Helmut Pottmann

Zur globalen Kinematik einer fünfgliedrigen Untergruppe der ebenen Laguerre-Gruppe

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 112 (1987), No. 4, 401--410

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/108556`

112 (1987) ČASOPIS PRO PĚSTOVÁNÍ MATEMATIKY No. 4, 401—410

ZUR GLOBALEN KINEMATIK EINER FÜNFGLIEDRIGEN UNTERGRUPPE DER EBENEN LAGUERRE-GRUPPE

HELMUT POTTMANN, Wien

(Eingegangen am 9. Oktober 1985)

Zusammenfassung. Das Studium von Zwangläufen im Sinne der siebengliedrigen ebenen euklidischen Laguerre-Gruppe $\mathscr{L}_7$ bzw. gewisser ihrer Untergruppen war bereits mehrmals Gegenstand bemerkenswerter Untersuchungen (vgl. [7, 8, 9, 19]), wobei allerdings nur lokale Eigenschaften zur Diskussion standen. Globale Fragestellungen in der ebenen Kinematik wurden bisher hauptsächlich für dreigliedrige Gruppen erörtert (vgl. etwa die globalen Eigenschaften euklidischer Zwangläufe in [5, S. 113 ff.]), während höhergliedrige Gruppen nur wenigen einschlägigen Arbeiten zugrundeliegen [10, 14, 15, 17, 18]. In dieser Hinsicht soll die vorliegende Note einen kleinen Beitrag liefern und globale Eigenschaften von Zwangläufen im Sinne der fünfgliedrigen Gruppe $\mathscr{L}_5 \subset \mathscr{L}_7$, die von der viergliedrigen ebenen euklidischen Ähnlichkeitsgruppe und der eingliedrigen Dilatationsgruppe erzeugt wird, zum Inhalt haben.

1. GRUNDLAGEN

Die Speere $\mathbf{g}$ als Grundelemente der reellen euklidischen Laguerre-Ebene Σ seien mit den üblichen Vorzeichenfestsetzungen (vgl. etwa [2]) durch

$$x \cos v + y \sin v = d\,, \quad d \in \mathbb{R}\,, \quad v \in [0, 2\pi) \tag{1}$$

dargestellt. Hierin ist v der mod 2π bestimmte Winkel einer Drehung, welche die positive y-Achse nach $\mathbf{g}$ bringt und d der vorzeichenbehaftete Radius des im Ursprung O des kartesischen Koordinatensystems $(O; x, y)$ zentrierten, $\mathbf{g}$ berührenden Zykels. Der *Speermenge* $\mathfrak{S}$ von Σ entspricht bekanntlich vermöge der *inversen zyklographischen Projektion*

$$\zeta^{-1}: \mathbf{g}(d, v) \mapsto \mathbf{g}\zeta^{-1} \subset \mathbb{R}^3: x \cos v + y \sin v + z = d \tag{2}$$

die *Menge der isotropen Ebenen eines pseudoeuklidischen Raumes* Π^3_{pe} mit dem kanonischen inneren Produkt $\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2 = x_1x_2 + y_1y_2 - z_1z_2$ (bei $\mathbf{x}_i = (x_i, y_i, z_i)$); die Ebene Σ denkt man sich gern als Ebene $z = 0$ in den Π^3_{pe} eingebettet. Durch Anwendung der Nullpolarität μ mit der Achse $x = y = 0$ und $\varepsilon(y - z = 0) \mapsto \varepsilon\mu = (1, 0, 0)$ erhält man schließlich ein von W. Blaschke [2, 4] gefundenes *Punktmodell von* $\mathfrak{S}$: Den isotropen Ebenen des Π^3_{pe} entspricht nämlich vermöge μ die

Menge $\varDelta$ der eigentlichen Punkte des Drehzylinders $x^2 + y^2 = 1$. Die Abbildung β der Speermenge $\mathfrak{S}$ auf den „*Blaschke-Zylinder*“ $\varDelta$

$$\beta\colon \mathbf{g}(d, v) \mapsto \mathbf{g}\beta(-\sin v, \cos v, d) \tag{3}$$

führt offenbar einen als Menge seiner Tangentenspeere aufgefaßten Zykel von Σ in die Punkte eines ebenen Schnittes von $\varDelta$ über. Weiters gehören zu parallelen Speeren $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2$ $(v_1 = v_2)$ Punkte derselben Erzeugenden von $\varDelta$.

Eine *Laguerre-Abbildung* $\lambda \in \mathscr{L}_7$ in Σ induziert eine *pseudoeuklidische Ähnlichkeit* des Π^3_{pe} bzw. eine *automorphe Kollineation des Blaschke-Zylinders* $\varDelta$. Wir betrachten nun insbesondere die *Untergruppe* $\mathscr{L}_5 \subset \mathscr{L}_7$, die von der Gruppe $AGO^+(\mathbb{R}^2)$ der *gleichsinnigen Ähnlichkeiten* von Σ und der Gruppe $\mathscr{D}_1$ der *Dilatationen* δ von Σ:

$$\delta\colon \mathbf{g}(d, v) \mapsto \mathbf{g}\delta(d + a, v) \tag{4}$$

erzeugt wird. Die Elemente $\lambda \in \mathscr{L}_5$ besitzen also die Eigenschaft, den orientierten Winkel $v_2 - v_1$ jedes Speerpaares $(\mathbf{g}_1(d_1, v_1), \mathbf{g}_2(d_2, v_2))$ unverändert zu lassen. Im zyklographischen Modell bestimmt jedes $\lambda \in \mathscr{L}_5$ eine pseudoeuklidische Ähnlichkeit, welche zugleich *Ähnlichkeit in einem euklidischen Raum* Π^3_e mit dem kartesischen Koordinatensystem $(O; x, y, z)$ und *Ähnlichkeit eines einfach-isotropen Raumes* Π^3_i mit dem Bogenelementquadrat $ds^2 = dx^2 + dy^2$ ist. Wir betten nun den Blaschke-Zylinder $\varDelta$ (als singuläre isotrope Kugel) in den Π^3_i ein und sehen dann ein $\lambda \in \mathscr{L}_5$ als (eine auf $\varDelta$ eingeschränkte) *gleichsinnige längentreue Ähnlichkeit des* Π^3_i:

$$\lambda^\beta := \beta^{-1}\lambda\beta\colon \quad \begin{aligned} x_0 &= x\cos\varphi - y\sin\varphi\,, \\ y_0 &= x\sin\varphi + y\cos\varphi\,, \\ z_0 &= a_0 + a_1x + a_2y + a_3z\,. \end{aligned} \tag{5}$$

Dabei schreiben wir der Einfachheit halber auch für das in den ganzen Π^3_i erweiterte Blaschke-Bild der Laguerre-Abbildung $\lambda \in \mathscr{L}_5$ bloß λ^β. Somit gilt: *Die Gruppe* $\mathscr{L}_5$ *ist isomorph zur Gruppe* $\mathscr{I}_5$ *der gleichsinningen längentreuen Ähnlichkeiten des* Π^3_i, *welche eine feste isotrope Gerade* $(x = y = 0)$ *in sich überführen.*

Ein C^1-*Zwanglauf* im Sinne von $\mathscr{L}_5$ ist eine C^1-Abbildung eines reellen Intervalls I in die Gruppe $\mathscr{L}_5$ und wird im Blaschke-Modell durch (5) mit $a_0, \ldots, a_3, \varphi \in C^1(I)$ beschrieben. Hierbei ist es üblich, die Ausgangsebene Σ als Gangebene und die die Laguerre-Bilder tragende Ebene Σ_0 als Rastebene zu bezeichnen. Durch (5) wird natürlich ein $\mathscr{I}_5$-Zwanglauf des Π^3_i mitbestimmt.

Jedes $\lambda \in \mathscr{L}_5$ läßt sich in eindeutiger Weise in der Form

$$\lambda = \alpha\,.\,\delta\,, \quad \alpha \in AGO^+(\mathbb{R}^2)\,, \quad \delta \in \mathscr{D}_1 \tag{6}$$

faktorisieren, wobei stets δ auf α folgen soll. Damit kann jedem $\mathscr{L}_5$-Zwanglauf $Z = \Sigma/\Sigma_0$ ein Kurvenpaar (j_α, j_δ) zugewiesen werden: j_α soll als Diagramm der Ähnlichkeitsfaktoren $\alpha_3(t)$ in Abhängigkeit vom Drehwinkel $\varphi(t)$ $(t \in I)$ von Σ gegenüber Σ_0 dienen und ist durch die in Σ_0 liegende Speermenge

$$(7) \qquad j_\alpha := \{\mathbf{g}_0(d_0 = a_3(t), v_0 = \varphi(t)) \mid t \in I\}$$

definiert. j_α soll im folgenden als „*Ähnlichkeitsindikatrix*" bezeichnet werden[1]). Im Π_i^3 wird j_α durch

$$(7') \qquad j_\alpha\beta\colon x_0(t) = -\sin\varphi(t)\,, \quad y_0(t) = \cos\varphi(t)\,, \quad z_0(t) = a_3(t)$$

erfaßt. Weiters soll als Schaubild der Dilatationskoten $\alpha_0(t)$ in Abhängigkeit von φ die als Menge von Tangentenspeeren definierte „*Dilatationsindikatrix*"

$$(8) \qquad j_\delta := \{\mathbf{g}_0(d_0 = a_0(t), v_0 = \varphi(t)) \mid t \in I\}$$

benützt werden. Die Π_i^3-Darstellung von j_δ lautet damit

$$(8') \qquad j_\delta\beta\colon x_0(t) = -\sin\varphi(t)\,, \quad y_0(t) = \cos\varphi(t)\,, \quad z_0(t) = a_0(t)\,.$$

2. $\mathscr{L}_5$-ZWANGLÄUFE MIT GLEICHARTIGEN SPEERHÜLLBAHNEN

Ein $\mathscr{L}_5$-Zwanglauf $Z = \Sigma/\Sigma_0$ läßt sich dadurch angeben, daß man für vier nicht konzyklische Speere $\mathbf{g}_i \in \Sigma$ $(i = 1, \dots, 4)$, von denen keine drei parallel sind, die Hüllkurven $k_0(\mathbf{g}_i)$ in der Rastebene vorschreibt[2]). Im zyklographischen Urbild entspricht Z ein pseudoeuklidisch-äquiformer Zwanglauf, der durch vier Ebenenhülltorsen, nämlich die isotropen Torsen $\Phi_i \subset \Pi_{pe}^3$ durch $k_0(\mathbf{g}_i)$, festgelegt ist. Diese Zwangläufe sind nach Abschnitt 1 gleichzeitig euklidisch-äquiform und wurden vom Verfasser in [13] studiert. Schreibt man nun für einen auf den Drehwinkel φ beziehbaren Zwanglauf Z die Lagen der Speere $\mathbf{g}_i$ in der Form

$$(9) \qquad \mathbf{g}_i(\varphi) \in \Sigma_0\colon x\sin(\varphi + \varphi_i) - y\cos(\varphi + \varphi_i) - h_i(\varphi + \varphi_i) = 0\,,$$
$$\varphi_i = \text{const} \in \mathbb{R} \quad (i = 1, \dots, 4)\,, \quad \varphi \in I \subset \mathbb{R}\,,$$

was der Angabe der Führungskurven $k_0(\mathbf{g}_i)$ durch ihre Stützfunktionen $h_i(\varphi)$ entspricht, so besitzt die Stützfunktion $h(\varphi)$ der Hüllbahn eines beliebigen gangfesten Speeres $\mathbf{g}$ gemäß [13] die Bauart

$$(10) \qquad h(\varphi) = \sum_{i=1}^{4} \lambda_i h_i(\varphi + \varphi_i) \quad \text{mit} \quad (\lambda_1, \dots, \lambda_4) \in \mathbb{R}^4\,, \quad \sum_{i=1}^{4} \lambda_i = 1\,,$$
$$\Big[\sum_{i=1}^{4} \lambda_i \sin(\varphi + \varphi_i)\Big]^2 + \Big[\sum_{i=1}^{4} \lambda_i \cos(\varphi + \varphi_i)\Big]^2 = 1\,,$$

---

[1]) In [14] wurde die Fußpunktkurve von j_α bezüglich $O_0(0, 0) \in \Sigma_0$ als Indikatrix j_0 eines ebenen äquiformen Zwanglaufs definiert.

[2]) Da wir die Speere als Grundelemente der Laguerre-Ebene auffassen, ist eine C^1-Kurve als Ergebnis einer C^1-Abbildung eines reellen Intervalls I in die Speermenge erklärt. Demnach könnte man $k_0(\mathbf{g})$ einfach als *Bahnkurve* des Speeres $\mathbf{g}$ bezeichnen.

sofern die Ausgangslage für die Messung des Winkels φ für jedes **g** geeignet gewählt wird. Damit gelingt es, eine Reihe von Beispielen für $\mathscr{L}_5$-Zwangläufe mit *gleichartigen Speerhüllbahnen* anzugeben. Einige davon seien angeführt im

Satz 1. *Sei $\mathscr{F}$ eine der folgenden Familien von Kurven der euklidischen Laguerre-Ebene Σ_0:*

(I) *Die Familie der Zykel,*
(II) *die Familie der zykloidalen Kurven mit demselben Modul μ samt deren Parallelkurven,*
(III) *die Familie der Kurven konstanter Breite,*
(IV) *die Familie der zentralsymmetrischen C^2-Eilinien samt deren Parallelkurven.*

Umhüllen nun im Rahmen eines $\mathscr{L}_5$-Zwanglaufs $Z = \Sigma/\Sigma_0$ vier nicht konzyklische gangfeste Speere, von denen keine drei parallel sind, Kurven aus $\mathscr{F}$, so ist die Hüllbahn jedes gangfesten Speeres eine $\mathscr{F}$ angehörende Kurve.

Beweis. Man braucht im Hinblick auf (10) bloß die kennzeichnenden Stützfunktionen der genannten Kurvenfamilien zu beachten (vgl. [12, 13]). So besitzt etwa die Stützfunktion einer zykloidalen Kurve (d.i. eine Epi- oder Hypozykloide, Pseudozykloide, logarithmische Spirale oder eine Kreisevolvente) vom Modul $\mu \in \mathbb{R}$ die Bauart

$$h(\varphi) = a \sin \varphi + b \cos \varphi + g(\varphi), \quad a, b = \text{const} \in \mathbb{R},$$

wenn $g(\varphi)$ die Differentialgleichung

$$\ddot{g}(\varphi) + \mu\, g(\varphi) = 0$$

löst [6]. Eine Kurve konstanter Breite d sei eine geschlossene, von Wendepunkten und Schnabelspitzen freie C^1-Kurve mit der Umlaufzahl 1, bei der parallele Tangenten den Abstand d besitzen; für die Stützfunktion $h(\varphi)$ gilt somit:

$$h(\varphi) + h(\varphi + \pi) = d, \quad h(\varphi) = h(\varphi + 2\pi).$$

Die C^2-Kurven aus (IV) sind durch

$$h(\varphi) = a \sin \varphi + b \cos \varphi + c + g(\varphi), \quad a, b, c = \text{const} \in \mathbb{R},$$
$$0 < |g(\varphi) + \ddot{g}(\varphi)| < M, \quad M \in \mathbb{R}^+, \quad g(\varphi) = g(\varphi + \pi)$$

erfaßbar. Hierbei habe eine C^2-Eilinie definitionsgemäß keine Punkte mit unendlichem Krümmungsradius (Flachpunkte). □

Die Kurvenklassen I–IV gehen unter den $\lambda \in \mathscr{L}_5$ in sich über.

3. LÄNGEN DER SPEERHÜLLBAHNEN GESCHLOSSENER $\mathscr{L}_5$-ZWANGLÄUFE

Den folgenden Überlegungen liege ein *geschlossener* C^1-Zwanglauf $Z = \Sigma/\Sigma_0$ im Sinne von $\mathscr{L}_5$ zugrunde. Die Zwanglauffunktionen in (5) sind damit periodisch mit der minimalen Periode $T \in \mathbb{R}^+$:

$$(11) \qquad a_i(t+T) = a_i(t) \quad (i = 0, \ldots, 3), \quad \varphi(t+T) = \varphi(t) + 2\pi\nu, \quad \nu \in \mathbb{Z}.$$

Zur Diskussion stehe nur eine volle Periode von Z ($t \in [0, T)$) mit der *Drehzahl* ν. Unter Z erzeugt jeder gangfeste Speer $\mathbf{g}$ eine Hüllbahn $k_0(\mathbf{g}) \subset \Sigma_0$, der im Π_i^3 eine unter Z^β durchlaufene geschlossene Kurve $k_0(\mathbf{g})\,\beta$ auf dem Blaschke-Zylinder Δ zugeordnet ist. Die mit der Durchlaufzahl multiplizierte *formale Länge* $L(\mathbf{g})$ von $k_0(\mathbf{g})$ berechnet sich im Π_i^3 zu

$$(12) \qquad L(\mathbf{g}) = L(\mathbf{g}\beta) = \int_0^T z_0 \dot{\varphi}\,\mathrm{d}t \quad \text{mit} \quad \dot{\varphi} = \mathrm{d}\varphi/\mathrm{d}t$$

und wird damit im Blaschke-Modell als (orientierter) *Flächeninhalt* zwischen $k_0(\mathbf{g})\,\beta$ und $z_0 = 0$ deutbar [2]. Obwohl $L(\mathbf{g})$ nicht mit der elementargeometrischen Länge von $k_0(\mathbf{g})$ übereinzustimmen braucht (vgl. [14]), soll diese (euklidische) Integralinvariante im folgenden kurz als Länge der Hüllbahn $k_0(\mathbf{g})$ bezeichnet werden. $L(\mathbf{g})$ ist zwar keine $\mathscr{L}_5$-Invariante; das Studium der Größe L ist aber deshalb sinnvoll, weil man ihr Transformationsverhalten unter den Elementen λ von $\mathscr{L}_5$ kennt: Einer Hüllbahn $k_0(\mathbf{g})$ mit der Drehzahl ν und der Länge L entspricht nämlich vermöge einer Abbildung $\lambda \in \mathscr{L}_5$ mit dem Ähnlichkeitsfaktor a_3 und der Dilatationskote a_0 (im Sinne der Zerlegung (6)) eine Kurve $k_0(\mathbf{g})\,\lambda$ von der Länge

$$(13) \qquad L(k_0(\mathbf{g})\,\lambda) = a_3 L + 2\pi\nu a_0 .$$

Weiters wollen wir mittels (12) den Definitionsbereich von L auf den ganzen Π_i^3 erweitern. Die unter Z^β erzeugte Bahnkurve eines Punktes $P(x, y, z) \in \Pi_i^3$ besitzt damit die „Länge":

$$(14) \qquad L(P) = L_\delta + A_1 x + A_2 y + L_\alpha z$$

$$\text{mit} \quad L_\delta = \int_0^T a_0 \dot{\varphi}\,\mathrm{d}t, \quad A_i = \int_0^T a_i \dot{\varphi}\,\mathrm{d}t \quad (i = 1, 2), \quad L_\alpha = \int_0^T a_3 \dot{\varphi}\,\mathrm{d}t .$$

Hierin bedeuten L_δ und L_α die mit der Durchlaufzahl multiplizierten formalen Längen der Dilatations- bzw. Ähnlichkeitsindikatrix. Wir sehen: *Punkte des Π_i^3, die auf dieselbe Größe L ihrer vermöge Z^β erzeugten Bahn führen, liegen in einer Ebene $\varepsilon(L)$ aus einem Parallelebenenbüschel des Π_i^3.* Dies liefert den

Satz 2. *Bei einem geschlossenen $\mathscr{L}_5$-Zwanglauf Z bilden jene Speere $\mathbf{g}$ der Gangebene Σ, die auf dieselbe Länge L ihrer Hüllbahn führen, einen Zykel oder ein Paar von Parallelenbüscheln*[3]*, je nachdem ob die Länge der Ähnlichkeitsindikatrix ungleich oder gleich Null ist. Zu verschiedenen Werten von L gehören*

[3]) Zu diesen Büschelpaaren sind auch zwei doppelt zu zählende Büschel paralleler Speere zu rechnen, die in der gemeinsamen Symmetralenrichtung liegen. Sie rühren von den Δ berührenden Ebenen ε her.

konzentrische Zykel bzw. Büschelpaare mit einer gemeinsamen Symmetralenrichtung.

Bei Kenntnis der Stützkoordinaten (d, v) von $\mathbf{g}$ besitzt (14) wegen (3) die Form

$$L(\mathbf{g}) = L_\delta - A_1 \sin v + A_2 \cos v + L_\alpha d \,. \tag{15}$$

Diese Gleichung ermöglicht uns die Angabe von *Holditch-Sätzen* für Hüllbahnlängen. Angeführt seien:

Satz 3. *Umhüllen bei einem geschlossenen $\mathscr{L}_5$-Zwanglauf Σ/Σ_0 drei paarweise nicht parallele Speere $\mathbf{g}_i(d_i, v_i) \in \Sigma$ $(i = 1, 2, 3)$ Kurven $k_0(\mathbf{g}_i) \subset \Sigma_0$ mit den Längen L_i, so läßt sich bei Kenntnis der Indikatrixgrößen L_δ (oder L_α) die Hüllbahnlänge L_4 für jeden weiteren Speer $\mathbf{g}_4(d_4, v_4) \in \Sigma$ durch*

$$\begin{aligned} L_4 = L_\delta = [&\bar{L}_1(d_2 \sin(v_4 - v_3) + d_3 \sin(v_2 - v_4) + d_4 \sin(v_3 - v_2)) + \\ &+ \bar{L}_2(d_3 \sin(v_4 - v_1) + d_4 \sin(v_1 - v_3) + d_1 \sin(v_3 - v_4)) + \\ &+ \bar{L}_3(d_4 \sin(v_2 - v_1) + d_1 \sin(v_4 - v_2) + d_2 \sin(v_1 - v_4))]/ \\ &/[d_1 \sin(v_3 - v_2) + d_2 \sin(v_1 - v_3) + d_3 \sin(v_2 - v_1)] \\ &\textit{mit} \quad \bar{L}_i := L_i - L_\delta \end{aligned} \tag{16}$$

bzw. mittels

$$\begin{aligned} L_4 = L_\alpha d_4 + [&L'_1(\sin(v_4 - v_3) + \sin(v_2 - v_4) + \sin(v_3 - v_2)) + \\ &+ L'_2(\sin(v_4 - v_1) + \sin(v_1 - v_3) + \sin(v_3 - v_4)) + \\ &+ L'_3(\sin(v_2 - v_1) + \sin(v_4 - v_2) + \sin(v_1 - v_4))]/ \\ &/[\sin(v_3 - v_2) + \sin(v_1 - v_3) + \sin(v_2 - v_1)] \\ &\textit{mit} \quad L'_i := L_i - L_\alpha d_i \end{aligned} \tag{17}$$

berechnen.

Der Radius r_{ijk} des die drei Speere $\mathbf{g}_i, \mathbf{g}_j, \mathbf{g}_k$ berührenden Zykels berechnet sich zu

$$r_{ijk} = \frac{d_i \sin(v_k - v_j) + d_j \sin(v_i - v_k) + d_k \sin(v_j - v_i)}{\sin(v_k - v_j) + \sin(v_i - v_k) + \sin(v_j - v_i)} \,. \tag{18}$$

Damit kann der Gleichung (16) die Form

$$\bar{L}_1 r_{423} s_{423} + \bar{L}_2 r_{431} s_{431} + \bar{L}_3 r_{412} s_{412} = \bar{L}_4 r_{123} s_{123} \tag{16'}$$

gegeben werden, sofern man die $\mathscr{L}_5$-Invariante

$$s_{ijk} := \sin(v_k - v_j) + \sin(v_i - v_k) + \sin(v_j - v_i) \tag{19}$$

einführt. Weiters schreibt sich nun (17) als

$$L'_1 s_{423} + L'_2 s_{431} + L'_3 s_{412} = L'_4 s_{123} \,. \tag{17'}$$

Mit (18) sehen wir auch, daß der Nenner in (16) verschwindet, wenn $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3$ kopunktal sind. Kopunktale Lage wird aber durch eine Dilatation zerstört, so daß diese Ausnahmelage bloß bei äquiformen Zwangläufen ($a_0 \equiv 0$) zu verbieten ist. Weiters gilt:

Satz 4. *Kennt man von einem geschlossenen $\mathscr{L}_5$-Zwanglauf Σ/Σ_0 die Indikatrixgrößen L_α und L_δ sowie die Hüllbahnlängen L_i zweier schneidender Speere $\mathbf{g}_i(d_i, v_i) \in \Sigma$, so läßt sich daraus die Länge L_3 der Hüllbahn jedes weiteren Speeres $\mathbf{g}_3(d_3, v_3) \in \Sigma$ ermitteln:*

$$L_3 = L_\delta + L_\alpha d_3 + [(L_\delta + L_\alpha d_1 - L_1)\sin(v_3 - v_2) + \\ + (L_\delta + L_\alpha d_2 - L_2)\sin(v_1 - v_3)]/\sin(v_2 - v_1)\,. \tag{20}$$

Schließlich erwähnen wir noch ein dem klassischen Holditch-Satz (vgl. [5, S. 120]) näher kommendes Resultat:

Satz 5. *Umhüllen im Rahmen eines geschlossenen $\mathscr{L}_5$-Zwanglaufs Σ/Σ_0 zwei gangfeste Paare paralleler Speere $\mathbf{g}_1 \parallel \mathbf{g}_2$, $\mathbf{g}_3 \parallel \mathbf{g}_4$ Kurven mit den Längen L_i ($L_1 \neq L_2$, $L_3 \neq L_4$), so nimmt die $\mathscr{L}_5$-Invariante $J := (L_3 - L_4)/(L_1 - L_2)$ den Wert*

$$J = d_{43}/d_{21} \tag{21}$$

an, worin d_{ij} den orientierten Abstand der parallelen Speere $\mathbf{g}_i$, $\mathbf{g}_j$ bezeichnet[4])

4. FLÄCHENINHALTE DER SPEERHÜLLBAHNEN BEI GESCHLOSSENEN $\mathscr{L}_5$-ZWANGLÄUFEN

Bei einem geschlossenen, auf den Drehwinkel φ als Parameter beziehbaren C^2-Zwanglauf im Sinne von $\mathscr{L}_5$ kann der mit der Durchlaufzahl multiplizierte orientierte Flächeninhalt $F(\mathbf{g})$ der Hüllbahn $k_0(\mathbf{g})$ eines gangfesten Speeres $\mathbf{g}$ im Π_i^3 durch

$$F(\mathbf{g}) = F(\mathbf{g}\beta) = \tfrac{1}{2}\int_0^{2\pi\nu} z_0(z_0 + \ddot{z}_0)\,d\varphi \ldots \quad \text{mit} \quad z_0 = d^2 z_0/d\varphi^2 \tag{22}$$

berechnet werden. F ist erneut keine $\mathscr{L}_5$-Invariante, man kennt jedoch das Verhalten von F unter einem $\lambda \in \mathscr{L}_5$. Einer Kurve $k_0(\mathbf{g})$ mit der Länge L und dem Inhalt F entspricht nämlich vermöge $\lambda \in \mathscr{L}_5$ (mit den Bezeichnungen von (13)) eine Kurve $k_0(\mathbf{g})\,\lambda$ vom Inhalt

$$F(k_0(\mathbf{g})\,\lambda) = a_3^2 F + a_0 a_3 L + a_0^2 \pi\nu\,. \tag{23}$$

Nach Erweiterung von F in den ganzen Π_i^3 finden wir für die unter Z^β erzeugte Bahn

[4]) Der orientierte Abstand zweier paralleler Speere $\mathbf{g}_i(d_i, v)$ und $\mathbf{g}_j(d_j, v)$ ist durch $d_{ij} := = d_j - d_i$ definiert.

des Punktes $P(x, y, z) \in \Pi_i^3$ die „Fläche“

$$F(P) = Q(x, y, z) \tag{24}$$

mit einem quadratischen Polynom Q in x, y, z. Dies bedeutet: *Jene Punkte $P \in \Pi_i^3$, die unter Z^β Bahnen mit demselben Wert F erzeugen, liegen auf einer Fläche $\Phi(F)$ 2. Ordnung, wobei verschiedenen Werten von F i.a. konzentrische homothetische Quadriken Φ entsprechen.* Auf eine Diskussion der Sonderfälle wird hier verzichtet. Der Schnittkurve einer Quadrik Φ mit Δ wird durch β^{-1} ein *Hyperzykel* $f \subset \Sigma$ zugeordnet [3]. Dem gemeinsamen Asymptotenkegel der konzentrischen Flächen $\Phi(F) \subset \Pi_i^3$ entspricht unter der Nullpolarität μ aus Abschnitt 1 ein Kegelschnitt $l \subset \Pi_i^3$; längs l werden die Flächen $\Phi\mu$ von einem im Π_i^3 isotropen quadratischen Zylinder Λ berührt. Die Λ berührenden euklidischen Minimalebenen berühren damit auch alle $\Phi\mu$ sowie den absoluten Kegelschnitt des Π_{pe}^3, sind also gleichzeitig pseudoeuklidische Minimalebenen. Mithin sind die Schnittpunkte der Fokalachsen von Λ mit Σ: $z = 0$ die gemeinsamen Brennpunkte sämtlicher Hyperzykel $f(F) \subset \Sigma$:

Satz 6. *Die Speere $\mathbf{g}$ der Gangebene Σ, welche bei einem geschlossenen $\mathscr{L}_5$-Zwanglauf auf dieselbe Hüllbahnfläche $F(\mathbf{g})$ führen, erfüllen einen Hyperzykel $f(F) \subset \Sigma$, wobei zu verschiedenen Werten von F i.a. konfokale Hyperzykel gehören.*

Bei einem *äquiformen Zwanglauf* $(a_0 \equiv 0)$ liegt l in Σ, was zur Folge hat, daß die Kurven $f(F)$ *konfokale Kegelschnitte* sind [14].

5. ZWANGLÄUFE IM SINNE DER VON DER BEWEGUNGSGRUPPE $GO^+(\mathbb{R}^2)$ UND DER DILATATIONSGRUPPE $\mathscr{D}_1$ ERZEUGTEN UNTERGRUPPE $\mathscr{L}_4$ VON $\mathscr{L}_5$

Wir wählen nun in (6) die Abbildungen α aus der ebenen euklidischen Bewegungsgruppe $GO^+(\mathbb{R}^2)$, setzen also $a_3 \equiv 1$. Gleichung (5) zeigt: *Die Gruppe $\mathscr{L}_4$ ist isomorph zur Gruppe $\mathscr{I}_4$ der Bewegungen des einfach isotropen Raumes Π_i^3, welche eine feste isotrope Gerade in sich überführen.* Die Ähnlichkeitsindikatrix $j_\alpha \subset \Sigma_0$ liegt dann im Einheitskreis um O_0 und ihre Länge L_α nimmt den Wert

$$L_\alpha = 2\pi\nu \tag{25}$$

mit ν als Drehzahl von Z an. Gleichung (13) lehrt uns, daß die Differenz $L(\mathbf{g}_2) - L(\mathbf{g}_1)$ zweier Längen von Hüllbahnen eines $\mathscr{L}_4$-Zwanglaufs eine $\mathscr{L}_4$-Invariante ist, während man zur Bildung einer $\mathscr{L}_5$-Invariante etwa Differenzenquotienten von Längen heranzuziehen hat (vgl. Satz 5). Ein $\mathscr{L}_4$-Zwanglauf ist bereits durch Vorgabe der Hüllbahnen dreier Speere bestimmt, sofern deren Trägergeraden nicht demselben Parallelenbüschel angehören. Damit lassen sich die angeführten Resultate über $\mathscr{L}_5$-Zwangläufe unschwer für Zwangläufe im Sinne der Gruppe $\mathscr{L}_4$ formulieren.

Literatur

[1] *W. Benz:* Vorlesungen über Geometrie der Algebren. Springer, Berlin—Heidelberg—New York 1973.

[2] *W. Blaschke:* Über einige unendliche Gruppen von orientierten Berührungstransformationen in der Ebene. Math. Ann. *69* (1910), 204—217.

[3] *W. Blaschke:* Untersuchungen über die Geometrie der Speere in der Euklidischen Ebene. Monatsh. Math. u. Phys. *21* (1910), 3—60.

[4] *W. Blaschke:* Über die Laguerresche Geometrie orientierter Geraden in der Ebene I. Arch. Math. u. Phys. *18* (1911), 132—140.

[5] *W. Blaschke, H. R. Müller:* Ebene Kinematik. Oldenbourg, München 1956.

[6] *F. Fabricius-Bjerre:* Über zykloidale Kurven in der Ebene und im Raum. Danske Vid. Selsk., Mat. fys. Medd. *26* (1951), 1—75.

[7] *H. Frank:* Kinematik in der Laguerre-Ebene I, II. J. Geometry 7 (1976), 53—84, 97—124.

[8] *H. Frank:* Kinematik in der Laguerre-Ebene III: L-Bewegungen der engeren Laguerre-Geometrie. Arch. Math. *27* (1976), 319—329.

[9] *Z. Jankovský:* Zur Laguerreschen Ebenegeometrie. Čas. pěst. mat. *109* (1984), 236—249.

[10] *C. Lübbert:* Über geschlossene affine Zwangläufe in der Ebene. Manuscr. Math. *21* (1977), 101—115.

[11] *E. Müller, J. Krames:* Vorlesungen über Darstellende Geometrie II. Die Zyklographie. Deuticke, Leipzig—Wien 1929.

[12] *H. Pottmann:* Über Geradenhüllbahnen bei ebenen äquiformen Zwangläufen. Abh. Braunschweig. Wiss. Ges. *35* (1983), 25—30.

[13] *H. Pottmann:* Spezielle äquiforme Zwangläufe. Apl. mat. *29* (1984), 225—232.

[14] *H. Pottmann:* Ebene äquiforme Zwangläufe im Großen I, II. Resultate d. Math., *9* (1986), 131—159; *11* (1987), 122—143.

[15] *H. Pottmann:* Sätze vom Holditch-Typ über den Flächeninhalt kinematisch erzeugter unbeschränkter Bereiche. Anz. Österr. Akad. Wiss. *124* (1987), 43—51.

[16] *H. Sachs:* Lehrbuch der isotropen Geometrie. Vieweg, Wiesbaden 1985.

[17] *J. Tölke:* Steiner-Formeln für die Bahnflächen geschlossener Äquiaffinbewegungen. Sitzgs-ber. Österr. Akad. Wiss. *187* (1978), 325—337.

[18] *J. Tölke:* Eine affine Verallgemeinerung eines globalen Satzes von J. Steiner. Abh. Braunschweig. Wiss. Ges *30* (1978),1—5.

[19] *J. Tölke:* Zur Kinematik der abstands- und winkeltreuen Laguerre Abbildungen. Mitt. Math. Sem. Giessen *165* (1984), 223—235.

Souhrn

O GLOBÁLNÍ KINEMATICE PĚTIČLENNÉ PODGRUPY ROVINNÉ LAGUERROVY GRUPY

HELMUT POTTMANN

V práci je pojednáno o globálních vlastnostech nucených pohybů, definovaných na pětiparametrické pohybové grupě, která je podgrupou Laguerrovy grupy $\mathscr{L}_7$.

Je vysvětlen význam Laguerrových pohybů a jsou nalezeny základní vlastnosti těchto pohybů „ve velkém".

Резюме

О КИНЕМАТИКЕ В ЦЕЛОМ 5-ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ ПОДГРУПЫ ПЛОСКОСТНОЙ ГРУПЫ ЛАГЕРА

HELMUT POTTMANN

В работе рассматриваются глобальные свойства вынужденных движений определенных на 5-параметрической групне движений, являющейся подгрупной группы Лагера $\mathscr{L}_7$. Объяснено значение движений Лагера и найдены некоторые их основные свойства „в целом“.

Anschrift des Verfassers: Institut für Geometrie der Technischen Universität, Wiedner Hauptstraße 8—10, A-1040 Wien, Österreich.