

Alfréd Rényi

Poznámka o úhlech mnohoúhelníka

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 78 (1953), No. 4, 305--306

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/108702>

## Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1953

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

POZNÁMKA O ÚHLECH MNOHOÚHELNÍKA

ALFRED RÉNYI, Budapest.

(Z dopisu E. Čechovi datovaného 2. 1. 1953.)

DT: 513.192

Úhly  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  rovinného  $n$ -úhelníka splňují nerovnosti

$$0 < \alpha_k < 2\pi \quad (k = 1, 2, \dots, n) \quad (1)$$

a rovnici

$$\sum_{k=1}^n \alpha_k = (n - 2) \pi. \quad (2)$$

E. ČECH položil otázku, zda obráceně čísla  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  ( $n \geq 3$ ) splňující podmínky (1) a (2) jsou v daném pořadí úhly  $n$ -úhelníka. Odpověď je kladná.

Důkaz vedeme indukcí. Pro  $n = 3$  je věta triviální, budiž tedy  $n \geq 4$  a pro  $(n - 1)$ -úhelníky budiž věta už dokázána. Položme  $\alpha_j = \alpha_k$  pro  $j \equiv k \pmod{n}$ . Pro  $n \geq 4$  je

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\alpha_i + \alpha_{i+1}) = \frac{(n - 2) \cdot 2\pi}{n} \geq \pi,$$

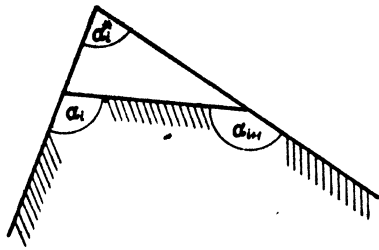
při čemž rovnost platí pouze pro  $n = 4$ . Je-li  $\alpha_i + \alpha_{i+1} = \pi$  pro všechna  $n$ , je  $n = 4$  a věta je správná (případ rovnoběžníka). Jinak musí existovat takový index  $i$ , že  $\alpha_i + \alpha_{i+1} > \pi$ , avšak  $\alpha_{i+1} + \alpha_{i+2} \leq \pi$ ; protože  $\alpha_{i+2} > 0$ , je  $\alpha_{i+1} < \pi$  a tedy  $\alpha_i + \alpha_{i+1} < 3\pi$ , neboť  $\alpha_i < 2\pi$ . Položíme-li

$$\alpha_i^* = \alpha_i + \alpha_{i+1} - \pi,$$

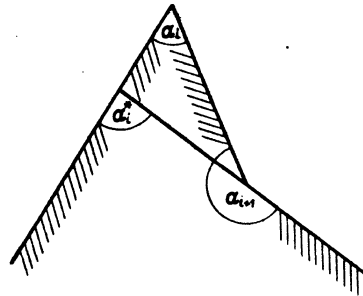
bude  $0 < \alpha_i^* < 2\pi$  a součet  $n - 1$  čísel

$$\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, \alpha_i^*, \alpha_{i+2}, \dots, \alpha_n \quad (3)$$

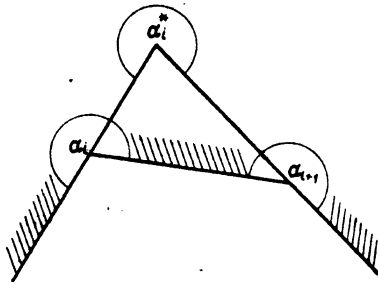
bude roven  $(n - 3) \pi$ , takže podle induktivního předpokladu jsou čísla (3) v daném pořadí úhly  $(n - 1)$ -úhelníka  $P$ . Mimo to je patrné, že při induktivním důkaze můžeme předpokládat  $\alpha_i \neq \pi$ ,  $\alpha_{i+1} \neq \pi$ . Jsou nyní tři možnosti: (a)  $\alpha_i^* < \pi$ , (b)  $\pi < \alpha_i^* < 2\pi$ , (c)  $\alpha_i^* = \pi$ . V případě (a) je  $\alpha_i + \alpha_{i+1} < 2\pi$  a tedy aspoň jeden z obou úhlů, třeba  $\alpha_i$ , je menší než  $\pi$ . Je-li také  $\alpha_{i+1} < \pi$ , ubereme (obr. a<sub>1</sub>) od  $P$  malý trojúhelník s úhly  $\pi - \alpha_i$ ,  $\pi - \alpha_{i+1}$ ,  $\alpha_i^*$ ; je-li  $\alpha_{i+1} > \pi$ , připojíme (obr. a<sub>2</sub>) k  $P$  malý trojúhelník s úhly  $\alpha_i$ ,  $\alpha_{i+1} - \pi$ ,  $\pi - \alpha_i^*$ .



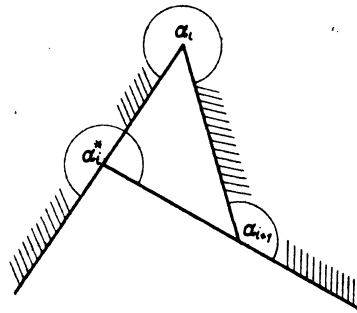
Obr. a<sub>1</sub>.



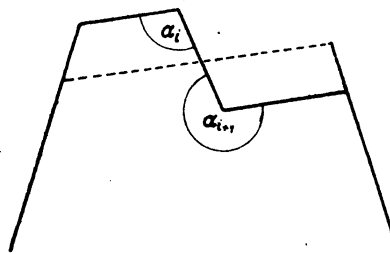
Obr. a<sub>2</sub>.



Obr. b<sub>1</sub>.



Obr. b<sub>2</sub>.



Obr. c.

V případě (b) je  $\alpha_i + \alpha_{i+1} > 2\pi$  a tedy aspoň jeden z obou úhlů, třeba  $\alpha_i$ , je větší než  $\pi$ . Je-li také  $\alpha_{i+1} > \pi$ , připojíme (obr. b<sub>1</sub>) k  $P$  malý trojúhelník s úhly  $\alpha_i - \pi$ ,  $\alpha_{i+1} - \pi$ ,  $2\pi - \alpha_i^*$ ; je-li  $\alpha_{i+1} < \pi$ , uберeme (obr. b<sub>2</sub>) od  $P$  malý trojúhelník s úhly  $2\pi - \alpha_i$ ,  $\pi - \alpha_{i+1}$ ,  $\alpha_i^* - \pi$ . Posléze v případě (c) pozměníme  $P$  podle obr. c. Věta je dokázána.