Augustin Pánek
O jisté řadě nekonečné

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 17 (1888), No. 5, 227–229

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/108799

O jisté řadě nekonečné.

Studujícím napsal **Aug. Pánek.**

Jak povědomo, lze ve mnoha případech určiti součet dvou řad reálných, řadou imaginárnou, oddělíme-li totiž její část reálnou od imaginárné.

Tímto snadným způsobem možno určovati součty některých řad. Tak na př. chceme-li určiti součet *jisté* řady cosinusové, užijeme, abychom stanovili součet řady té, pomocné řady sinusové, aneb naopak, a upravíme další výkony dle rázu řady *dané*, konečně svrchu vyslovenou zásadou dospějeme výsledku hledaného, což objasňuje i příklad tento:

Budiž určen součet řady nekonečné tvaru

$$C = 1 + n\frac{a}{c}\cos\beta + \frac{n(n+1)}{1.2}\frac{a^2}{c^2}\cos 2\beta + \frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3}\frac{a^3}{c^3}\cos 3\beta + \ldots,$$

kde znamená n číslo celistvé a kladné, ostatní pak veličiny řady té pojímejme za elementy, určující trojúhelník, totiž a, c za dvě strany a β za úhel jima sevřený, i pokládejme $a < c$.

Tu upotřebíme řady pomocné

$$S = n\frac{a}{c}\sin\beta + \frac{n(n+1)}{1.2}\frac{a^2}{c^2}\sin 2\beta + \frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3}\frac{a^3}{c^3}\sin 3\beta + \ldots,$$

kterou znásobíce $\sqrt{-1} = i$ a sečtouce obě, se zřetelem ke vzorci

$$\cos\mu x + i\sin\mu x = e^{\mu i x},$$

nabudeme

$$\begin{aligned} C + iS &= 1 + n\frac{a}{c}e^{i\beta} + \frac{n(n+1)}{1.2}\frac{a^2}{c^2}e^{2i\beta} + \ldots \\ &= \left(1 - \frac{a}{c}e^{i\beta}\right)^{-n} \\ &= \left\{1 - \frac{a}{c}(\cos\beta + i\sin\beta)\right\}^{-n} \\ &= c^n(c - a\cos\beta - i.a\sin\beta)^{-n}. \end{aligned}$$

Dle věty průmětové jest $c - a\cos\beta = b\cos\alpha$,
dle věty sinusové $a\sin\beta = b\sin\alpha$,
což vloženo do výrazu v závorkách,

$$C + iS = c^n (b\cos\alpha - ib\sin\alpha)^{-n} = \frac{c^n}{b^n}(\cos\alpha - i\sin\alpha)^{-n},$$

a, užijeme-li dále vzorce Moivre-ova, konečně

$$C + iS = \frac{c^n}{b^n}(\cos n\alpha + i\sin n\alpha),$$

při čemž α určeno jest separovaným vzorcem tangentovým

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a\sin\beta}{c - a\cos\beta}, \quad \text{t. j. } \alpha = \operatorname{arc\,tg}\frac{a\sin\beta}{c - a\cos\beta}.$$

Jest tedy

$$C = \frac{c^n}{b^n}\cos n\alpha \quad \text{a zároveň} \quad S = \frac{c^n}{b^n}\sin n\alpha.$$

Hledíc ku poučce Carnotově $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$ bude řada daná

$$(1) \qquad 1 + n\frac{a}{c}\cos\beta + \frac{n(n+1)}{2!}\frac{a^2}{c^2}\cos 2\beta + \ldots$$
$$= c^n(a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta)^{-\frac{n}{2}}\cos n\alpha,$$

a řada pomocná

$$(2) \qquad n\frac{a}{c}\sin\beta + \frac{n(n+1)}{2!}\frac{a^2}{c^2}\sin 2\beta + \ldots$$
$$= c^n(a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta)^{-\frac{n}{2}}\sin n\alpha.$$

Klademe-li do posledních řad $n = 1$, $c = 1$, obdržíme Cauchym odůvodněné známé součty řad

$$1 + a\cos\beta + a^2\cos 2\beta + \ldots = \frac{1 - a\cos\beta}{1 + a^2 - 2a\cos\beta},$$

$$a\sin\beta + a^2\sin 2\beta + a^3\sin 3\beta + \ldots = \frac{a\sin\beta}{1 + a^2 - 2a\cos\beta},$$

při čemž položeno bylo do součtu řady (1) dle věty průmětové $\frac{1 - a\cos\beta}{b}$ místo $\cos\alpha$, a do součtu řady (2) dle věty sinusové $\frac{a\sin\beta}{b}$ místo $\sin\alpha$, a dále kladeno dle věty Carnotovy

$$b = (1 + a^2 - 2a\cos\beta)^{\frac{1}{2}}.$$

O konturách průmětů ploch stupně druhého.

Napsal

Theodor Monin,

assistent při c. k. české vysoké škole technické v Praze.

V Archivu mathematiky a fysiky (T. II. str. 104.) ustanovil prof. Jeřábek geometrické místo bodů, z nichž se promítá nějaká křivka stupně 2-ho na určitou průmětnu v křivku kruhovou. Tato úloha zavdává původ mnoha jiným, které vztahují se netoliko ku průmětům křivek, ale i ku konturám průmětů ploch stupně 2-ho.

Mysleme si nějakou plochu stupně 2-ho P a rovinu průmětnou R, a položme si za úlohu ustanoviti střed promítání tak, aby kontura průmětu plochy P vyhovovala určitým podmínkám. Tu se ovšem namítá otázka, kolik takových podmínek může býti libovolně zvoleno. Rovina R proniká plochu P v křivce stupně 2-ho Q, která opět proniká křivku konturní vzhledem k některému středu s ve dvou bodech; z toho plyne, že se průmět každé konturní křivky bude dvojnásob dotýkati křivky Q. To platí jak známo za dvě podmínky, takže další tři můžeme libovolně zvoliti.

α) Má-li průmět konturní křivky obsahovati nějaký bod m, náležící průmětně, tu se musí střed promítání nalezati na ploše kuželové M, dotyčné ku P, jejížto střed splývá s bodem m. Aby kontura průmětu obsahovala dva body m, n, musí se střed promítání nalezati na obou plochách kuželových M, N, vrcholy m a n určených, takže jeho geometrickým místem jsou dvě křivky stupně 2-ho U a V, které se navzájem ve dvou bodech pronikají a zároveň dotýkají plochy P. Roviny těchto křivek oddělují m a n harmonicky. Mimo to jest také křivka U geome-