Alfréd Rényi

Poznámka o úhlech mnohoúhelníka

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 78 (1953), No. 4, 305--306

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/108702

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 78 (1953)

POZNÁMKA O ÚHLECH MNOHOÚHELNÍKA

ALFRED RÉNYI, Budapest.

(Z dopisu *E. Čechovi* datovaného 2. 1. 1953.)

DT: 513.192

Úhly $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ rovinného n-úhelníka splňují nerovnosti

$$0 < \alpha_k < 2\pi \quad (k = 1, 2, \ldots, n) \tag{1}$$

a rovnici

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k = (n - 2)\,\pi\,. \tag{2}$$

E. Čech položil otázku, zda obráceně čísla $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ ($n \geqq 3$) splňující podmínky (1) a (2) jsou *v daném pořadí* úhly n-úhelníka. *Odpověď je kladná.*

Důkaz vedeme indukcí. Pro $n = 3$ je věta triviální, budiž tedy $n \geqq 4$ a pro $(n - 1)$-úhelníky budiž věta už dokázána. Položme $\alpha_j = \alpha_k$ pro $j \equiv k \pmod{n}$. Pro $n \geqq 4$ je

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i + \alpha_{i+1}) = \frac{(n - 2) \,.\, 2\pi}{n} \geqq \pi\,,$$

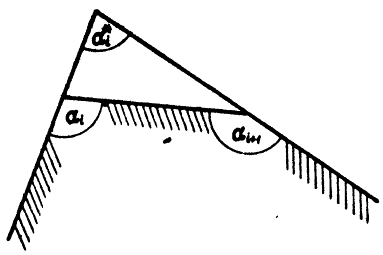
při čemž rovnost platí pouze pro $n = 4$. Je-li $\alpha_i + \alpha_{i+1} = \pi$ pro všechna n, je $n = 4$ a věta je správná (případ rovnoběžníka). Jinak musí existovat takový index i, že $\alpha_i + \alpha_{i+1} > \pi$, avšak $\alpha_{i+1} + \alpha_{i+2} \leqq \pi$; protože $\alpha_{i+2} > \emptyset$, je $\alpha_{i+1} < \pi$ a tedy $\alpha_i + \alpha_{i+1} < 3\pi$, neboť $\alpha_i < 2\pi$. Položíme-li

$$\alpha_i^* = \alpha_i + \alpha_{i+1} - \pi\,,$$

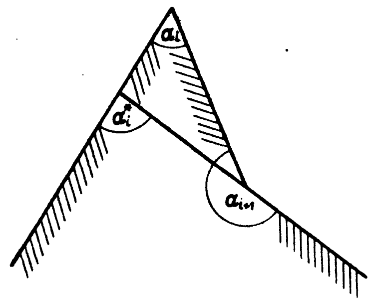
bude $0 < \alpha_i^* < 2\pi$ a součet $n - 1$ čísel

$$\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, \alpha_i^*, \alpha_{i+2}, \ldots, \alpha_n \tag{3}$$

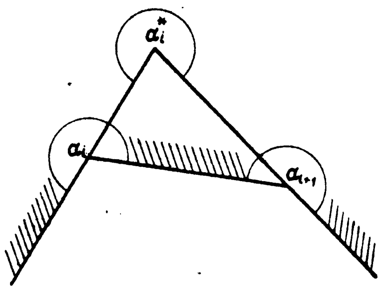
bude roven $(n - 3)\,\pi$, takže podle induktivního předpokladu jsou čísla (3) v daném pořadí úhly $(n - 1)$-úhelníka P. Mimo to je patrné, že při induktivním důkaze můžeme předpokládat $\alpha_i \neq \pi$, $\alpha_{i+1} \neq \pi$. Jsou nyní tři možnosti: (a) $\alpha_i^* < \pi$, (b) $\pi < \alpha_i^* < 2\pi$, (c) $\alpha_i^* = \pi$. V případě (a) je $\alpha_i + \alpha_{i+1} < 2\pi$ a tedy aspoň jeden z obou úhlů, třeba α_i, je menší než π. Je-li také $\alpha_{i+1} < \pi$, ubereme (obr. a_1) od P malý trojúhelník s úhly $\pi - \alpha_i$, $\pi - \alpha_{i+1}$, α_i^*; je-li $\alpha_{i+1} > \pi$, připojíme (obr. a_2) k P malý trojúhelník s úhly α_i, $\alpha_{i+1} - \pi$, $\pi - \alpha_i^*$.



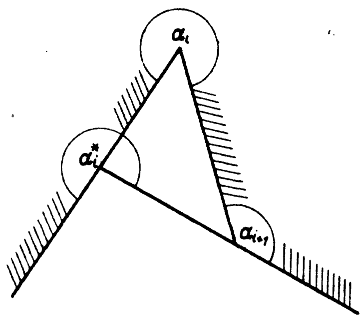
Obr. a_1.



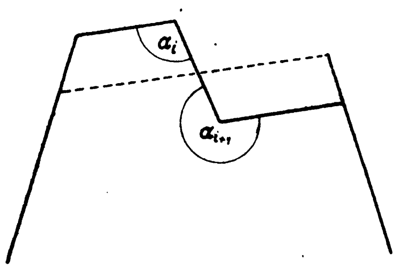
Obr. a_2.



Obr. b_1.



Obr. b_2.



Obr. c.

V případě (b) je $\alpha_i + \alpha_{i+1} > 2\pi$ a tedy aspoň jeden z obou úhlů, třeba α_i, je větší než π. Je-li také $\alpha_{i+1} > \pi$, připojíme (obr. b_1) k P malý trojúhelník s úhly $\alpha_i - \pi$, $\alpha_{i+1} - \pi$, $2\pi - \alpha_i^*$; je-li $\alpha_{i+1} < \pi$, ubereme (obr. b_2) od P malý trojúhelník s úhly $2\pi - \alpha_i$, $\pi - \alpha_{i+1}$, $\alpha_i^* - \pi$. Posléze v případě (c) pozměníme P podle obr. c. Věta je dokázána.