Miroslav Šisler

O řešení soustavy nelineárních rovnic s funkční maticí speciálního typu

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 90 (1965), No. 3, 344--352

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/108748

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 90 (1965), Praha

O ŘEŠENÍ SOUSTAVY NELINEÁRNÍCH ROVNIC S FUNKČNÍ MATICÍ SPECIÁLNÍHO TYPU

MIROSLAV ŠISLER, Praha

(Došlo dne 31. července 1964)

V článku je popsána iterační metoda umožňující v případě, kdy funkční matice dané soustavy nelineárních rovnic je speciálního typu, snadnější výpočet postupných aproximací reálného řešení, než metody uvedené v článcích [1], [2], [3].

V článcích [1], [2], [3] jsme se zabývali jistými iteračními metodami pro výpočet reálného řešení soustavy n nelineárních rovnic (algebraických či transcendentních) o n neznámých $f_i(x_1. \ldots, x_n) = 0$, $i = 1, \ldots, n$. Proti obvyklé Newtonově metodě (teoreticky rychleji konvergující) je výpočet postupných aproximací podstatně jednodušší. Na závadu však je ta skutečnost, že v případě, kdy funkční matice $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ dané soustavy rovnic (tj. matice parciálních derivací $\partial f_i/\partial x_i(\mathbf{x})$) není v okolí hledaného řešení diagonálně dominantní[1]), případně není symetrická (případ symetrické matice $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ nastává prakticky např. při výpočtu extrémů funkce více proměnných), je nutno při každém kroku utvořit symetrickou matici $\mathbf{F}'(\mathbf{x})\,\mathbf{F}(\mathbf{x})$, což má za následek nejen zbytečné zkomplikování výpočtu, ale i snížení jeho přesnosti. V našem článku bude proto popsána metoda, která při splnění určitých podmínek pro matici $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ umožní pracovat s původní maticí $\mathbf{F}(\mathbf{x})$, aniž je třeba tuto matici symetrizovat. Článek navazuje na výsledky článku [4].

Buď dána soustava n nelineárních rovnic o n neznámých

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = 0\,, \tag{1}$$

kde $\mathbf{x}$ je reálný sloupcový vektor o složkách $x_1, x_2, \ldots, x_n$ a $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ je sloupcový vektor, jehož složky $f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \ldots, f_n(\mathbf{x})$ jsou reálné funkce n reálných proměnných $x_1, \ldots, x_n$.

Nyní platí toto lemma:

Lemma 1. *Pro čtvercové matice* $\mathbf{F}$, $\mathbf{P}$, $\mathbf{Q}$ *nechť platí rovnost*

$$\mathbf{F} = \mathbf{Q} - 2\mathbf{P}\,,$$

přičemž matice $-(\mathbf{F} + \mathbf{F}^*)$ *je kladně resp. záporně definitní,* $\mathbf{Q}$ *je kladně resp.*

[1]) Viz [4], poznámka[1]) pod čarou.

záporně definitní hermitovská matice a $\mathbf{Q} - \mathbf{F}$ *je regulární.*[2]) *Potom je matice* $\mathbf{P}$ *regulární a matice* $\mathbf{P}^{-1}(\mathbf{Q} - \mathbf{P})$ *má vlastní čísla v modulu menší než* 1.

Důkaz tohoto lemmatu byl proveden v článku [4] (věta 1). V našem případě půjde ovšem pouze o reálné matice.

Předpokládejme, že v nějakém okolí Ω reálného řešení $\mathbf{a}$ soustavy (1) jsou funkce $f_i(\mathbf{x})$ spojité a mají v Ω spojité parciální derivace podle všech proměnných. Rozložme funkční matici $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ soustavy (1) na tvar

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{Q}(\mathbf{x}) - 2\mathbf{P}(\mathbf{x}) \tag{2}$$

přičemž prvky matice $\mathbf{Q}(\mathbf{x})$ a $\mathbf{P}(\mathbf{x})$ jsou v Ω spojité funkce n reálných proměnných. V případě, že je v okolí Ω matice $-(\mathbf{F}(\mathbf{x}) + \mathbf{F}'(\mathbf{x}))$ kladně resp. záporně definitní, $\mathbf{Q}(\mathbf{x})$ kladně, resp. záporně definitní symetrická matice a matice $\mathbf{Q}(\mathbf{x}) - \mathbf{F}(\mathbf{x})$ regulární, definujme iterační metodu takto:

$$\mathbf{x}_{\nu+1} = \mathbf{P}^{-1}(\mathbf{x}_\nu)\left(\mathbf{Q}(\mathbf{x}_\nu) - \mathbf{P}(\mathbf{x}_\nu)\right)\mathbf{x}_\nu - \mathbf{P}^{-1}(\mathbf{x}_\nu)\,\mathbf{y}(\mathbf{x}_\nu)\,, \tag{3}$$

kde

$$\mathbf{y}(\mathbf{x}_\nu) = \mathbf{F}(\mathbf{x}_\nu)\,\mathbf{x}_\nu - \mathbf{f}(\mathbf{x}_\nu)\,. \tag{4}$$

Ze vztahů (2) a (3) plyne ihned jednoduchý vztah

$$\mathbf{x}_{\nu+1} = \mathbf{x}_\nu + \mathbf{P}^{-1}(\mathbf{x}_\nu)\,\mathbf{f}(\mathbf{x}_\nu)\,. \tag{5}$$

V dalším budeme uvažovat některou normu vektoru a jí odpovídající normu matice.

Zaveďme dále toto označení:

a) $\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \mathbf{P}^{-1}(\mathbf{x})\left(\mathbf{Q}(\mathbf{x}) - \mathbf{P}(\mathbf{x})\right)$;

b) $\mathrm{K}[\mathbf{z}, \mu]$ značí množinu bodů, pro něž je $\|\mathbf{x} - \mathbf{z}\| \leqq \frac{1}{2}\mu$ (je to tedy uzavřené symetrické okolí bodu $\mathbf{z}$ o průměru μ);

c) $\mathbf{q}_1, \ldots, \mathbf{q}_n$ buďte libovolné vektory. Matici $\mathbf{F}(\mathbf{q}_1, \ldots, \mathbf{q}_n)$ pak definujme takto:

$$\mathbf{F}(\mathbf{q}_1, \ldots, \mathbf{q}_n) = \begin{pmatrix} f_{11}(\mathbf{q}_1), \ldots, f_{1n}(\mathbf{q}_1) \\ f_{21}(\mathbf{q}_2), \ldots, f_{2n}(\mathbf{q}_2) \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ f_{n1}(\mathbf{q}_n), \ldots, f_{nn}(\mathbf{q}_n) \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Platí pak následující lemma:

Lemma 2. *Je-li* $\mathbf{a} = (a_i)$ *řešení soustavy* (1), *pak platí*

(7) $\mathbf{x}_{\nu+1} - \mathbf{a} = \mathbf{A}(\mathbf{x}_\nu)(\mathbf{x}_\nu - \mathbf{a}) + \mathbf{P}^{-1}(\mathbf{x}_\nu)\left(\mathbf{F}(\mathbf{p}_{\nu,1}, \ldots, \mathbf{p}_{\nu,n}) - \mathbf{F}(\mathbf{x}_\nu)\right)(\mathbf{x}_\nu - \mathbf{a})$,
kde $\mathbf{p}_{\nu,k} = \xi_{\nu,k}\mathbf{x}_\nu + (1 - \xi_{\nu,k})\,\mathbf{a}$, $0 < \xi_{\nu,k} < 1$, $k = 1, 2, \ldots, n$;

(8) $\mathbf{x}_{\nu+1} - \mathbf{x}_\nu = \mathbf{A}(\mathbf{x}_\nu)(\mathbf{x}_\nu - \mathbf{x}_{\nu-1}) + \mathbf{P}^{-1}(\mathbf{x}_\nu)\left(\mathbf{F}(\mathbf{q}_{\nu-1,1}, \ldots, \mathbf{q}_{\nu-1,n}) - \mathbf{F}(\mathbf{x}_\nu)\right)(\mathbf{x}_\nu - \mathbf{x}_{\nu-1})$,
kde $\mathbf{q}_{\nu-1,k} = \xi_{\nu-1,k}\mathbf{x}_\nu + (1 - \xi_{\nu-1,k})\,\mathbf{x}_{\nu-1}$, $0 < \xi_{\nu-1,k} < 1$, $k = 1, 2, \ldots, n$.

[2]) $\mathbf{F}^*$ značí matici hermitovsky sdruženou k matici $\mathbf{F}$.

Důkaz: a) Podle věty o přírůstku funkce platí

$$f_k(\mathbf{x}_\nu) = \sum_{j=1}^{n} f_{kj}(\mathbf{p}_{\nu,k})(x_{\nu,j} - a_j), \; ^3)$$

kde $\mathbf{p}_{\nu,k} = \xi_{\nu,k}\mathbf{x}_\nu + (1 - \xi_{\nu,k})\,\mathbf{a}$, $0 < \xi_{\nu,k} < 1$, $k = 1, \ldots, n$ čili

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_\nu) = \mathbf{F}(\mathbf{p}_{\nu,1}, \ldots, \mathbf{p}_{\nu,n})(\mathbf{x}_\nu - \mathbf{a}). \tag{9}$$

Je tedy podle (5), (9) a (2)

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_{\nu+1} - \mathbf{a} &= \mathbf{x}_\nu - \mathbf{a} + \mathbf{P}^{-1}(\mathbf{x}_\nu)\,\mathbf{f}(\mathbf{x}_\nu) = \mathbf{x}_\nu - \mathbf{a} + \mathbf{P}^{-1}(\mathbf{x}_\nu)\,\mathbf{F}(\mathbf{p}_{\nu,1}, \ldots, \mathbf{p}_{\nu,n})(\mathbf{x}_\nu - \mathbf{a}) = \\
&= \mathbf{x}_\nu - \mathbf{a} + \mathbf{P}^{-1}(\mathbf{x}_\nu)(\mathbf{F}(\mathbf{p}_{\nu,1}, \ldots, \mathbf{p}_{\nu,n}) - \mathbf{F}(\mathbf{x}_\nu))(\mathbf{x}_{\nu+1} - \mathbf{a}) + \\
&\quad + \mathbf{P}^{-1}(\mathbf{x}_\nu)\,\mathbf{F}(\mathbf{x}_\nu)(\mathbf{x}_\nu - \mathbf{a}) = \\
&= \mathbf{x}_\nu - \mathbf{a} + \mathbf{P}^{-1}(\mathbf{x}_\nu)(\mathbf{F}(\mathbf{p}_{\nu,1}, \ldots, \mathbf{p}_{\nu,n}) - \mathbf{F}(\mathbf{x}_\nu))(\mathbf{x}_{\nu+1} - \mathbf{a}) + \\
&\quad + \mathbf{P}^{-1}(\mathbf{x}_\nu)(\mathbf{Q}(\mathbf{x}_\nu) - \mathbf{P}(\mathbf{x}_\nu))(\mathbf{x}_\nu - \mathbf{a}) - \mathbf{P}^{-1}(\mathbf{x}_\nu)\,\mathbf{P}(\mathbf{x}_\nu)(\mathbf{x}_\nu - \mathbf{a}) = \\
&= \mathbf{A}(\mathbf{x}_\nu)(\mathbf{x}_\nu - \mathbf{a}) + \mathbf{P}^{-1}(\mathbf{x}_\nu)(\mathbf{F}(\mathbf{p}_{\nu,1}, \ldots, \mathbf{p}_{\nu,n}) - \mathbf{F}(\mathbf{x}_\nu))(\mathbf{x}_{\nu+1} - \mathbf{a}),
\end{aligned}$$

což je (7).

b) Podle věty o přírůstku funkce platí

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_\nu) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_{\nu-1}) + \mathbf{F}(\mathbf{p}_{\nu-1,1}, \ldots, \mathbf{p}_{\nu-1,n})(\mathbf{x}_\nu - \mathbf{x}_{\nu-1}), \tag{10}$$

kde $\mathbf{p}_{\nu-1,k} = \xi_{\nu-1,k}\mathbf{x}_\nu + (1 - \xi_{\nu-1,k})\,\mathbf{x}_{\nu-1}$, $0 < \xi_{\nu-1,k} < 1$, $k = 1, \ldots, n$.

Z (5), (10) a (2) plyne postupně

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_{\nu+1} - \mathbf{x}_\nu &= \mathbf{P}^{-1}(\mathbf{x}_\nu)\,\mathbf{f}(\mathbf{x}_\nu) = \mathbf{P}^{-1}(\mathbf{x}_\nu)(\mathbf{f}(\mathbf{x}_{\nu-1}) + \mathbf{F}(\mathbf{p}_{\nu-1,1}, \ldots, \mathbf{p}_{\nu-1,n})(\mathbf{x}_\nu - \mathbf{x}_{\nu-1})) = \\
&= \mathbf{P}^{-1}(\mathbf{x}_\nu)\,\mathbf{P}(\mathbf{x}_\nu)(\mathbf{x}_\nu - \mathbf{x}_{\nu-1}) + \mathbf{P}^{-1}(\mathbf{x}_\nu)\,\mathbf{F}(\mathbf{p}_{\nu-1,1}, \ldots, \mathbf{p}_{\nu-1,n})(\mathbf{x}_\nu - \mathbf{x}_{\nu-1}) = \\
&= \mathbf{x}_\nu - \mathbf{x}_{\nu-1} + \mathbf{P}^{-1}(\mathbf{x}_\nu)(\mathbf{F}(\mathbf{p}_{\nu-1,1}, \ldots, \mathbf{p}_{\nu-1,n}) - \mathbf{F}(\mathbf{x}_\nu))(\mathbf{x}_\nu - \mathbf{x}_{\nu-1}) + \\
&\quad + \mathbf{P}^{-1}(\mathbf{x}_\nu)\,\mathbf{F}(\mathbf{x}_\nu)(\mathbf{x}_\nu - \mathbf{x}_{\nu-1}) = \\
&= \mathbf{x}_\nu - \mathbf{x}_{\nu-1} + \mathbf{P}^{-1}(\mathbf{x}_\nu)(\mathbf{F}(\mathbf{p}_{\nu-1,1}, \ldots, \mathbf{p}_{\nu-1,n}) - \mathbf{F}(\mathbf{x}_\nu))(\mathbf{x}_\nu - \mathbf{x}_{\nu-1}) + \\
&\quad + \mathbf{P}^{-1}(\mathbf{x}_\nu)(\mathbf{Q}(\mathbf{x}_\nu) - \mathbf{P}(\mathbf{x}_\nu))(\mathbf{x}_\nu - \mathbf{x}_{\nu-1}) - \mathbf{P}^{-1}(\mathbf{x}_\nu)\,\mathbf{P}(\mathbf{x}_\nu)(\mathbf{x}_\nu - \mathbf{x}_{\nu-1}) = \\
&= \mathbf{A}(\mathbf{x}_\nu)(\mathbf{x}_\nu - \mathbf{x}_{\nu-1}) + \mathbf{P}^{-1}(\mathbf{x}_\nu)(\mathbf{F}(\mathbf{p}_{\nu-1,1}, \ldots, \mathbf{p}_{\nu-1,n}) - \mathbf{F}(\mathbf{x}_\nu))(\mathbf{x}_\nu - \mathbf{x}_{\nu-1}),
\end{aligned}$$

což je (8).

Označme nyní $d_\nu = \|\mathbf{x}_{\nu+1} - \mathbf{x}_\nu\|$ (oprava ν-té aproximace) a $\delta_\nu = \|\mathbf{x}_\nu - \mathbf{a}\|$ (chyba ν-té aproximace). Platí pak tato věta:

---

[3]) Zde značí $f_{kj}(\mathbf{x}) = \dfrac{\partial}{\partial x_j} f_k(\mathbf{x})$.

Věta 1. *Buď* $\mathbf{x}_0$ *bod,* λ *kladné číslo a* $\mathrm{K}[\mathbf{x}_0\ \lambda] \subset \Omega$. *Matice* $\mathbf{F}(\mathbf{x})$, $\mathbf{P}(\mathbf{x})$, $\mathbf{Q}(\mathbf{x})$ *nechť splňují pro každé* $\mathbf{x} \in \mathrm{K}[\mathbf{x}_0, \lambda]$ *předpoklady lemmatu 1 a nechť při zvolené normě platí* $\|\mathbf{A}(\mathbf{x})\| \leqq q < 1$ *pro každé* $\mathbf{x} \in \mathrm{K}[\mathbf{x}_0, \lambda]$. *Nechť dále platí*

$$P = q + pM < 1 \tag{11}$$

kde $\|\mathbf{P}^{-1}(\mathbf{x})\| \leqq p$, $|f_{kj}(\mathbf{x}) - f_{kj}(\mathbf{u})| \leqq M$ ($\mathbf{x}$, $\mathbf{u}$ *jsou libovolné body z* $\mathrm{K}[\mathbf{x}_0, \lambda]$) *a*

$$d_0 \leqq \tfrac{1}{2}(1 - P)\,\lambda\,. \tag{12}$$

Potom konverguje posloupnost $\{\mathbf{x}_\nu\}_{\nu=0}^{\infty}$ *definované vztahy* (3), (4) (*tj. vztahem* (5)) *k jistému bodu* $\mathbf{a} \in \mathrm{K}[\mathbf{x}_0, \lambda]$, *jenž je pak jediným řešením soustavy* (1) *v* $\mathrm{K}[\mathbf{x}_0, \lambda]$. *Platí pak následující odhady:*

$$d_{\nu+1} \leqq P d_\nu\,, \tag{13}$$

$$\delta_{\nu+1} \leqq P \delta_\nu\,, \tag{14}$$

$$\delta_\nu \leqq \frac{1}{1 - P}\, d_\nu\,, \tag{15}$$

$$\delta_{\nu+1} \leqq \frac{P}{1 - P}\, d_\nu\,, \tag{16}$$

kde $\nu = 0, 1, 2, \ldots$

Důkaz: Podle lemmatu 1 jsou vlastní čísla matice $\mathbf{P}^{-1}(\mathbf{x})\,(\mathbf{Q}(\mathbf{x}) - \mathbf{P}(\mathbf{x}))$ v $\mathrm{K}[\mathbf{x}_0, \lambda]$ v modulu menší než 1. Je-li dokonce ve zvolené normě $\|\mathbf{P}^{-1}(\mathbf{x})\,(\mathbf{Q}(\mathbf{x}) - \mathbf{P}(\mathbf{x}))\| \leqq \leqq q < 1$, dokážeme úplnou indukcí na základě vztahů (7) a (8) z lemmatu 3, že $\mathbf{x}_\nu \in \mathrm{K}[\mathbf{x}_0, \lambda]$, $\nu = 1, 2, \ldots$ Ze vztahu (12) plyne, že

$$\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0\| = d_0 \leqq \tfrac{1}{2}(1 - P)\,\lambda < \tfrac{1}{2}\lambda\,,$$

takže $\mathbf{x}_1 \in \mathrm{K}[\mathbf{x}_0, \lambda]$.

Předpokládejme nyní, že $\mathbf{x}_i \in \mathrm{K}[\mathbf{x}_0, \lambda]$, $i = 1, \ldots, \nu$. Pak je i $\mathbf{q}_{i-1,k} \in \mathrm{K}[\mathbf{x}_0, \lambda]$ $k = 1, 2, \ldots, n$, $i = 1, 2, \ldots, \nu$. Ze vztahů (8) a (12) pak plyne

$$\|\mathbf{x}_{\nu+1} - \mathbf{x}_0\| \leqq \|\mathbf{x}_{\nu+1} - \mathbf{x}_\nu\| + \|\mathbf{x}_\nu - \mathbf{x}_{\nu-1}\| + \ldots + \|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0\| \leqq$$
$$\leqq P^\nu d_0 + P^{\nu-1} d_0 + \ldots + d_0 = (P^\nu + P^{\nu-1} + \ldots + P + 1)\, d_0 <$$
$$< \frac{1}{1 - P}\, d_0 \leqq \frac{1}{1 - P}\, \tfrac{1}{2}(1 - P)\,\lambda = \tfrac{1}{2}\lambda\,.$$

Je tedy $\mathbf{x}_{\nu+1} \in \mathrm{K}[\mathbf{x}_0, \lambda]$, což jsme měli dokázat. Vzhledem k tomu, že posloupnost $\{\mathbf{x}_\nu\}_{\nu=0}^{\infty}$ je cauchyovská (platí totiž pro libovolné $\mu > \nu$ nerovnost $\|\mathbf{x}_\mu - \mathbf{x}_\nu\| \leqq \leqq P^\nu/(1 - P)\, d_\nu$) a protože je množina $\mathrm{K}[\mathbf{x}_0, \lambda]$ uzavřená a omezená, existuje bod $\mathbf{a} \in \mathrm{K}[\mathbf{x}_0, \lambda]$, jež je limitou posloupnosti $\{\mathbf{x}_\nu\}_{\nu=0}^{\infty}$. Odtud plyne i unicita řešení $\mathbf{a}$ v $\mathrm{K}[\mathbf{x}_0, \lambda]$.

Odhady (13) a (14) dostaneme ihned ze vztahů (7) a (8) lemmatu 3. Z trojúhelníkové nerovnosti zřejmě plyne

$$\delta_\nu \leqq \delta_{\nu+1} + d_\nu ,$$

takže je postupně

$$\delta_\nu \leqq P\delta_\nu + d_\nu ,$$

(15)
$$\delta_\nu \leqq \frac{1}{1-P} d_\nu ,$$

(16)
$$\delta_{\nu+1} \leqq P d_\nu \leqq \frac{P}{1-P} d_\nu .$$

Tím je věta 1 úplně dokázána.

Ve větě 1 byla dokázána konvergence uvažované iterační metody v případě, že matice $\mathbf{F}(\mathbf{x})$, $\mathbf{P}(\mathbf{x})$ a $\mathbf{Q}(\mathbf{x})$ splňují v okolí řešení předpoklady lemmatu 1, tj. že vlastní čísla matice $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ jsou v modulu vesměs menší než 1 a pro naši zvolenou normu platí dokonce $\|\mathbf{A}(\mathbf{x})\| \leqq q < 1$. Nyní stručně pojednáme o případu, kdy matice $\mathbf{F}(\mathbf{x})$, $\mathbf{P}(\mathbf{x})$, $\mathbf{Q}(\mathbf{x})$ splňují předpoklady lemmatu 1, avšak výše uvedená nerovnost při zvolené normě neplatí. Platí toto lemma:

Lemma 3. *Buď μ kladné číslo, $\mathbf{z}$ nějaký bod a nechť pro každé $\mathbf{x} \in \mathrm{K}[\mathbf{z}, \mu] \subset \Omega$ má matice $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ vlastní čísla v modulu menší než 1. Potom existují čísla λ, K, q taková, že $0 < \lambda \leqq \mu$, $K > 0$ a $0 < q < 1$, a pro libovolné body $\mathbf{x}_i \in \mathrm{K}[\mathbf{z}, \mu]$, $i = 1, \ldots, \nu$ (ν je libovolné přirozené číslo), platí nerovnost*

(17)
$$\left\| \prod_{i=1}^{\nu} \mathbf{A}(\mathbf{x}_i) \right\| \leqq K q^\nu .$$

Důkaz lemmatu 3 viz práci [3].

Označme nyní $\mathbf{P}(\mathbf{x}) = (p_{ij}(\mathbf{x}))$, $\mathbf{Q}(\mathbf{x}) = (q_{ij}(\mathbf{x}))$ a zvolme libovolné vektory $\mathbf{q}_1, \ldots, \mathbf{q}_n$. $\mathbf{P}(\mathbf{q}_1, \ldots, \mathbf{q}_n)$ pak bude značit matici, v jejíž i-tém řádku a j-tém sloupci je prvek $p_{ij}(\mathbf{q}_i)$ a podobně $\mathbf{Q}(\mathbf{q}_1, \ldots, \mathbf{q}_n)$ bude značit matici, v jejíž i-tém řádku a j-tém sloupci je prvek $q_{ij}(\mathbf{q}_i)$. Zřejmě je pak

$$\mathbf{F}(\mathbf{q}_1, \ldots, \mathbf{q}_n) = \mathbf{Q}(\mathbf{q}_1, \ldots, \mathbf{q}_n) - 2\mathbf{P}(\mathbf{q}_1, \ldots, \mathbf{q}_n) .$$

Platí pak toto lemma:

Lemma 4. Z (3), (4) *plyne*

(18) *a)*
$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{\nu+1} - \mathbf{x}_\nu = {} & \mathbf{A}(\mathbf{x}_\nu)(\mathbf{x}_\nu - \mathbf{x}_{\nu-1}) + \mathbf{P}^{-1}(\mathbf{x}_\nu)(\mathbf{P}(\mathbf{x}_{\nu-1}) - \\ & - \mathbf{P}(\mathbf{p}_{\nu-1,1}, \ldots, \mathbf{p}_{\nu-1,n}))(\mathbf{x}_\nu - \mathbf{x}_{\nu-1}) + \\ & + \mathbf{P}^{-1}(\mathbf{x}_\nu)(\mathbf{P}(\mathbf{x}_\nu) - \mathbf{P}(\mathbf{p}_{\nu-1,1}, \ldots, \mathbf{p}_{\nu-1,n}))(\mathbf{x}_\nu - \mathbf{x}_{\nu-1}) + \\ & + \mathbf{P}^{-1}(\mathbf{x}_\nu)(\mathbf{Q}(\mathbf{p}_{\nu-1,1}, \ldots, \mathbf{p}_{\nu-1,n}) - \mathbf{Q}(\mathbf{x}_\nu))(\mathbf{x}_\nu - \mathbf{x}_{\nu-1}) , \end{aligned}$$

kde $\mathbf{p}_{\nu-1,k} = \xi_{\nu-1,k}\mathbf{x}_\nu + (1 - \xi_{\nu-1,k})\mathbf{x}_{\nu-1}$, $0 < \xi_{\nu-1,k} < 1$, $k = 1, \ldots, n$;

b) pro $\nu > \mu \geqq 0$ *platí*

$$(19)\quad \mathbf{x}_{\nu+1} - \mathbf{x}_\nu = \mathbf{A}(\mathbf{x}_\nu) \ldots \mathbf{A}(\mathbf{x}_{\mu+1}) (\mathbf{x}_{\mu+1} - \mathbf{x}_\mu) +$$

$$+ \sum_{i=\mu+1}^{\nu} \mathbf{A}(\mathbf{x}_\nu) \ldots \mathbf{A}(\mathbf{x}_{i+1}) \mathbf{P}^{-1}(\mathbf{x}_i) (\mathbf{P}(\mathbf{x}_{i-1}) - \mathbf{P}(\mathbf{p}_{i-1,1}, \ldots, \mathbf{p}_{i-1,n})) (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_{i-1}) +$$

$$+ \sum_{i=\mu+1}^{\nu} \mathbf{A}(\mathbf{x}_\nu) \ldots \mathbf{A}(\mathbf{x}_{i+1}) \mathbf{P}^{-1}(\mathbf{x}_i) (\mathbf{P}(\mathbf{x}_i) - \mathbf{P}(\mathbf{p}_{i-1,1}, \ldots, \mathbf{p}_{i-1,n})) (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_{i-1}) +$$

$$+ \sum_{i=\mu+1}^{\nu} \mathbf{A}(\mathbf{x}_\nu) \ldots \mathbf{A}(\mathbf{x}_{i+1}) \mathbf{P}^{-1}(\mathbf{x}_i) (\mathbf{Q}(\mathbf{p}_{i-1,1}, \ldots, \mathbf{p}_{i-1,n}) - \mathbf{Q}(\mathbf{x}_i)) (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_{i-1}),$$

kde $\mathbf{p}_{i-1,k} = \xi_{i-1,k}\mathbf{x}_i + (1 - \xi_{i-1,k})\, \mathbf{x}_{i-1}$, $0 < \xi_{i-1,k} < 1$, $k = 1, \ldots, n$.

Důkaz lemmatu 4 plyne ihned z (3), (4), (5) (viz důkaz lemmatu 8 v práci [1]). Z lemat 2, 3, 4 plyne snadno úplnou indukcí tato věta:

Věta 2. *Buď* $\mathbf{x}_0$ *bod a* μ *kladné číslo. Pro každé* $\mathbf{x} \in \mathrm{K}[\mathbf{x}_0, 2\mu] \subset \Omega$ *nechť matice* $\mathbf{P}(\mathbf{x})$, $\mathbf{Q}(\mathbf{x})$ *a* $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ *splňují předpoklady lemmatu* 1. *Buď dále* $\|\mathbf{P}^{-1}(\mathbf{x})\| \leqq p$ *a* $\|\mathbf{P}(\mathbf{x}) - \mathbf{P}(\mathbf{q}_1, \ldots, \mathbf{q}_n)\| \leqq M_1$, $\|\mathbf{Q}(\mathbf{x}) - \mathbf{Q}(\mathbf{q}_1, \ldots, \mathbf{q}_n)\| \leqq M_2$, *kde* $\mathbf{q}_i$ *jsou libovolné body z* $\mathrm{K}[\mathbf{x}_0, 2\mu]$. *Potom existují čísla* λ, K, q, $0 < \lambda \leqq \mu$, $K > 0$, $0 < q < 1$ *tak, že pro libovolné body* $\mathbf{x}_i \in \mathrm{K}[\mathbf{x}_0, 2\lambda]$, $i = 1, \ldots, \nu$, *platí nerovnost* (17). *Platí-li pro přirozené číslo* ν_0 *nerovnost*

$$(20)\qquad Kq^{\nu_0} + p\left(1 + \frac{Kq}{1-q}\right)(2M_1 + M_2) < \tfrac{1}{2}$$

a je-li

$$(21)\qquad d_0 \leqq \min\left(\frac{\lambda}{2(\nu_0 + 1)}, \frac{\lambda}{2(\nu_0 + 1)(Kq + p(2M_1 + M_2))^{\nu_0 - 1}}\right),$$

potom posloupnost $\{\mathbf{x}_\nu\}_{\nu=0}^{\infty}$ *definovaná vztahem* (5) *konverguje k jistému bodu* $\mathbf{a} \in \mathrm{K}[\mathbf{x}_0, 2\lambda]$, *jež je pak jediným řešením soustavy* (1) *v* $\mathrm{K}[\mathbf{x}_0, 2\lambda]$. *Pro chybu platí následující odhady*:

$$(22)\qquad \delta_{k\nu_0} \leqq \left[Kq^{\nu_0} + p\left(1 + \frac{Kq}{1-q}\right)(2M_1 + M_2)\right]\delta_l,$$

kde $\delta_l = \max\limits_{i=(k-1)\nu_0,\ldots,k\nu_0-1} \delta_i$, $k = 1, 2, \ldots$;

$$(23)\qquad \delta_{k\nu_0} \leqq \left[Kq^{\nu_0} + p\left(1 + \frac{Kq}{1-q}\right)(2M_1 + M_2)\right]^k \delta_m,$$

kde $\delta_m = \max\limits_{i=0,\ldots,\nu_0-1} \delta_i$, $k = 1, 2, \ldots$

Důkaz této věty provádět nebudeme, neboť je formálně obdobný důkazu věty 3 v práci [2]. Z věty 2 je vidět, že naše metoda vždy konverguje k řešení, je-li počáteční aproximace dostatečně blízká hledanému řešení $\mathbf{a}$.

Uveďme ještě několik poznámek k praktickému výpočtu. Ze vztahu (5) plyne ihned vztah

$$P(\mathbf{x}_\nu)(\mathbf{x}_{\nu+1} - \mathbf{x}_\nu) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_\nu), \tag{24}$$

což je soustava lineárních rovnic pro složky vektoru $\mathbf{x}_{\nu+1} - \mathbf{x}_\nu$, kterou musíme při každém kroku řešit. Ve větě 2 článku [4] je dokázáno, že je-li matice $-(\mathbf{F}(\mathbf{x}) + \mathbf{F}^*(\mathbf{x}))$ kladně resp. záporně definitní, vždy je možno volit matice $\mathbf{P}(\mathbf{x})$ a $\mathbf{Q}(\mathbf{x})$ tak, že platí rozklad (2) a že jsou splněny předpoklady lemmatu 1 a tedy i věty 1, přičemž matice $\mathbf{P}(\mathbf{x})$ je trojúhelníková a regulární. To velice usnadňuje výpočet postupných aproximací, neboť při každém kroku řešíme jen soustavu lineárních rovnic s trojúhelníkovou maticí.

Při praktickém výpočtu není samozřejmě únosné odhadovat $\|\mathbf{A}(\mathbf{x})\|$, abychom zjistili, zda nastal případ z věty 1 či případ z věty 2. Jestliže však pro dostatečně velké ν (např. $\nu = 10$ či 20) jsou vypočtené podíly $d_{\nu+1}/d_\nu$ přibližně stejné a stále menší než 1, usuzujeme, že nastal případ věty 1 a můžeme pak přibližně položit $P \approx d_{\nu+1}/d_\nu$. Pro chybu pak dostáváme obdobně jako v článku [4] přibližné odhady

$$\delta_\nu \approx \frac{d_{\nu-1} d_\nu}{d_{\nu-1} - d_\nu} \tag{25}$$

nebo

$$\delta_{\nu+1} \approx \frac{d_\nu^2}{d_{\nu-1} - d_\nu}. \tag{26}$$

Nastane-li případ z věty 2, posuzujeme míru nepřesnosti ν-té aproximace z velikosti hodnot $|f_i(\mathbf{x}_\nu)|$.

Také ověřování positivní definitnosti resp. záporné definitnosti matice $-(\mathbf{F}(\mathbf{x}) + \mathbf{F}'(\mathbf{x}))$ je snadné v případě, že tato matice má vesměs kladné nebo vesměs záporné diagonální prvky, jež jsou v absolutní hodnotě větší než součet absolutních hodnot nediagonálních prvků ležících v příslušném řádku (diagonálně dominantní matice). To nastane zhruba řečeno např. v tom případě, kdy diagonální prvky matice $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ jsou vesměs kladné či záporné a prvky $f_{ij}(\mathbf{x}), f_{ji}(\mathbf{x})$ symetricky položené kolem hlavní diagonály mají opačná znaménka a nepříliš různé absolutní hodnoty.

Literatura

[1] *M. Šisler:* O jedné iterační metodě řešení soustav nelineárních rovnic I. Čas. pro pěst. mat., *86*, 1961, 439—461.

[2] *M. Šisler:* O jedné iterační metodě řešení soustav nelineárních rovnic II. Čas. pro pěst. mat., *87*, 1962, 81—93.

[3] *M. Šisler:* O řešení soustav nelineárních rovnic. Čas. pro pěst. mat., *88*, 1963, 414—429.

[4] *M. Šisler:* Příspěvek k iteračním metodám řešení soustav lineárních rovnic s nesymetrickou maticí speciálního typu. Čas. pro pěst. mat., *90*, 1965, 337—343.

Резюме

О РЕШЕНИИ СИСТЕМЫ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С ФУНКЦИОНАЛЬНОЙ МАТРИЦЕЙ СПЕЦИАЛЬНОГО ТИПА

Мирослав Шислер, (Miroslav Šisler), Прага

В статье исследуется один итерационный метод для вычисления действительного решения системы нелинейных трансцендентных уравнений с n неизвестными (1). Последовательность постепенных приближений определяется формулами (3) и (4). Из формул (3) и (4) вытекает непосредственно простая формула (5) и равносильная ей формула (24). В формулах (3), (4), (5), (24) обозначает $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ функциональную матрицу системы (1), $\mathbf{P}(\mathbf{x})$ и $\mathbf{Q}(\mathbf{x})$ матрицы, для которых имеет место тождество $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{Q}(\mathbf{x}) - 2\mathbf{P}(\mathbf{x})$. Пусть в окрестности решения $\mathbf{a}$ выпольнены следующие условия:

1. $\mathbf{F}(\mathbf{x}) + \mathbf{F}'(\mathbf{x})$ – отрицательно или положительно определенная матрица;
2. $\mathbf{Q}(\mathbf{x})$ – положительно или отрицательно определенная матрица;
3. $\mathbf{Q}(\mathbf{x}) - \mathbf{F}(\mathbf{x})$ – неособенная матрица.

Тогда по лемме, доказаной в работе [4], модули всех особенных значений матрицы $\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \mathbf{P}^{-1}(\mathbf{x})(\mathbf{Q}(\mathbf{x}) - \mathbf{P}(\mathbf{x}))$ меньше единицы, и последовательность постепенных приближений, определенная при помощи формулы (5) или (24), сходится к решению $\mathbf{a}$, если только начальное приближение достаточно близко искомому решению. В работе [4] тоже показывается, что в случае, когда выполнено условие 1., можно матрицу $\mathbf{P}(\mathbf{x})$ всегда выбрать так, что она неособенная и треугольная; мы решаем, следовательно, при каждом шаге только систему линейных уравнений (24) с треугольной матрицей. В теореме 1 приводятся условия сходимости нашего метода для случая, когда при выбранной норме в окрестности решения $\mathbf{a}$ имеет место неравенство $\|\mathbf{A}(\mathbf{x})\| < q < 1$. В этом случае для погрешности оценки имеют место (13), (14), (15), (16), где $\delta_\nu = \|\mathbf{x}_\nu - \mathbf{a}\|$, $d_\nu = \|\mathbf{x}_{\nu+1} - \mathbf{x}_\nu\|$. Для практического вычисления имеют значение оценки (25), (26). В теореме 2 исследуется случай, когда модули всех особенных значений матрицы $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ в окрестности решения $\mathbf{a}$ меньше единицы, но при выбранной норме не выпольняется неравенство $\|\mathbf{A}(\mathbf{x})\| < q < 1$. Здесь показывается сходимость метода и оценки погрешности. В противоположность методам, исследованным в работах [1], [2], [3], обладает этот метод преимуществом, что не надо вычислять элементы симметрической матрицы $\mathbf{F}'(\mathbf{x})\,\mathbf{F}(\mathbf{x})$, но работается только с элементами несимметрической функциональной матрицы $\mathbf{F}(\mathbf{x})$.

Zusammenfassung

ÜBER DIE LÖSUNG EINES SYSTEMS NICHTLINEARER GLEICHUNGEN MIT FUNKTIONALMATRIX VOM SPEZIELLEN TYPUS

MIROSLAV ŠISLER, Praha

In der Arbeit wird ein Iterationsverfahren für die Berechnung der reellen Lösung eines Systems nichtlinearer transzendenter Gleichungen mit n Unbekannten (1) beschreiben. Die Folge der schrittweisen Näherungen wird durch die Formeln (3) und (4) definiert. Aus den Formeln (3) und (4) folgt sofort eine einfache Vorschrift (5) und eine äquivalente Vorschrift (24). In den Formeln (3), (4), (5), (24) bezeichnet $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$ die Funktionalmatrix des Systems (1), $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x})$ und $\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{x})$ sind Matrizen, für die die Gleichung $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{Q}(\boldsymbol{x}) - 2\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x})$ gilt. In der Umgebung der Lösung $\boldsymbol{a}$ des Systems (1) seien ferner diese Bedingungen erfüllt:

1. die Matrix $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{F}'(\boldsymbol{x})$ ist eine negativ bzw. positiv definite Matrix;
2. $\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{x})$ ist eine positiv bzw. negativ definite Matrix;
3. $\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$ ist eine nichtsinguläre Matrix.

Dann sind nach dem in der Arbeit [4] bewiesenen Lemma 1 alle Eigenwerte der Matrix $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{P}^{-1}(\boldsymbol{x})\,(\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}))$ im Absolutbetrag kleiner als 1 und die Folge der durch die Formel (5) oder (24) definierten schrittweisen Näherungen konvergiert zur Lösung $\boldsymbol{a}$, sobald die Anfangsapproximation genügend gut ist. In der Arbeit [4] wird auch bewiesen, dass man im Falle, wenn die Bedingung 1. erfüllt ist, die Matrix $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x})$ immer als eine nichtsinguläre Dreiecksmatrix wählen kann; wir lösen also bei jedem Schritt ein System linearer Gleichungen (24) mit einer Dreiecksmatrix $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x})$. Im Satze 1 werden einige Bedingungen für die Konvergenz unseres Verfahrens bewiesen, falls bei der erwählten Norm in der Umgebung der Lösung $\boldsymbol{a}$ die Ungleichung $\|\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})\| \leqq q < 1$ gilt. Es gelten dabei die Fehlerabschätzungen (13), (14), (15), (16), wo $\delta_\nu = \|\boldsymbol{x}_\nu - \boldsymbol{a}\|$, $d_\nu = \|\boldsymbol{x}_{\nu+1} - \boldsymbol{x}_\nu\|$ ist. Vorteilig für die praktische Berechnung sind die Abschätzungen (25), (26).

Im Satze 2 löst man den Fall, wenn alle Eigenwerte der Matrix $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})$ im Absolutbetrag kleiner als 1 sind, wobei aber die Ungleichung $\|\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})\| \leqq q < 1$ in der erwählten Norm nicht gilt. Es wird auch die Konvergenz des Verfahrens und einige Fehlerabschätzungen bewiesen.

Im Vergleich mit den in den Arbeiten [1], [2], [3] eingeführten Methoden hat das hier erwählte Verfahren einen grossen Vorteil: es ist im Falle, wenn die Bedingung 1. erfüllt ist, nicht notwendig die Elemente der symmetrischen Matrix $\boldsymbol{F}'(\boldsymbol{x})\,\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$ zu berechnen, denn man arbeitet unmittelbar mit den Elementen der nichtsymmetrischen Funktionalmatrix $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$.