Časopis pro pěstování matematiky, roč. 98 (1973), Praha

RŮZNÉ

O ISTÝCH KONVERGENTNÝCH POSTUPNOSTIACH DVOJAKÝCH PRIEMEROV

PAVEL BARTOŠ, Bratislava, VLADIMÍR DOLEŽAL, Praha

(Došlo dňa 12. novembra 1971)

Nech $a_0, a_1, \ldots, a_n$ sú kladné čísla. Pre každé nezáporné celé číslo k nazveme číslo

(1) $$A_k(a_0, a_1, \ldots, a_n) = A_k^{n+1} = \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^{n} \prod_{l=0}^{k} a_{j+l}^{\beta_{k,l}},$$

resp. číslo

(1′) $$G_k(a_0, a_1, \ldots, a_n) = G_k^{n+1} = \prod_{j=0}^{n} \left(\sum_{l=0}^{k} \beta_{k,l} a_{j+l} \right)^{1/(n+1)},$$

kde

(2) $$\beta_{k,l} = 2^{-k} \binom{k}{l}$$

a

(3) $$a_j = a_{j-n-1} \quad \text{pre} \quad j > n,$$

priemerom prvého resp. druhého druhu kladných čísel $a_0, a_1, \ldots, a_n$. Sú to *aritmetické*, resp. *geometrické* priemery zvláštneho druhu a je zrejmá dualita, ktorá medzi nimi existuje.

Veta 1. *Platí*

(4) $$A_0^{n+1} = \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^{n} a_j = A,$$

(4′) $$G_0^{n+1} = \prod_{j=0}^{n} a_j^{1/(n+1)} = G,$$

kde A je aritmetický a G geometrický priemer čísel a_j.

Veta 2. *Pre $k \geqq 0$ sú A_k^{n+1}, G_k^{n+1} zvláštne prípady cyklických aritmetických resp. geometrických priemerov, definovaných v práci* [2], *kap.* II.

Dôkaz. Ak podľa článku [2] označíme

$$A_{2\alpha} = \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^{n} \prod_{l=0}^{n} a_{j+l}^{\alpha_l}, \tag{5}$$

resp.

$$G_{2\alpha} = \prod_{j=0}^{n} \Big[\sum_{l=0}^{n} \alpha_l a_{j+l} \Big]^{1/(n+1)}, \tag{5'}$$

kde pre $j > n$ je $a_j = a_{j-n-1}$ a $(\alpha) = (\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ je jednotková váha $\left(\sum_{j=0}^{n} \alpha_j = 1\right)$, potom

a) pre $k < n$ voľba $(\alpha) = (\beta_{k,0}, \beta_{k,1}, \ldots, \beta_{k,k}, 0, 0, \ldots, 0)$,

b) pre $k = n$ voľba $(\alpha) = \{\beta_{n,j}\}_{j=0}^{n}$

a

c) pre $k > n$ voľba

$$(\alpha) = \{\beta_{k,l} + \beta_{k,l+n+1} + \beta_{k,l+2(n+1)} + \ldots\}_{l=0}^{k} \tag{6}$$

prevedie (5) v (1) resp. (5′) v (1′). V prípade c) je to zrejmé z toho, že následkom (3) sa číslo a_j, $0 \leqq j \leqq n$, vyskytuje v súčine $\prod_{l=0}^{k} a_{j+l}^{\beta_{k,l}}$ resp. v súčte $\sum_{l=0}^{k} \beta_{k,l} a_{j+1}$ periodicky s periodou $n + 1$.

Tým je veta dokázaná.

Veta 3. *Pre každé $k \geqq 0$ platí*

$$G \leqq A_k^{n+1} \leqq A \tag{7}$$

resp.

$$G \leqq G_k^{n+1} \leqq A\,. \tag{7'}$$

Rovnosť platí, keď $a_0 = a_1 = \ldots = a_n$, táto podmienka však nie je vždy nutná.

Dôkaz. Tvrdenie vyplýva bezprostredne z vety II článku [2] a z poznámky II k tejto vete.

Veta 4. *Pre každé $k \geqq 0$ platí*

$$A_k^{n+1} \geqq A_{k+1}^{n+1} \tag{8}$$

resp.

$$G_k^{n+1} \leqq G_{k+1}^{n+1}\,. \tag{8'}$$

Rovnosť určite platí, keď $a_0 = a_1 = \ldots = a_n$, táto podmienka však nie je vždy nutná.

Dôkaz.

$$A_k^{n+1} = \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^{n} \prod_{l=0}^{k} a_{j+l}^{\beta_{k,l}} = \frac{1}{2(n+1)} \sum_{j=0}^{n} \Big[\prod_{l=0}^{k} a_{j+l}^{\beta_{k,l}} + \prod_{l=0}^{k} a_{j+1+l}^{\beta_{k,l}} \Big] \geqq$$

$$\geqq \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^{n} \prod_{l=0}^{k} (a_{j+l} a_{j+l+1})^{\beta_{k,l}/2} = \sum_{j=0}^{n} \prod_{l=0}^{k+1} a_{j+l}^{(\beta_{k,l}+\beta_{k,l-1})/2}\ {}^{1)} =$$

$$= \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^{n} \prod_{l=0}^{k+1} a_{j+l}^{\beta_{k+1,l}} = A_{k+1}^{n+1}.$$

Obdobne úplne duálne

$$G_k^{n+1} = \prod_{j=0}^{n} \Big[\sum_{l=0}^{k} \beta_{k,l} a_{j+l} \Big]^{1/(n+1)} = \prod_{j=0}^{n} \Big[\sum_{l=0}^{k} \beta_{k,l} a_{j+l} \sum_{l=0}^{k} \beta_{k,l} a_{j+1+l} \Big]^{1/2(n+1)} \leqq$$

$$\leqq \prod_{j=0}^{n} \Big[\tfrac{1}{2} \sum_{l=0}^{k} (\beta_{k,l} a_{j+l} + \beta_{k,l} a_{j+l+1}) \Big]^{1/(n+1)} = \prod_{j=0}^{n} \Big[\sum_{l=0}^{k+1} \tfrac{1}{2} (\beta_{k,l} + \beta_{k,l-1})\, a_{j+l} \Big]^{1/(n+1)} =$$

$$= \prod_{j=0}^{n} \Big[\sum_{l=0}^{k+1} \beta_{k+1,l} a_{j+l} \Big]^{1/(n+1)} = G_{k+1}^{n+1}.$$

Podmienky rovnosti $a_0 = a_1 = \ldots = a_n$ sú zrejme postačujúce, problém podmienok nutných je obťažný a nebol riešený (ani v článku [2]).

Veta 5. *Platí*

$$\lim_{k \to +\infty} A_k^{n+1} = G \tag{9}$$

resp.

$$\lim_{k \to +\infty} G_k^{n+1} = A. \tag{9'}$$

Dôkaz. Keďže postupnosti A_k^{n+1} a G_k^{n+1} sú podľa vety 4 monotónne a podľa vety 3 ohraničené, sú konvergentné. Pre $k > n$ platí podľa (6)

$$A_k^{n+1} = \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^{n} \prod_{l=0}^{n} a_{j+l}^{u_l} \tag{10}$$

resp.

$$G_k^{n+1} = \prod_{j=0}^{n} \Big[\sum_{l=0}^{n} u_l a_j \Big]^{1/(n+1)}, \tag{10'}$$

kde

$$u_l = \beta_{k,l} + \beta_{k,l+(n+1)} + \beta_{k,l+2(n+1)} + \ldots =$$

$$= \frac{1}{2^k} \left[\binom{k}{l} + \binom{k}{l+(n+1)} + \binom{k}{l+2(n+1)} + \ldots \right].$$

[1]) Tu treba položiť $\beta_{k,-1} = \beta_{k,k+1} = 0$ a potom platí $\frac{1}{2}\beta_{k,0} = \beta_{k+1,0}$; $\frac{1}{2}\beta_{k,k} = \beta_{k+1,k+1}$ a pre $1 \leqq l \leqq k$: $\frac{1}{2}(\beta_{k,l} + \beta_{k,l-1}) = \beta_{k+1,l}$.

Podľa vzťahu (10) v kap. 13 diela [1] platí

$$u_l = \frac{1}{2^k(n+1)} \sum_{j=0}^{n} \left(2 \cos \frac{j\pi}{n+1}\right)^k \cos \frac{j(k-2l)\pi}{n+1} =$$
$$= \frac{1}{n+1} \left[1 + \sum_{j=1}^{n} \left(\cos \frac{j\pi}{n+1}\right)^k \cos \frac{j(k-2l)\pi}{n+1}\right].$$

Pretože pre $j = 1, 2, \ldots, n$ je $0 < j\pi/(n+1) < \pi$, platí $|\cos j\pi/(n+1)| = \delta_j < 1$, z čoho potom snadno plynie, že

$$\lim_{k\to+\infty} \left[\left(\cos \frac{j\pi}{n+1}\right)^k \cos \frac{j(k-2l)\pi}{n+1}\right] = 0,$$

a teda

$$\lim_{k\to+\infty} u_l = 1/(n+1)$$

pre $l = 0, 1, \ldots, n$.

Potom však podľa (10)

$$\lim_{k\to+\infty} A_k^{n+1} = \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^{n} \prod_{l=0}^{n} a_{j+l}^{1/(n+1)} = \prod_{l=0}^{n} a_l^{1/(n+1)} = G.$$

Obdobne podľa (10)

$$\lim_{k\to+\infty} G_k^{n+1} = \prod_{j=0}^{n} \left[\sum_{l=0}^{n} \frac{1}{n+1} a_{j+l}\right]^{1/(n+1)} =$$
$$= \prod_{j=0}^{n} \left[\sum_{l=0}^{n} \frac{1}{n+1} a_l\right]^{1/(n+1)} = \sum_{l=0}^{n} \frac{1}{n+1} a_l = A.$$

Tým je veta dokázaná.

Poznámka. Keďže $A_k^{n+1} \to G$, $G_k^{n+1} \to A$, $G \leqq A$, postupnosti A_k^{n+1} a G_k^{n+1} sú monotónne, musí pre prípady $A \neq G$ existovať také k_0, že pre $k \leqq k_0$ platí $A_k^{n+1} \geqq G_k^{n+1}$ a pre $k > k_0$ platí $A_k^{n+1} \leqq G_k^{n+1}$. Určiť toto k_0 sa nepodarilo.

Literatúra

[1] *Netto E.:* Lehrbuch der Combinatorik, B. G. Teubner, Leipzig 1901.

[2] *Bartoš P., Znám Š.:* O symetrických a cyklických priemeroch kladných čísel. Mat. fyz. časopis SAV, *18* (1966), 291—298.

Adresy autorů: Pavel Bartoš, 801 00 Bratislava, Sibírska 9, Vladimír Doležal, 115 67 Praha 1, Žitná 25 (Matematický ústav ČSAV).