Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

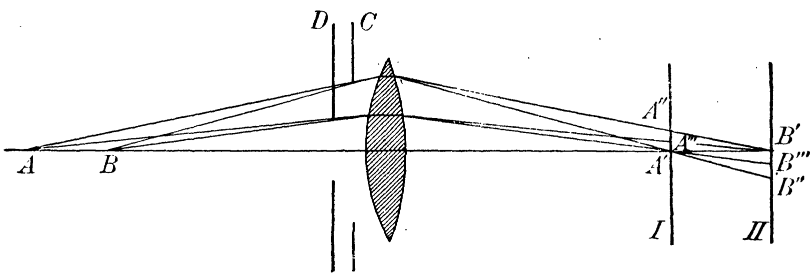
Vladimír Janků

Elementární odvození momentu setrvačnosti některých těles pravidelných

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 30 (1901), No. 1, 51--65

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/108801

ohniskové dálce a velikosti clonky. Ustupuje-li předmět A B po hlavní ose od objektivu, blíží se jeho obrazy A' B' k ohnisku čočky a to bod B' rychleji než A', tak že vzdálenost A'B' se menší, zmíněné vady objektivu — může-li okolnost tato za vadu pokládána býti — ubývá. Při stálé vzdálenosti předmětu od čočky bude patrně vzdálenost A' B' menší při objektivech opticky mohutnějších (kratší ohniskové dálky) než při objektivech



Obr. 10.

s ohniskovou vzdáleností větší. Konečně při téže vzdálenosti předmětu od objektivu a různé clonce zostří se obraz ve hloubce tím spíše, čím bude kužel paprsků čočku opouštějících a k bodům A', resp. B' směřujících *ostřejší* čili čím bude clonka menší. Případ tento názorně demonstruje obr. 10. (Dokončení.)

Elementární odvození momentu setrvačnosti některých těles pravidelných.

Žákům středních škol napsal

Dr. **Vladimír Janků**,
professor v Přerově.

Jak známo, dán jest moment setrvačnosti tvarem

$$M = \Sigma \mu \varrho^2, \tag{1}$$

kdež značí μ hmotu a ϱ příslušnou vzdálenost od osy, vzhledem k níž moment setrvačnosti jest určiti.

Majíce toto na mysli, můžeme přistoupiti k vypočítávání momentů některých pravidelných útvarů.

Jest určiti moment setrvačnosti tyče, jejíž hmota jest m

a délka l, šířka a tloušťka jsou velmi malé proti délce, tak že můžeme tyč považovati vlastně za přímku.

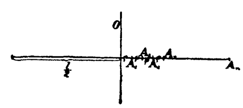
Mysleme si celou tyč rozdělenu na $2n$ dílů velmi malých stejné délky ϱ (obr. 1.); pak jest

$$(2) \qquad l = 2n\varrho.$$

Hmota jednoho dílku budiž μ. Je-li tyč z látky stejnorodé, pak

$$(3) \qquad m = 2n\mu.$$

Určeme nyní moment setrvačnosti vzhledem k ose O, půlícím bodem, tedy těžištěm jdoucí.



Obr. 1.

Moment tento skládá se ze dvou momentů stejných, totiž z momentu levé strany tyče vzhledem k ose O a pravé strany k téže ose O. Třeba tedy vypočísti moment jediný a dvojnásobné jeho jest úhrnným momentem. Moment tyče jest

$$(4) \qquad M = 2[\mu\varrho^2 + \mu(2\varrho)^2 + \mu(3\varrho)^2 + \ldots + \mu(n\varrho)^2],$$

předpokládáme-li, že hmota částiček tyče soustředěna jest v bodech $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$.

Tento vzorec lze psáti ve tvaru

$$(5) \qquad M = 2\mu\varrho^2 (1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2) = 2\mu\varrho^2 S.$$

Součet arithmetické řady 2. stupně, jež ve výraze tomto se naskytá, jest

$$S = \frac{1}{6} n (n + 1)(2n + 1).$$

Jelikož dle předpokladu jest n číslo velmi veliké, tu lze jedničky vynechati a dostaneme

$$S = \frac{1}{6} n \,.\, n \,.\, 2n = \frac{1}{3} n^3,$$

tak že

$$M = 2\mu\varrho^2 \,.\, \frac{1}{3} n^3 = \frac{2}{3} \mu n \,.\, \varrho^2 n^2.$$

Přihlédnouce k vzorcům (2) a (3), dostaneme

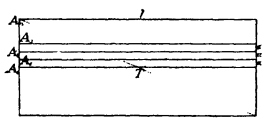
$$(6) \qquad M = \frac{ml^2}{12}.$$

Vzorce (6) použijeme k vypočtení momentu tyče mající podobu rovnoběžnostěnu. Jak známo, platí mezi momentem setrvačnosti M vzhledem k ose těžištěm jdoucí a momentem vzhledem k jiné ose, s prvou rovnoběžné ve vzdálenosti a od těžiště se nacházející, jejž nazveme M', vztah

(7) $$M' = M + ma^2,$$

kdež m značí hmotu onoho tělesa, jehož moment k této druhé ose hledáme.

Najíti jest moment setrvačnosti desky podoby obdélníka, jejíž tloušťka jest nepatrná proti délce l a šířce b. Osa nechť jde těžištěm desky.



Obr. 2.

Rozdělme šířku na $2p$ rovných dílců α (obr. 2.), tak že

(8) $$b = 2p\alpha.$$

Vedeme-li díly takto vzniklými rovnoběžky k délce, tu deska rozpadne se na $2p$ pruhů o hmotě μ. Má-li deska hmotu m, pak

(9) $$m = 2p\mu.$$

Hmotu pruhu mysleme si soustředěnu na jednotlivých přímkách, tak na př. hmota prvého pruhu je na přímce A_1, posledního na přímce A_n.

Moment desky jest roven součtu momentů jednotlivých přímek. Dle vzorce (7) jest moment prvé přímky A_1

$$M_{A_1} = \frac{\mu l^2}{12} + \mu\alpha^2,$$

druhé

$$M_{A_2} = \frac{\mu l^2}{12} + \mu (2\alpha)^2 \text{ atd.}$$

Jelikož jest tu symmetrie vzhledem k přímce A_0, lze počítati moment horní poloviny a dvojnásobné jest moment celé desky,

(10) $$M = 2\left[\frac{\mu l^2}{12} + \mu\alpha^2 + \frac{\mu l^2}{12} + \mu(2\alpha)^2 + \ldots + \frac{\mu l^2}{12} + \mu(p\alpha)^2\right].$$

Tento vzorec lze psáti ve tvaru

$$\begin{aligned} M &= 2\left[p \cdot \frac{\mu l^2}{12} + \mu\alpha^2(1^2 + 2^2 + \ldots + p^2)\right] \\ &= 2\left(p\mu\frac{l^2}{12} + \mu\alpha^2 S\right) \\ &= 2p\mu\frac{l^2}{12} + 2\mu\alpha^2\frac{p^3}{3}. \end{aligned}$$

Dosadíme-li do tohoto posledního tvaru hodnoty za μ a α z (8) a (9), obdržíme konečně

(11) $$M = \frac{m}{12}(l^2 + b^2).$$

Je-li deska podoby čtverce, pak $b = l$ a vzorec (11) nabude tvaru

(12) $$M = \frac{m}{6}l^2.$$

Určiti moment setrvačnosti rovnoběžnostěnu pravoúhlého k ose těžištěm jdoucí a kolmé k některé stěně.

Úlohu tuto převedenou na úlohy předešlé, lze hravě řešiti. Rovnoběžnostěn myslíme si totiž rozdělený na tenké desky řezy kolmými k ose momentu. Desky ty jsou vesměs shodny; je-li hmota jedné μ a počet jejich n, pak hmota rovnoběžnostěnu jest $n\mu$ moment

$$M = n\frac{\mu}{12}(l^2 + b^2) = m\frac{l^2 + b^2}{12}.$$

Vzorec tento jest identický s (11), z čehož vidíme, že moment nezávisí na výšce rovnoběžnostěnu (výška || s osou setrvačnosti), nýbrž jen na hmotě, délce a šířce jeho.

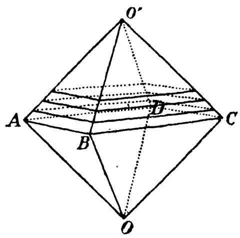
Jest ustanoviti mom. setrvačnosti osmistěnu kol osy, procházející dvěma protějšími rohy OO'.

Rozdělme osmistěn řezy k ose OO' kolmými na $2n$ desk čtvercových o stejné výšce (obr. 3.). Strany desk buďtež a_1, a_2, …, a_n, hmoty příslušné μ_1, μ_2, …, μ_n v jehlanci horním ABCDO'. Podobně tomu jest i v dolním jehlanu ABCDO. Hmota osmistěnu dána vzorcem

(13) $$m = 2(\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \ldots + \mu_n).$$

Moment osmistěnu, jenž roven součtu momentů jednotlivýchdesk čtvercových, určuje vzorec

(14) $$M = 2\left(\frac{\mu_1}{6} a_1^2 + \frac{\mu_2}{6} a_2^2 + \frac{\mu_3}{6} a_3^2 + \ldots + \frac{\mu_n}{6} a_n^2\right).$$



Obr. 3.

Je-li σ specifická váha osmistěnu, pak jest poměr hmot dvou desk

$$\mu_1 : \mu_x = a_1^2 v\sigma : a_x^2 v\sigma,$$

kdež v značí výšku desky. Krátíce, dostaneme

$$\mu_x = \mu_1 \frac{a_x^2}{a_1^2},$$

tedy

$$\mu_2 = \mu_1 \frac{a_2^2}{a_1^2}, \quad \mu_3 = \mu_1 \frac{a_3^2}{a_1^2}, \ldots, \mu_n = \mu_1 \frac{a_n^2}{a_1^2}.$$

Dosadíme-li tyto hodnoty do vzorců (13) a (14), dostaneme

(15) $$m = \frac{2\mu_1}{a_1^2}(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \ldots + a_n^2),$$

(16) $$M = \frac{\mu_1}{3a_1^2}(a_1^4 + a_2^4 + a_3^4 + \ldots + a_n^4).$$

Stěna ABO′, jak z obrazce patrno, rozdělena na podobné trojúhelníky:

$$\triangle A_1B_1O' \sim \triangle A_2B_2O' \sim \triangle A_3B_3O' \sim \ldots \sim \triangle A_nB_nO'.$$

Jelikož $A_1A_2 = A_2A_3 = \cdots = A_{n-1}A_n = A_nO'$, lze psáti $A_1O' = nA_1A_2$, $A_2O' = (n-1)A_1A_2, \ldots, A_nO' = 1 \, . \, A_1A_2$; použijeme-li podobnosti trojúhelníků, dostaneme

$$a_1 : a_2 : a_3 : \cdots : a_n = n : (n-1) : (n-2) : \cdots : 1,$$

z čehož

$$a_2 = \frac{a_1}{n} \cdot (n-1),\ a_3 = \frac{a_1}{n}(n-2), \ldots, a_n = \frac{a_1}{n} \cdot 1.$$

Tyto hodnoty dosadíme do vzorců (15) a (16), tedy

$$m = \frac{2\mu_1}{n^2}(n^2 + \overline{n-1}^2 + \overline{n-2}^2 + \cdots + 2^2 + 1^2)$$

$$= \frac{2\mu_1}{n^2} \cdot \frac{n^3}{3} = \frac{2\mu_1 n}{3},$$

z čehož

$$(17) \qquad \mu_1 = \frac{3m}{2n}.$$

Podobně vzorec (16) změní se po náležité úpravě v tento

$$(18) \quad \mathrm{M} = \frac{\mu_1 a_1^2}{3n^4}[n^4 + (n-1)^4 + \ldots + 3^4 + 2^4 + 1^4] = \frac{\mu_1 a_1^2}{3n^4}\,\mathrm{S}'.$$

Součet řady

$$\mathrm{S}' = \frac{1}{30} n (n+1)(2n+1)(3n^2 + 3n - 1);$$

zde opět můžeme jedničky vynechati a obdržíme

$$\mathrm{S}' = \frac{1}{30} n \,.\, n \,.\, 2n \,.\, 3n(n+1),$$

kdež opět jest jednička malou veličinou proti velmi velikému n, lze ji tudíž vynechati, tak že

$$\mathrm{S}' = \frac{n^5}{5}.$$

Tuto hodnotu do vzorce (18) dosadíce, obdržíme

$$(19) \qquad \mathrm{M} = \frac{\mu_1 a_1^2 n}{15}.$$

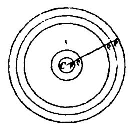
Dosadíme-li hodnotu μ_1 ze vzorce (17) a je-li $a_1 = a$ (strana osmistěnu), pak jest konečný vzorec pro moment osmistěnu

$$(20) \qquad \mathrm{M} = \frac{ma^2}{10}.$$

V tomto vzorci není obsažena výška osmistěnu. Považujeme-li tedy osmistěn za dvojjehlan, můžeme výšku jeho libovolně zvětšiti nebo zmenšiti, při čemž moment zůstává týž; ovšem nesmí se změniti strana podstavy čtvercové a pak hmota dvojjehlanu (váha jeho).

Jest ustanoviti moment setrvačnosti desky kruhové k ose jdoucí středem a kolmé k desce.

Obrazec 4. značiž kruhovou desku o poloměru r. Osa jest k nákresně kolmá a jde středem C.



Obr. 4.

Poloměr rozdělíme na n stejných, velmi malých dílů, tak že

(21) $$r = n\varrho.$$

Dělícími body veďme soustředné kruhy o středu C. Tím rozdělí se deska na samá mezikruží a malý kruh uprostřed. Je-li σ specifická váha desky, pak jest hmota středního kruhu

$$\mu_1 = \pi\varrho^2\sigma;$$

hmota prvého mezikruží jest

$$\mu_2 = \pi\,(2\varrho)^2\sigma - \pi\varrho^2\sigma = 3\pi\varrho^2\sigma = 3\mu_1,$$

hmota druhého mezikruží

$$\mu_3 = \pi\,(3\varrho)^2\sigma - \pi\,(2\varrho)^2\,\sigma = 5\mu_1$$

a konečně

$$\mu_n = (2n - 1)\,\mu,$$

při čemž hmota desky

$$m = \mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_n = \mu_1\,(1 + 3 + \ldots + \overline{2n - 1}),$$

t. j.

(22) $$m = n^2\mu_1.$$

Mysleme si, že hmota jednotlivých mezikruží nachází se rozložena jen na vnější kružnici jejich, pak bude moment celé desky rovnati se součtu momentů jednotlivých mezikruží.

(23) $\quad M = \mu_1 \varrho^2 + \mu_2 (2\varrho)^2 + \mu_3 (3\varrho)^2 + \ldots + \mu_n (n\varrho)^2.$

Vzorec (23) lze psáti též ve tvaru

(24) $$M = \mu_1\varrho^2 + 3\mu_1 . 2^2 . \varrho^2 + 5\mu_1 . 3^2 . \varrho^2 + \ldots + \overline{2n-1}\,\mu_1 . n^2\varrho^2$$
$$= \mu_1\varrho^2 [1 + 3 . 2^2 + 5 . 3^2 + \ldots + (2n-1)\, n^2] = \mu_1\varrho^2 S''.$$

Součet řady

$$S'' = \frac{n}{6}(n+1)(3n^2+n-1);$$

je-li n velmi veliké, lze opět 1 vynechati proti n a obdržíme

$$S'' = \frac{n}{6} . n . n (3n+1),$$

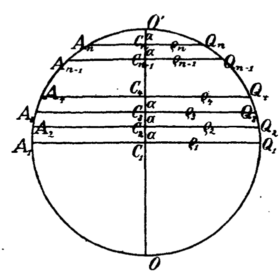
vynecháme-li i zde 1, dostaneme

$$S'' = \frac{n^4}{2}.$$

Dosadíme-li hodnoty za S'' a μ_1 ze vzorce (22) do (24), dostaneme konečně moment desky kruhové

(25) $$M = m\frac{r^2}{2}.$$

Moment setrvačnosti koule vzhledem k ose jdoucí středem.



Obr. 5.

Poloměr koule $C_1O' = r$ rozdělme na n stejných dílů α (obr. 5.), tak že

(26) $$r = n\alpha.$$

Dělícími body veďme kolmé řezy k tomuto poloměru, čímž polokoule rozdělí se na n vrstev podoby desk kruhových. Je-li hmota jednotlivých vrstev $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$, tu jest hmota polokoule rovna součtu těchto hmot a hmota celé koule

$$m = 2(\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \ldots + \mu_n). \tag{27}$$

Je-li specifická váha σ, pak poměr hmot dvou vrstev jest

$$\mu_1 : \mu_x = \pi\varrho_1^2\alpha\sigma : \pi\varrho_x^2\alpha\sigma,$$

$$\mu_x = \mu_1 \frac{\varrho_x^2}{\varrho_1^2},$$

tedy

$$\mu_2 = \mu_1 \frac{\varrho_2^2}{\varrho_1^2}, \quad \mu_3 = \mu_1 \frac{\varrho_3^2}{\varrho_1^2}, \quad \ldots, \quad \mu_n = \mu_1 \frac{\varrho_n^2}{\varrho_1^2}.$$

Dosadíme-li tyto hodnoty do vzorce (27), obdržíme

$$m = 2 \cdot \frac{\mu_1}{\varrho_1^2} (\varrho_1^2 + \varrho_2^2 + \ldots + \varrho_n^2). \tag{28}$$

Z trojúhelníků $C_1C_2Q_2$, $C_1C_3Q_3$, ..., $C_1C_nQ_n$ najdeme, uváživše, že n jest velmi veliké,

$$\begin{aligned} \varrho_1^2 &= r^2 \\ \varrho_2^2 &= r^2 - \alpha^2 \\ \varrho_3^2 &= r^2 - (2\alpha)^2 \\ &\vdots \\ \varrho_n^2 &= r^2 - (\overline{n-1}\,\alpha)^2, \end{aligned} \tag{29}$$

a sečteme-li obě strany,

$$\varrho_1^2 + \varrho_2^2 + \ldots + \varrho_n^2 = nr^2 - \alpha^2 (1^2 + 2^2 + \ldots + \overline{n-1}^2)$$

$$= nr^2 - \frac{\alpha^2 n^3}{3}.$$

Přihlédnouce k (26) dostaneme

$$= \varrho_1^2 + \varrho_2^2 + \ldots + \varrho_n^2 = \frac{2nr^2}{3}, \tag{30}$$

kteroužto hodnotu do vzorce (28) dosadíme, čímž

$$(31)\qquad m = 2\,\frac{\mu_1}{\varrho_1^2}\cdot\frac{2nr^2}{3} = 2\,\frac{\mu_1}{r^2}\cdot\frac{2nr^2}{3} = \frac{4\mu_1 n}{3}.$$

Moment polokoule roven jest součtu momentů všech desk a moment celé koule dle (25)

$$M = 2\,(\mu_1\,\frac{\varrho_1^2}{2} + \mu_2\frac{\varrho_2^2}{2} + \ldots + \mu_n\,\frac{\varrho_n^2}{2}).$$

Dosaďme hodnoty za $\mu_2,\ \mu_3,\ \ldots,\ \mu_n$, i obdržíme

$$(32)\qquad M = \mu_1\varrho_1^2 + \mu_1\,\frac{\varrho_2^2}{\varrho_1^2}\cdot\varrho_2^2 + \ldots + \mu_n\,\frac{\varrho_n^2}{\varrho_1^2}\cdot\varrho_n^2$$

$$= \frac{\mu_1}{\varrho_1^2}\,(\varrho_1^4 + \varrho_2^4 + \varrho_3^4 + \ldots + \varrho_n^4).$$

Umocníme-li jednotlivé z rovnic (29) dvěma, obdržíme

$$\begin{aligned}
\varrho_1^4 &= r^4\\
\varrho_2^4 &= r^4 - 2r^2\alpha^2 + \alpha^4\\
\varrho_3^4 &= r^4 - 2r^2\,(2\alpha)^2 + (2\alpha)^4\\
&\vdots\\
\varrho_n^4 &= r^4 - 2r^2\,(\overline{n-1}\,.\,\alpha)^2 + (\overline{n-1}\,.\,\alpha)^4,
\end{aligned}$$

načež sečtěním

$$\varrho_1^4 + \varrho_2^4 + \ldots + \varrho_n^4 = nr^4 - 2r^2\alpha^2\,(1^2 + 2^2 + \ldots + \overline{n-1}^2)$$
$$+\ \alpha^4\,(1^4 + 2^4 + \ldots + \overline{n-1}^4).$$

Dosadíme-li známé již součty řad S a S′, dostaneme, jelikož n jest velmi veliké,

$$\varrho_1^4 + \varrho_2^4 + \ldots + \varrho_n^4 = nr^4 - 2\alpha^2 r^2\,\frac{n^3}{3} + \alpha^4\,\frac{n^5}{5}.$$

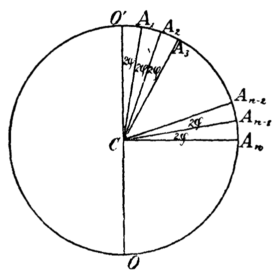
Rovnice tato změní se pomocí (26)

$$(33)\qquad \varrho_1^4 + \ldots + \varrho_n^4 = nr^4 - \frac{2}{3}\,nr^4 + \frac{1}{5}\,nr^4 = \frac{8}{15}\,nr^4.$$

Dosadíme-li konečně do vzorce (32) hodnoty z (31) a (33), nabudeme moment koule

$$M = \frac{2}{5} mr^2. \tag{34}$$

Najíti moment kruhové desky k ose, jež jest totožna s průměrem.



Obr. 6.

Rozdělme čtvrtkruh $O'CA_n$ na n velmi malých trojúhelníků vespolek stejných se společným vrcholem v C (obr. 6.). Hmota trojúhelníka budiž μ, takže hmota celé desky jest

$$m = 4n\mu. \tag{35}$$

Hmotu trojúhelníků mysleme si soustředěnu na symmetrále vrcholového úhlu 2φ.

Jelikož

$$2n\varphi = \frac{\pi}{2},$$

tedy

$$\varphi = \frac{1}{2n} \cdot \frac{\pi}{2}. \tag{36}$$

Moment prvého trojúhelníka $O'CA_1$ najdeme, rozdělíce jej na p dílů kružnicemi o středu C stejně od sebe vzdálenými (obr. 7.); jest tudíž

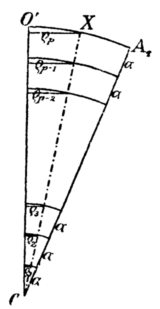
$$r = p\alpha.$$

Hmoty dílců takto vzniklých jsou v poměru

$$\nu_1 : \nu_2 : \nu_3 : \cdots : \nu_p = 1 : 3 : 5 : \cdots : (2p - 1).$$

Značí-li CX symmetrálu úhlu 2φ, pak jest moment trojúhelníka

$$\begin{aligned} M_1 &= \nu_1 \varrho_1^2 + 3\nu_1 (2\varrho_1)^2 + 5\nu_1 (3\varrho_1)^2 + \ldots + (2p - 1)(p\varrho_1)^2 \\ &= \nu_1 \varrho_1^2 [1 + 3 \,.\, 2^2 + 5 \,.\, 3^2 + \ldots + (2p - 1)\, p^2] \\ &= \nu_1 \varrho_1^2 \frac{p^4}{2} \,. \end{aligned}$$ [Viz vzorce (24), (25)].



Obr. 7.

Z obrazce ale patrno, že $\varrho_1 = \alpha \sin \varphi$, tedy

$$M_1 = \nu_1 \alpha^2 \frac{p^4}{2} \sin^2\varphi \,.$$

Jelikož

$$\nu_1 + 3\nu_1 + 5\nu_1 + \ldots + (2p - 1)\, \nu_1 = \mu = \nu_1 p^2,$$

tu poslední výraz pro M_1 nabude tvaru

$$M_1 = \frac{\mu}{2}\, r^2 \sin^2 \varphi.$$

Zcela obdobně najdeme moment druhého trojúhelníka

$$M_2 = \frac{\mu}{2} r^2 \sin^2 3\varphi$$
$$\vdots$$
$$M_n = \frac{\mu}{2} r^2 \sin^2 (2n - 1)\, \varphi.$$

Sečteme-li momenty všech trojúhelníků, dostaneme moment čtvrtiny desky a násobíce čtyřmi dostaneme celý moment

$$(37)\quad M = 4 \frac{\mu}{2} r^2 [\sin^2 \varphi + \sin^2 3\varphi + \sin^2 5\varphi + \ldots + \sin^2 (2n-1)\, \varphi]$$
$$= 4 \frac{\mu}{2} r^2 \,.\, S'''.$$

Součet řady S''' dá se snadno nalézti. Dosadíme-li za φ hodnotu z (36), nabude řada tvaru

$$S''' = \sin^2 \frac{1}{2n} \frac{\pi}{2} + \sin^2 \frac{1}{2n} \frac{3\pi}{2} + \ldots + \sin^2 \frac{1}{2n} (2n-3) \frac{\pi}{2}$$
$$+ \sin^2 \frac{1}{2n} (2n-1) \frac{\pi}{2}$$
$$= \sin^2 \frac{\pi}{4n} + \sin^2 \frac{3\pi}{4n} + \ldots + \sin^2 \left(\frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{4n}\right) + \sin^2 \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4n}\right)$$
$$= \sin^2 \frac{\pi}{4n} + \sin^2 \frac{3\pi}{4n} + \ldots + \cos^2 \frac{3\pi}{4n} + \cos^2 \frac{\pi}{4n}.$$

Sečteme-li člen prvý s posledním, druhý s předposledním atd., dostaneme vždy 1, jelikož členů jest n, tedy bude součet řady $\frac{n}{2}$; dosadíce tuto hodnotu do vzorce (37), dostaneme

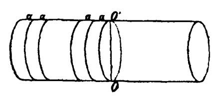
$$M = \frac{4\mu}{2} \frac{n}{2} r^2$$

a dle (35) konečně

$$M = \frac{1}{4} m r^2. \tag{38}$$

Pomocí tototo vzorce snadno najdeme moment setrvačnosti tyče válcové, jejíž průřezem jest kruh.

Najíti moment setrvačnosti tyče válcové k ose těžištěm jdoucí a kolmé k jeho výšce. Rozdělme válec (obr. 8.) řezy k základně rovnoběžnými na $2n$ stejných malých desk kruhových.



Obr. 8.

Hmota desky budiž μ a výška její α. Je-li hmota válce m a délka jeho l, pak

$$\begin{aligned} m &= 2n\mu \\ l &= 2n\alpha. \end{aligned} \tag{39}$$

Dle vzorce (7) jsou momenty jednotlivých desk na levé straně

$$M_1 = \frac{\mu r^2}{4} + \mu\alpha^2,\ M_2 = \frac{\mu r^2}{4} + \mu(2\alpha)^2, \ldots,\ M_n = \frac{\mu r^2}{4} + \mu(n\alpha)^2,$$

podobně na straně pravé.

Zde opět mysleme si hmotu desky soustředěnu na základně její. Moment celé tyče jest tedy

$$\begin{aligned} M &= 2\left[\frac{\mu r^2}{4} + \mu\alpha^2 + \frac{\mu r^2}{4} + \mu(2\alpha)^2 + \ldots + \frac{\mu r^2}{4} + \mu(n\alpha)^2\right] \\ &= 2\left[n\frac{\mu r^2}{4} + \mu\alpha^2(1 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2)\right] \\ &= 2\left[n\frac{\mu r^2}{4} + \mu\alpha^2\frac{n^3}{3}\right] = 2n\mu\frac{r^2}{4} + 2n\mu\frac{\alpha^2 n^2}{3}. \end{aligned}$$

Přihlédnouce k (39) dostaneme konečně

$$M = m\frac{r^2}{4} + m\frac{l^2}{12} = \frac{m}{12}(3r^2 + l^2). \qquad (40)$$

O kulovém blesku.

Napsal

Dr. Vlad. Novák,
docent c. k. české university v Praze.

Mnohé zjevy přírodní dějí se kolem, aniž by upoutávaly pozornost lidí, buď oddaných svému zaměstnání, nebo ve chvíli prázdné těšících se klidu a odpočinku nerušenému. Vedle takových zjevů vyskytují se však mohutná, uchvacující divadla v přírodě, v nichž energie sil přírodních vystupuje velikolepě, zastrašujíc neb alespoň udivujíc méně vzdělané a pobádajíc k pozorování a zkoumání vzdělance. K těmto zjevům náleží mnohé děje atmosferické, z nichž nejpůsobivějším jest bouře provázená blesky a hromy.

V následujícím chci se zmíniti o zvláštním druhu blesku, který svým tvarem, barvou a celým průběhem svým tak nápadně se liší od blesků obyčejných, že dlouho existence jeho byla vůbec popírána.

Čtenář vzpomene sobě na některou bouři, již sám zažil a kterou mohl klidně z bezpečného úkrytu pozorovati. Oblohu zataženou tmavými mraky občas rozbrázdily ostré, hrbolaté čáry pronikavého světla, jimž následoval rozmanitý zvuk hromu. Nebo se osvětlovaly celé velké plochy na obloze, jako by září blízkých požárů. Tyto tvary blesku nejčastěji se vyskytující, slují *blesky jiskrovými a plošnými.* Podobny jsou pak blesky jiskrové výboji elektrickému, který nastane mezi elektrodami influenční elektriky, nebo přístroje Ruhmkorffova, když připojíme k elektrodám kondensatory a když jiskra vrstvou vzduchovou přeskakuje. Takováto jiskra má podobu svítící, klikaté