнику. Пусть t — — третье ребро этого треугольника. Очевидно, x подобно t. Следовательно, y — — единственное ребро графа, параллельное t. Значит, каждое из остальных рёбер графа должно быть смежным с каждым из рёбер x, z, t, что невозможно. Следовательно, рёбра x, z не принадлежат одному треугольнику. Ребро y является либо висячим, либо невисячим ребром графа G. В первом случае граф содержит одно ребро, смежное со всеми остальными рёбрами, а во втором — два таких ребра. Однако и то и другое противоречит условию рассматриваемого случая.

Таким образом, для любого ребра графа G существует не менее двух параллельных. Покажем, что для каждого из двух параллельных друг другу рёбер существует ребро, смежное с ним и параллельное второму ребру. Действительно, пусть x и y — параллельные рёбра графа и предположим, что не существует ребра, смежного с x и параллельного y. В силу связности G найдется ребро t, смежное с x. Тогда t также будет смежным и с y. Пусть z — ребро графа G, параллельное ребру y и отличное от x. Если бы z было смежным с x, то оно должно было бы быть смежным и с y. Следовательно, z параллельно x. Но тогда упорядоченные тройки (z, x, t) и (z, y, t) подобны, а значит, подобны и рёбра x, y.

Поэтому всякое ребро, смежное с y, должно быть смежным и с x. Следовательно, $p(G) = 4$. Противоречие с $p(G) \geqq 5$.

Пусть (x_1, y_1) и (x_2, y_2) — упорядоченные пары параллельных друг другу рёбер. Тогда по только что доказанному существуют ребра z_1, z_2 такие, что z_i смежно с y_i и параллельно x_i $(i = 1, 2)$. Но тогда упорядоченные пары (x_1, y_1) и (x_2, y_2) подобны. Следовательно, граф G — $(2, 1)$ — звёздно транзитивен. Значит, по теореме 1 G является одним из следующих графов:

$$C_5;\ K_p;\ K_{m,n}(m, n \geqq 2),\ \overline{K_{p-2} \cup \overline{K}_2};\ S\left(\frac{p}{2} - 1;\ \frac{p}{2} - 1\right).$$

Но два последних графа не удовлетворяют условию рассматриваемого случая.

2) Граф G содержит только одно ребро x, смежное со всеми остальными рёбрами.

Пусть $x = uv$ и пусть $\{y_i\}$, $\{z_i\}$ — множества рёбер, инцидентных вершинам u и v соответственно. Если ни одно ребро совокупности $\{y_i\}$ не смежно ни с одним ребром совокупности $\{z_i\}$ и $G \neq K_{1,p-2}$, то из $(2, 2)$ — звёздной транзитивности графа G вытекает, что $G = S(p/2 - 1;\ p/2 - 1)$.

Пусть теперь $y \in \{y_i\}$, $z \in \{z_i\}$ и y, z смежны. Очевидно, $\{y_i\} \setminus \{y\} \neq \emptyset$, $\{z_i\} \setminus \{z\} \neq \emptyset$. Пусть $y' \in \{y_i\} \setminus \{y\}$. Из $(2, 2)$ — звёздной транзитивности графа вытекает, что y' должно быть смежным с некоторым ребром $z' \in \{z_i\} \setminus \{z\}$. Следовательно, граф в этом случае состоит из $p - 2$ треугольников, имеющих общее ребро:

$$G = \overline{\overline{K_{p-2}} \cup \overline{K_2}}\,.$$

3) Граф G содержит два ребра, каждое из которых смежно со всеми остальными ребрами.

В этом случае $G = K_{1,p-1} + x$.

Обратное утверждение теоремы устанавливается непосредственной проверкой.

Определим бесконечную серию графов, которые мы будем называть пентаграфами, следующим образом. Рассмотрим некоторое конечное множество циклов длины пять (пятиугольников). (Мы считаем, что это множество содержит не менее двух циклов). Пронумеруем вершины каждого пятиугольника цифрами от 1 до 5. Вершины пятиугольников, обозначенные одной и той же цифрой, будем называть соответствующими. Соединим каждую вершину любого из данных циклов с двумя вершинами любого другого цикла, которые смежны с соответствующей ей вершиной. Полученный граф будем называть пентаграфом. Минимальный пентаграф содержит 10 вершин, 20 рёбер и является регулярным графом степени 4 (см. [11], приложение 2, с. 40, № 58, где перечислены остальные свойства этого графа). В общем случае пентаграф, степень которого n, содержит $5n/2$ вершин и $5n^2/4$ рёбер.

Теорема 3. *Регулярный граф G степени $n \geqq 3$ будет $(2, n)$ — звёздно транзитивным тогда и только тогда, когда G — пентаграф.*

Доказательство. Пусть G — регулярный $(2, n)$ — звёздно транзитивный граф порядка $p \geqq n + 3$ и пусть u — произвольная вершина графа G, а $N(u) = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ — окрестность вершины u [8]. Обозначим $x_i = uv_i \in X(G)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ и пусть y — ребро графа G, параллельное каждому из рёбер x_i. Очевидно, наборы $(y, x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $(y, x_i, x_j, \ldots, x_n) \in H(2, n, \sigma_0, \sigma_1, G)$, $|\{i, j, \ldots, k\}| = n$. Поэтому существует автоморфизм, переводящий первый из них во второй. При этом упорядоченная пара вершин (v_1, v_2) переходит в упорядоченную пару вершин (v_i, v_j). Значит, $\operatorname{Aut} G$ дважны транзитивна [10] на множестве $N(u)$ и либо $\langle N(u)\rangle = K_n$, либо $\langle N(u)\rangle = \overline{K}_n$, где $\langle N(u)\rangle$ — подграф графа G, порожденный множеством вершин $N(u)$ [8]. Если $\langle N(u)\rangle = K_n$, то $\langle N[u]\rangle = K_{n+1}$, а так как G — регулярный граф степени n, то $G = K_{n+1}$. Противоречие с $p(G) \geqq n + 3$. Следовательно, $\langle N(u)\rangle = \overline{K}_n$.

Предположим, что $\operatorname{diam} G \geqq 4$, и пусть u — конец диаметральной цепи $uv_iw_1w_2w_3\ldots$. Очевидно, наборы $(y_1, x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $(y_2, x_1, x_2, \ldots, x_n) \in H(2, n, \sigma_0, \sigma_1, G)$, где $y_1 = w_1w_2$, $y_2 = w_2w_3$. Поэтому существует автоморфизм, переводящий первый из них во второй. При этом пара (u, y_1) должна перейти в пару (u, y_2), что невозможно, ибо $d^*(u, y_1) = \{2, 3\} \neq \{3, 4\} = d^*(u, y_2)$. Поэтому $\operatorname{diam} G \leqq 3$.

Пусть $\operatorname{diam} G = 3$ и пусть u — конец диаметральной цепи $uv_iw_1w_2$. Наборы $(y, x_i, x_2, \ldots, x_n)$, $(y, x_j, x_2, \ldots, x_n) \in H(2, n, \sigma_0, \sigma, G)$, где $y = w_1w_2$. Поэтому существует автоморфизм, переводящий первый из них во второй. При этом автоморфизме вершина u остаётся неподвижной, и ребро y переходит в себя. Так как $d(u, w_1) = 2 \neq 3 = d(u, w_2)$, то вершины w_1 и w_2 также остаются неподвижными при данном автоморфизме. Значит, вершина w_1, будучи смежной с вершиной v_i, будет смежной и с вершиной v_j, а следовательно, со всеми вершинами из окрестности $N(u)$. Поэтому $\deg w_1 \geqq n + 1$, что противоречит условию теоремы. Поэтому остаётся единственная возможность: $\operatorname{diam} G = 2$.

Пусть u — вершина, $x_1 = uv_1$, $x_2 = uv_2, \ldots, x_n = uv_n$ — инцидентные ей рёбра, а $y = w_1w_2$ — ребро, параллельное каждому из рёбер x_i $(1 \leqq i \leqq n)$. Очевидно, $d^*(u, y) = \{2, 2\}$. Предположим, что существует вершина $v_j \in N(u)$, смежная с каждой из вершин w_1, w_2. Так как наборы $(y, x_j, x_2, \ldots, x_n)$, $(y, x_i, x_2, \ldots, x_n) \in H(2, n, \sigma_0, \sigma_1, G)$, то существует аьтоморфизм, переводящий первый из них во второй, при этом вершина v_j переходит в вершину v_i. Следовательно, вершина v_i также смежна с каждой из вершин w_1, w_2. Итак, каждая вершина из $N(u)$ смежна с обеими вершинами w_1, w_2 и $\deg w_1 \geqq n + 1$, что невозможно. Значит, не существует вершин из $N(u)$, смежных с обеими вершинами w_1, w_2.

Так как $d^*(u, y) = \{2, 2\}$, то существуют вершины $v_i, v_j \in N(u)$, первая из которых смежна с w_1, а вторая — с w_2. Наборы $(y, x_i, x_j, x_3, \ldots, x_n)$, $(y, x_k, x_l, x_3, \ldots, x_n) \in H(2, n, \sigma_0, \sigma_1, G)$, $(1 \leqq k, l \leqq n)$. Поэтому существует автоморфизм, переводящий первый из них во второй. При этом упорядоченная пара вершин (v_i, v_j) переходит в упорядоченную пару вершин v_k, v_l. Значит, каждая из вершин v_k, v_l смежна только с одной из вершин w_1, w_2. Поэтому множество $N(u)$ можно разбить на два класса: $N(u) = N_1(u) \cup N_2(u)$, $N_1(u) \cap N_2(u) = \emptyset$, где $N_i(u)$ — — подмножество вершин из $N(u)$, смежных с w_i $(i = 1, 2)$.

Предположим, что $|N_1(u)| \neq |N_2(u)|$ и пусть, например, $|N_1(u)| > |N_2(u)|$ Пусть $v_{i_1}, v_{i_2}, \ldots, v_{ik} \in N_1(u)$; $v_{j_1}, v_{j_2}, \ldots, v_{j_l} \in N_2(u)$, где $k > l$. Очевидно, наборы $(y, x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}, \ldots, x_{i_n})$, $(y, x_{j_1}, \ldots, x_{j_l}, \ldots, x_{i_k}, \ldots, x_{i_n}) \in H(2, n, \sigma_0, \sigma_1, G)$. Поэтому существует автоморфизм, переводящий первый из них во второй, при этом ребро x_{i_k}, а значит, и вершина v_{i_k}, остаётся неподвижной. Если при этом автомофизме вершина w_1 остаётся неподвижной, то пара смежных вершин w_1, v_{i_1} переходит в пару несмежных вершин w_1, v_{j_1}. Если же вершина w_1 переходит в вершину w_2, то пара смежных вершин w_1, v_{i_k} переходит в пару несмежных вершин w_2, v_{i_k}. Ни то, ни другое невозможно. Поэтому $|N_1(u)| = |N_2(u)| = n/2$. Следовательно, n — чётное число.

Так как $\deg w_1 = \deg w_2 = n$, то существуют $n/2 - 1$ рёбер, инцицентных w_1, и столько же рёбер, инцидентных вершине w_2, отличных от рёбер y, w_1v_i; w_2v_j. Обозначим концы этих рёбер, отличные от w_1, w_2, через t_k $(1 \leqq k \leqq n-2)$. Пусть $t_i \in N(w_1)$, $t_j \in N(w_2)$. Если предыдущие рассуждения относительно ребра y применить к ребру $w_1 t_i$, то получим, что вершина t_i должна быть смежной с каждой из вершин $N_2(u)$. Аналогично устанавливаем, что вершина t_j смежна с каждой вершиной из $N_1(u)$.

Предположим теперь, что $t_i = t_j$. Тогда согласно только что сказанному $\deg t_i = n/2 + 1 + n/2 + 1 = n + 2 > n$, что невозможно. Поэтому, если $i \neq j$, го $t_i \neq t_j$. Очевидно, $\langle N(w_1)\rangle \cong \langle N(w_2)\rangle = \bar{K}_n$, ибо в противном случае граф G содержал бы ребро, принадлежащее треугольнику с вершиной в $N_r(u)$ $(r = 1, 2)$. Так как $\operatorname{diam} G = 2$, то $1 \leqq d(t_i, t_j) \leqq 2$, $t_i \in N(w_1)$, $t_j \in N(w_2)$.

Предположим, что $d(t_i, t_j) = 2$. Так как вершина t_i не смежна с вершинами u, w_2 и с вершинами из $N_1(u)$, а вершина t_j не смежна с вершинами u, w_1 и с вершинами из $N_2(u)$, то должна существовать вершина t, смежная с каждой из вершин t_i, t_j. Очевидно, вершина t должна быть смежной со всеми вершинами из $N(u)$. Значит, $\deg t \geqq n + 2$, что невозможно. Поэтому $d(t_i, t_j) = 1$. Следовательно, каждая вершина $t_i \in N(w_1)$ смежна с любой вершиной $t_j \in N(w_2)$.

Пусть u_1 — некоторая вершина графа G, отличная от вершин u, v_l $(1 \leqq l \leqq n)$, w_1, w_2, t_k $(1 \leqq k \leqq n-2)$. Очевидно, вершина u_1 не смежна ни с одной из вершин u_1, w_1, w_2, t_k $(1 \leqq k \leqq n-2)$. Так как $\operatorname{diam} G = 2$, то $d(u_1, u) = 2$ и вершина u_1 должна быть смежной с некоторой вершиной $v_i \in N(u)$. Применяя к ребру $u_1 v_i$ и звезде с вершиной в w_2 те же рассуждения, которые мы применяем к ребру $y = w_1w_2$ и звезде с вершиной u, а также учитывая, что вершина v_i смежна с $n/2$ вершинами из $N(w_2) \setminus N_2(u)$, получим, что вершина u_1 смежна со всеми вершинами из $N_2(u)$. Пусть $v_j \in N_2(u)$. Рассматривая ребро u_1v_j и звезду с вершиной в w_1, получим, что вершина u_1 смежна и со всеми вершинами из $N_1(u)$. Значит, $N(u) \subset N(u_1)$. А так как $|N(u)| = |N(u_1)| = n$, то $N(u) = N(u_1)$. Таким образом, любая из вершин графа G, отличная от вершин u, v_l $(1 \leqq l \leqq n)$, w_1, w_2, t_k $(1 \leqq k \leqq n-2)$ имеет окрестность $N(u)$. Легко видеть, что граф G является пентаграфом.

Обратное утверждение теоремы устанавливается непосредственной проверкой.

Список литературы

[1] *N. Biggs:* Finite groups of automorphisms. Cambridge university press, 1971.

[2] *N. Biggs:* Algebraic graph theory. Cambridge university press, 1974.

[3] *Л. Л. Великович:* Об одном представлении группы автоморфизмов графа. Деп. ВИНИТИ, № 248—75.

[4] *Л. Л. Великович:* Об индуцированных группах графа. Тезисы Всесоюзного алгебраического симпозиума, Гомель (1975), 384—385.

[5] *Л. Л. Великович:* О *n* — параллельной группе графа. Деп ВИНИТИ, № 2344—77.
[6] *Л. Л. Великович:* Звёздно транзитивные графы. Математические заметки, *28* (1980), 2, 265—270.
[7] *А. А. Зыков:* Теория конечных графов. Изд. Наука, Новосибирск, 1969.
[8] *Ф. Харари:* Теория графов. Изд. Мир, М., 1973.
[9] *J. Grossman, F. Harary, M. Klawe:* Generalized Ramsey theory for graphs, Discrete Math, *28* (1979), 3, 247—254.
[10] *H. Wielandt:* Finite permutation groups, Academic Press, New York—London, 1964.
[11] *А. М. Бараев, И. А. Фараджев:* Построение и исследование на ЭВМ однородных и однородных двудольных графов. Алгоритмические исследования в комбинаторике. Изд. Наука, М., 1978, 25—60.

Адрес автора: СССР, гор. Гомель, 246746 проспект Октября, 48 (Гомельский политехнический институт).