Časopis pro pěstování matematiky, roč. 88 (1963), Praha

REFERÁTY

KE GEOMETRII ČTVRTÉHO HARMONICKÉHO BODU

VÁCLAV HAVEL, Brno

(Předneseno dne 2. 12. 1959 na celostátní konferenci o elementární matematice v Brně)

Budeme se zabývat rovinou $\boldsymbol{R}$, pro niž předpokládáme pouze platnost axiomů incidence. Podrobněji: $\boldsymbol{R}$ je bodová množina s význačnými podmnožinami (přímkami) a platí: Ke každým dvěma různým bodům $A, B \in \boldsymbol{R}$ existuje právě jedna přímka (kterou označíme AB), která oba body obsahuje. Dvě různé přímky $a, b \subset \boldsymbol{R}$ mají vždy jediný společný bod (který označíme $a \cap b$). V $\boldsymbol{R}$ existuje čtveřice bodů obecně položených, tj. takových, z nichž žádné tři nejsou obsaženy v téže přímce ([1], str. 7).

Přípustnou skupinou bodů v $\boldsymbol{R}$ rozumíme libovolnou množinu navzájem různých bodů ležících v téže přímce. Vyslovíme tyto podmínky:

I (I'). Pro žádnou (každou) čtveřinu obecně položených bodů A, B, C, D z $\boldsymbol{R}$ neleží (leží) body $AB \cap CD$, $AC \cap BD$, $AD \cap BC$ v téže přímce.

II. Je-li A, B, C kterákoliv přípustná trojice bodů z R, pak pro všecky přípustné trojice A, V, W z R (kde $AB \neq AV$) jest $H_{ABC} = (A(BW \cap CV) \cap BV)\, W \cap AC$ bod, který je nezávislý na volbě bodů V, W.

Bod H_{ABC} nazývá se pak *čtvrtý harmonický* vzhledem k bodům A, B, C; *čtveřina* A, B, C, H_{ABC} se nazývá *harmonická* a značí se $((A, B, C, H_{ABC}))$. Rovinu $\boldsymbol{R}$ splňující podmínku II nazveme též harmonickou. Harmonické roviny jsou dvou typů: buďto splňují podmínku I anebo podmínku I'; srv. [1], str. 193. V rovinách prvého typu platí malá věta Desarguesova ([1], str. 86) a naopak, platí-li v některé rovině $\boldsymbol{R}$ podmínka I a malá Desarguesova věta, pak platí i podmínka II (srv. [1], str. 191 a 193). V harmonických rovinách druhého typu s konečným počtem bodů platí též malá Desarguesova věta, není však známo, zda totéž platí i pro harmonické roviny druhého typu s nekonečným počtem bodů ([2], [8]).

Nejprve dokažme, že v rovině $\boldsymbol{R}$ splňující podmínku I je možno podmínku II nahradit ekvivalentní podmínkou III tohoto znění:

III. *Ke každé přípustné trojici bodů $A, B, C \in \boldsymbol{R}$ lze přiřadit vždy právě jeden bod F_{ABC}, a to tak, že* a) *A, B, C, F_{ABC} je vždy přípustná čtveřice,* b) $F_{ABC} = F_{BAC}$, c) *při libovolné perspektivitě π mezi přímkami p, q* ([1], str. 8–9) *je $F^{\pi}_{XYZ} = F_{X^{\pi}Y^{\pi}Z^{\pi}}$ pro každou přípustnou trojici bodů $X, Y, Z \in p$.*

Důkaz. Nechť v dané rovině R platí podmínka II. Položme $F_{ABC} = H_{ABC}$. Pak jsou tvrzení a), b), c) splněna; viz [1], str. 192. Nechť v dané rovině R platí podmínka III. Mějme dvě přípustné trojice A, B, C; A, V, W, kde $AB \neq AV$. Nechť π_1 je perspektivita o středu W mezi AB, AB', kde $B' = BW \cap CV$; nechť π_2 je perspektivita o středu C mezi AB', BV a konečně nechť π_3 je perspektivita o středu W mezi BV, AV. Pak při π_1 přechází čtveřina A, B, C, F_{ABC} ve čtveřinu $A, B', C', F_{AB'C'}$ (podle a), c)), při π_2 přechází čtveřina $A, B', C', F_{AB'C'}$ ve čtveřinu $B, V, C'', F_{BVC''}$, a podle b) jest přitom $F_{BVC''} = F_{VBC''}$. Při π_3 přechází čtveřina $V, B, C'', F_{VBC''}$ ve čtveřinu A, B, C, F_{ABC}, tj. ve čtveřinu původní. Tedy $F_{AB'C'} = F_{VBC''}$, a tedy též $F_{ABC} = H_{ABC}$.

Nechť T je alternativní těleso charakteristiky $\neq 2$ ([1], str. 158). Elementy množiny $T \times T$ prohlásíme za (vlastní) body, podmnožiny tvaru $\{(x, y) \mid y = ax + b\}$, $\{(x, y) \mid x = c\}$ pro $a, b, c \in T$ prohlásíme za (vlastní) přímky. Provedeme-li obvyklou adjunkci nevlastních bodů (k přímce $y = ax + b$ připojíme nevlastní bod (a), k přímce $x = c$ nevlastní bod (∞)), dospíváme k harmonické rovině prvního typu. Takovou konstrukcí lze získat každou harmonickou rovinu prvního typu. Ta alternativní tělesa, která vedou k téže harmonické rovině, jsou navzájem isomorfní, ve smyslu uvedeném v [1], str. 108 a 196.

Mějme nyní harmonickou rovinu R prvního typu. K této rovině náleží podle předchozího určité alternativní těleso T, určené až na isomorfii jednoznačně. Vyberme v R přípustnou trojici bodů O, J, N určité přímky p. Pak lze za množinu všech prvků z T prohlásit množinu všech bodů z p, s výjimkou bodu N, a sčítání v T lze definovat takto:

$$A + O = O + A = A \text{ pro každé } A \in p \setminus \{N\},$$

$$A + A = H_{OAN} \text{ pro každé } A \in p \setminus \{O, N\},$$

$$A + B = H_{OCN}, \; C = H_{ABN} \text{ pro každé dva různé elementy } A, B \in p \setminus \{O, N\}.$$

Násobení v T lze zavést konfigurativně bez závislosti na pevných bodech mimo p pouze v tom případě, když těleso T je asociativní ([3], str. 550); v obecném případě tomu tak není. Přesto však lze definovat alespoň inversní prvky bez závislosti na pevných bodech mimo p, a to užitím axiomu II. Inversní prvek J^{-1} k prvku J definujeme jako prvek J. Inversní prvek A^{-1} k prvku $A \in p \setminus \{O, J, N\}$ definujeme jako bod H_{J-JA}, kde $-J = H_{ONJ}$ ([3], str. 551).

Nyní dokážeme tuto **větu:**

Nechť R je harmonická rovina prvního typu, nechť O, J, N je přípustná trojice bodů přímky $p \subset R$. Nechť σ je prosté zobrazení přímky p na sebe samu, které zachovává harmonické čtveřiny a při němž jest $O^\sigma = O$, $J^\sigma = J$, $N^\sigma = N$. Pak v příslušném alternativním tělese T platí:

$$(*) \qquad (A + B)^\sigma = A^\sigma + B^\sigma \text{ pro všechna } A, B \in p \setminus \{N\},$$

$$(**) \qquad (A^{-1})^\sigma = (A^\sigma)^{-1} \text{ pro každé } A \in p \setminus \{O, N\}.$$

Důkaz. Rovnice (*) platí triviálně pro $A = 0$ anebo $B = 0$. Je-li $A \neq O$, pak $((O, A, N, A + A))^\sigma = ((O^\sigma, A^\sigma, N^\sigma, (A + A)^\sigma)) = ((O, A^\sigma, N, (A + A)^\sigma))$. Srovnáním s relací $((O, A^\sigma, N, A^\sigma + A^\sigma))$ plyne ihned $(A + A)^\sigma = A^\sigma + A^\sigma$. Položíme-li $A + A = C$, pak $C^\sigma = (C/2)^\sigma + (C/2)^\sigma$ neboli

$$(***) \qquad (C/2)^\sigma = C^\sigma/2 \text{ pro každé } C \in p \setminus \{N\}\,.$$

Pro různá $A, B \in p \setminus \{O, N\}$ je $((A, B, N, (A + B)/2))^\sigma = ((A^\sigma, B^\sigma, N, ((A + B) : : 2)^\sigma))$, takže srovnáním s relací $((A^\sigma, B^\sigma, N, (A^\sigma + B^\sigma)/2))$ plyne $((A + B)/2)^\sigma = = (A^\sigma + B^\sigma)/2$. Podle (***) platí tedy též (*). Rovnice (**) platí triviálně pro $A = J$. Je-li $A \in p \setminus \{O, J, N\}$, pak $((J, -J, A, A^{-1}))^\sigma = ((J^\sigma, (-J)^\sigma, A^\sigma, (A^{-1})^\sigma)) = = ((J, -J, A^\sigma, (A^{-1})^\sigma))$. Srovnáním s relací $(J, -J, A^\sigma, (A^\sigma)^{-1})$ obdržíme okamžitě (**).

Poznamenejme, že relace (**) je ekvivalentní s každou z relací $(A^2)^\sigma = (A^\sigma)^2$, $(ABA)^\sigma = A^\sigma B^\sigma A^\sigma$, $(AB + BA)^\sigma = A^\sigma B^\sigma + B^\sigma A^\sigma$, kde A, B náleží do příslušného tělesa; srv. [1], str. 122–124, resp. [5], str. 116.

Dokázanou větu lze též obrátit: *Platí-li v naší rovině* $\boldsymbol{R}$ *pro prosté zobrazení* σ *přímky* p *na sebe samu vztahy* (*), (**), *pak jest* $O^\sigma = O$, $J^\sigma = J$, $N^\sigma = N$ a $((A, B, C, D))^\sigma = ((A^\sigma, B^\sigma, C^\sigma, D^\sigma))$ *pro každou harmonickou čtveřinu přímky* p. Srv. [6], str. 316.

Dále uvedeme geometrickou interpretaci podmínky, aby zobrazení σ z naší věty splňovalo některou z relací

$$(^\circ) \qquad (AB)^\sigma = A^\sigma B^\sigma \text{ pro všecka } A, B \in p \setminus \{N\}\,,$$

$$(^{\circ\circ}) \qquad (AB)^\sigma = B^\sigma A^\sigma \text{ pro všecka } A, B \in p \setminus \{N\}\,.$$

Nutná i postačující podmínka pro to zní:

$$(^{\circ\circ\circ}) \qquad A^\sigma(B^\sigma(AB)^\sigma) = (A^\sigma B^\sigma)(AB)^\sigma \text{ pro všecka } A, B \in p \setminus \{N\}. \text{ Viz } [7]\,.$$

Označíme-li $\langle A, B\rangle$ asociativní podtěleso vytvořené v T prvky A, B ([1], str. 161), pak lze podmínku $(^{\circ\circ\circ})$ vyslovit též takto:

$$(^+) \qquad \langle A, B\rangle^\sigma = \langle A^\sigma, B^\sigma\rangle \text{ pro všecka } A, B \in p \setminus \{N\}\,.$$

Zobrazení σ indukuje v $\boldsymbol{T} \times \boldsymbol{T}$ zobrazení $(x, y)^\sigma = (x^\sigma, y^\sigma)$, $(z)^\sigma = (z^\sigma)$, $(\infty)^\sigma = = (\infty)$. Platí-li relace $(^\circ)$, resp. $(^{\circ\circ})$, pak indukované zobrazení je afinitou, resp. antiafinitou (tj. afinitou při přechodu k opačné struktuře), jak lze snadno ukázat; srv. [1], str. 4 a 91. Doplníme v $\boldsymbol{R}$ k bodům O, J, N body V, E tak, aby body O, E, V, N měly obecnou polohu a aby $VE \cap ON = J$. Podmínka $(^+)$ je ekvivalentní s následující podmínkou:

$(^{++})$ Rovina vytvořená v $\boldsymbol{R}$ body O, E, V, N, A, B přechází při σ v rovinu vytvořenou v $\boldsymbol{R}$ body $O, E, V, N, A^\sigma, B^\sigma$, a to pro každé $A, B \in p \setminus \{N\}$.

Dospíváme k závěru: *Jestliže platí* $(^{++})$, *pak indukované zobrazení je afinitou anebo antiafinitou.*

Literatura

[1] *G. Pickert*: Projektive Ebenen. Berlin-Göttingen-Heidelberg 1955.
[2] *A. M. Gleason*: Finite Fano planes. Am. J. Math. *78* (1956), 797—807.
[3] *N. S. Mendelsohn*: Non-desarguesian projective plane geometries which satisfy the harmonic point axiom. Can. J. Math. *8* (1956), 532—562.
[4] *A. Zaddach*: Über Anti-Fano-Ebenen. Math. Zeitschr. *65* (1956), 353—388.
[5] *K. Schütte*: Schliessungssätze für orthogonale Abbildungen euklidischer Ebenen. Math. Ann. *132* (1957), 314—317.
[6] *V. Havel*: Eine Bemerkung zum Staudtschen Satz in der Moufang-Ebene. Czech. Math. J. *7* (1957), 314—317.
[7] *V. Havel*: Poznámka o semihomomorfismech alternativních okruhů. Mat.-fyz. čas. *8* (1957), 3—6.
[8] *G. Pickert*: Die Assoziativität der Multiplikationen und Additionen in einer projektiven Ebene. Dal Convegno Internazionale Reticoli e Geometrie Proiettive, Palermo-Messina 1957, 1—11.

VLASTNOSTI ZASSENHAUSOVY KONSTRUKCE V GRUPÁCH A SVAZECH

(Vlastní referát LUDVÍKA JANOŠE o přednášce konané dne 3. 12. 1962 na matematicko-fysikální fakultě KU)

Hlavním výsledkem sdělení je důkaz věty:

K tomu, aby Zassenhausova konstrukce nevedla k vlastnímu zjemnění daných dvou normálních řetězců v grupě je nutné a stačí, aby řetězce byly zdola jednoduše podobné.

Budiž S svaz, jeho uspořádání resp. průsek resp. spojení budeme psát $a \leqq b$ resp. $a \wedge b$ resp. $a \vee b$; $a < b \Leftrightarrow a \leqq b,\ a \neq b$. Jestliže je $a \geqq b$, pak pod kvocientem a/b rozumíme množinu definovanou takto: $x \in a/b \Leftrightarrow a \geqq x \geqq b$. *Dolní přímou* resp. *horní přímou* resp. *dolní jednoduchou* resp. *horní jednoduchou* resp. *dolní speciální jednoduchou* resp. *horní speciální jednoduchou podobnost kvocientů* definujeme takto:

$$a_1/a_2 \underset{d}{\sim} b_1/b_2 \Leftrightarrow a_2 \vee b_1 = a_1;\ a_2 \wedge b_1 = b_2\,,$$

$$a_1/a_2 \overset{d}{\sim} b_1/b_2 \Leftrightarrow b_1/b_2 \underset{d}{\sim} a_1/a_2\,,$$

$$a_1/a_2 \underset{j}{\sim} b_1/b_2 \Leftrightarrow a_1/a_2 \underset{d}{\sim} u_1/u_2 \overset{d}{\sim} b_1/b_2 \text{ při vhodném } u_1/u_2\,,$$

$$a_1/a_2 \overset{j}{\sim} b_1/b_2 \Leftrightarrow a_1/a_2 \overset{d}{\sim} u_1/u_2 \underset{d}{\sim} b_1/b_2\,,$$

$$a_1/a_2 \underset{r}{\sim} b_1/b_2 \Leftrightarrow a_1/a_2 \underset{d}{\sim} a_1 \wedge b_1/a_2 \wedge b_2 \overset{d}{\sim} b_1/b_2\,,$$

$$a_1/a_2 \overset{r}{\sim} b_1/b_2 \Leftrightarrow a_1/a_2 \overset{d}{\sim} a_1 \vee b_1/a_2 \vee b_2 \underset{d}{\sim} b_1/b_2\,.$$