Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

Řešení úloh

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 62 (1933), No. 7, R125--R140

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/108815

Tak mnohé hory na dně mořském dosahují výšky 5000 m, dokonce v Jižním oceánu až 8500 m. (Vyňato z časopisu »Vynálezy a pokroky«.)

ŘEŠENÍ ÚLOH.

(Texty úloh zde řešených jsou otištěny v 1. čísle Rozhledů matem.-přírodovědeckých letošního ročníku.)

Z matematiky.

1. úl. Řešil p. *Jan Kazimour*, VII. r. v Písku.

Budiž V průsečík přímek m, n, $\overline{VX}$ osa úhlu (m, n), dále $\overline{AA_1}$ kolmice z bodu A spuštěná na $\overline{VX}$. Sestrojme $\overline{VZ}$ tak, aby $\measuredangle A_1VZ = 45^0$. Přímka $\overline{VZ}$ je afinní s přímkou m. Je-li P průsečík přímek m, $\overline{AA_1}$, dále Q průsečík přímek $\overline{VZ}$, $\overline{AA_1}$, pak jest $\overline{A_1P} : \overline{A_1Q} = b : a$. Sestrojme na přímce $\overline{AA_1}$ bod C tak, aby $\overline{A_1A} : \overline{A_1C} = \overline{A_1P} : \overline{A_1Q}$. Pak je C bodem afinním k bodu A. Osa úsečky $\overline{VC}$ protne $\overline{VX}$ ve středu elipsy, t. j. ve středu kosočtverce žádaného. Tím je úloha řešena.

2. úl. Řešil p. *V. Münz*, VII. rg. v Prostějově.

Ježto můžeme psáti $4 = \frac{4}{9}(10 - 1)$, $44 = \frac{4}{9}(100 - 1)$, atd., bude součet n členů $s_n = \frac{4}{9}(10 + 10^2 + 10^3 + \ldots + 10^n) - \frac{4}{9}n$. Tedy:

$$s_n = \tfrac{4}{9}\left[\tfrac{10}{9}(10^n - 1) - n\right].$$

3. úl. Riešil p. *Arnošt Knöpflmacher*, VII. rg. Trenčín.

Jeden dotykový bod elipsy (ktorá má tvar stredový) s parabolou dostaneme riešením ich rovníc, pri čom diskriminant musí byť rovný nule. Tým dostávame vzťah

$$b^2p^2 - a^2(p^2 - a^2) = 0.$$

Píšme $b/a = u$. Dľa toho bude

$$a^2 = p^2(1 - u).$$

Plocha hľadanej elipsy je

$$P = \pi ab = \pi a^2 u = \pi \, . \, p^2(1 - u^2) \, . \, u = \pi p^2(u - u^3).$$

$$\frac{dP}{dp} = P' = \pi p^2(1 - 3u^2).$$

Pre P_{max} musí platiť $1 - 3u^2 = 0$ čiže

$$u = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}, \quad a = \frac{1}{3}p\sqrt{6}, \quad b = \frac{1}{3}p\sqrt{2}.$$

Hľadaná elipsa má rovnicu

$$3x^2 + 9y^2 = 2p^2$$

a jej plocha $$P_{max} = \frac{2}{9}\pi p^2\sqrt{3}.$$

4. úl. Řešil p. *Martin Baumann*, VII. tř. rg. v Domažlicích.

Křivost paraboly $x^2 = 2ky$ v bodě $M(x, y)$ je:

$$\frac{1}{R} = \frac{y''}{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{k^2}{(x^2 + k^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\cos^3 \varphi}{k}, \text{ při tom}$$

$$y' = \frac{x}{k} = \operatorname{tg} \varphi; \quad y'' = \frac{1}{k}.$$

Vzdál. ohniska $F\left(0, \frac{k}{2}\right)$ od tečny v bodě M je $d_1 = \frac{1}{2}\sqrt{x^2 + k^2} = = \frac{k}{2 \cos \varphi}$; vzdál. od normály je:

$$d_2 = \frac{x}{2k}\sqrt{x^2 + k^2} = \frac{k}{2}\frac{\sin \varphi}{\cos^2 \varphi}.$$

Volíme-li za počátek bod M a za osu ξ tečnu, pak pro ohnisko $F(\xi, \eta)$ platí:

$$\xi = \frac{k}{2}\frac{\sin \varphi}{\cos^2 \varphi}, \quad \eta = \frac{k}{2}\frac{1}{\cos \varphi}, \quad \frac{k}{\cos^3 \varphi} = p.$$

Vyloučíme k a φ

$$\xi^2 + \eta^2 = \frac{p\eta}{2}.$$

Ohniska parabol leží na kružnici dotýkající se osy X a jdoucí ohniskem dané paraboly.

5. úl. Riešil p. *Arnošt Knöpflmacher*, VII. rg. Trenčín.

Vrcholy dvojstredového štvoruholníka označme A, B, C, D; stred kružnice vpísanej nech je S, opísanej S', $\overline{SS'} = m$. Veďme priamku $\overline{AS}$, ktorá rozpoľuje oblúk $\widehat{BD}$ v bode E, podobne priamka $\overline{CS}$ rozpoľuje protiležiaci oblúk $\widehat{BD}$ v bode F. $\overline{EF}$ je potom priemerom kružnice opísanej. Priamka $\overline{SS'}$ preutne opísanú kružnicu v bodoch G, H. Keď je $\sphericalangle BAD = \alpha$, bude $\sphericalangle BAE = \sphericalangle DAE = \frac{1}{2}\alpha$. Potom platí $\overline{AS} . \sin \frac{1}{2}\alpha = \varrho$, $\overline{CS} \cos \frac{1}{2}\alpha = \varrho$. Z toho $\overline{AS} \sin \frac{1}{2}\alpha = \overline{CS} \cos \frac{1}{2}\alpha$. Pretože platí $\overline{AS} : \overline{CS} = \overline{FS} : \overline{ES}$, je tiež $\overline{FS} \sin \frac{1}{2}\alpha = \overline{ES} \cos \frac{1}{2}\alpha$.

Teraz uvažujme trojuholníky ES_1S a FS_1S, kde $\overline{ES_1} = \overline{FS_1} = r$, $\overline{SS_1} = m$ a $\sphericalangle ES_1S = \sphericalangle (2R - FS_1S) = \varphi$. Dľa vety Carnotovej platí:

$$\overline{ES}^2 = m^2 + r^2 - 2mr \cos \varphi,$$
$$\overline{FS}^2 = m^2 + r^2 + 2mr \cos \varphi.$$

Sčítaním obidvoch rovníc dostaneme $\overline{ES}^2 + \overline{FS}^2 = 2(m^2 + r^2)$. Dosadením za $\overline{FS}$ z rovnice $\overline{FS} \sin \frac{1}{2}\alpha = \overline{ES} \cos \frac{1}{2}\alpha$, dostaneme po upravení

$$\overline{ES}^2 = 2(m^2 + r^2)\sin^2 \tfrac{1}{2}\alpha.$$

Platí $\overline{AS} . \overline{ES} = \overline{GS} . \overline{HS}$. Umocníme celú rovnicu na druhú a dosadíme: $\overline{AS} = \frac{\varrho}{\sin \frac{1}{2}\alpha}$, $\overline{ES}^2 = 2(m^2 + r^2)\sin^2 \frac{1}{2}\alpha$, $\overline{GS} = r - m$, $\overline{HS} = r + m$.

Tým dostaneme $$2\varrho^2 (r^2 + m^2) = (r^2 - m^2)^2.$$

6. úl. Řešil p. *Jan Navrátil*, VII. rg. v Litovli.

V trojúhelníku, který vznikne mezi průvodiči a osou platí:

$$\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = \sqrt{\frac{(s - b_1)(s - c_1)}{s(s - a_1)}},$$

$$\operatorname{tg}\frac{\psi}{2} = \sqrt{\frac{(s - c_1)(s - a_1)}{s(s - b)_1}},$$

kde
$$s = \frac{a_1 + b_1 + c_1}{2} \quad \text{a} \quad c_1 = 2e.$$

Je dále:
$$s = \frac{a_1 + b_1 + 2e}{2} = \frac{2a + 2e}{2} = a + e.$$

Znásobením obou hořejších vztahů dostaneme:
$$\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\operatorname{tg}\frac{\psi}{2} = \frac{s - c_1}{s} = \frac{a - e}{a + e}$$

a z toho hledaný vztah:
$$\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\operatorname{tg}\frac{\psi}{2} = \frac{1 - \frac{e}{a}}{1 + \frac{e}{a}} = \frac{1 - \varepsilon}{1 + \varepsilon}.$$

7. úl. Riešil p. *Anton Huťa*, VII. Masarykovo rg., Bratislava.

Znásobením kongruencii

$p - 1 \equiv -1 \pmod p$, $p - 2 \equiv -2 \pmod p$, . . ., $p - k + 1 \equiv k - 1 \pmod p$,

máme kongruenciu
$$(-1)^{k-1}.(k-1)! \equiv (p-1).(p-2).(p-3)\ldots(p-k+1) \pmod p.$$

Znásobíme-li túto kongruenciu so samozrejmou kongruenciou
$$(p-k)! \equiv (p-k)! \pmod p,$$

dostaneme
$$(-1)^{k-1}(k-1)!\,(p-k)! \equiv (p-1)! \pmod p.$$

Podľa vety Wilsonovej je
$$(p-1)! \equiv -1 \pmod p;$$

dosadime-li do pôvodnej kongruencie, dostaneme
$$(-1)^{k-1}(k-1)!\,(p-k)! \equiv -1 \pmod p \quad \text{čiže}$$
$$1 + (-1)^{k-1}(k-1)!\,(p-k)! \equiv 0 \pmod p.$$

8. úl. Řešil p. *Jan Navrátil*, VII. rg. v Litovli.

V čtyřúhel. dvojstředovém splývá průsečík úhlopříček s průsečíkem spojnic dotyčných bodů na protilehlých stranách. Proto podle věty Pythagorovy plyne:

$d_1^2 + x^2 = (2\varrho)^2$, $d_2^2 + y^2 = (2\varrho)^2$, kde $x = 2u \sin\omega$ a $y = 2u \cos\omega$.

Po dosazení a sečtení máme:
$$d_1^2 + d_2^2 + 4u^2 = 8\varrho^2, \text{ čili:}$$
$$\frac{d_1^2 + d_2^2}{4} = 2\varrho^2 - u^2.$$

Odečtením a po úpravě plyne druhý vztah:
$$\frac{d_1^2 - d_2^2}{4} = u^2 \cos 2\omega.$$

9. úl. Řešil p. *Jaroslav Vaněk*, VIII. rrg., Sušice.

Body P (paty kolmic z ohniska k tečnám) leží na kružnici o středu S (střed kuželosečky) a poloměru a. Nejmenší možná kružnice, která protíná obě tečny, je kružnice dotýkající se tečny vzdálenější. Dotykový bod je vrcholem hledané kuželosečky.

Ohniska dostaneme, vztyčíme-li kolmice v průsečících kružnice s druhou tečnou. Padnou-li ohniska dovnitř vrcholů, dostaneme elipsu, padnou-li vně, vznikne hyperbola. Splynou-li ohniska s vrcholy, dostaneme elipsu, jejíž $b = 0$. Leží-li bod na ose úhlu daných tečen, elipsa přejde v kružnici.

10. úl. Řešil p. *Leo Kalvoda*, VIII. rg. v Litovli.

Buďte $\varrho_a, \varrho_b, \varrho_c$ poloměry kružnic připsaných, ϱ poloměr kružnice vepsané, r opsané. Rovnice 3. stupně vyžaduje

$$x_1 + x_2 + x_3 = -m, \quad x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = n, \quad x_1x_2x_3 = -p.$$

Je-li pak $\varrho_a = x_1$, $\varrho_b = x_2$, $\varrho_c = x_3$ a platí-li

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{1}{\varrho_a} + \frac{1}{\varrho_b} + \frac{1}{\varrho_c}, \quad 4r = \varrho_a + \varrho_b + \varrho_c - \varrho,$$

pak

$$\varrho = \frac{\varrho_b\varrho_c + \varrho_a\varrho_c + \varrho_a\varrho_b}{\varrho_a\varrho_b\varrho_c} = -\frac{n}{p} \quad \text{a} \quad r = \frac{\varrho_a + \varrho_b + \varrho_c - \varrho}{4} = \frac{n - mp}{4p}.$$

11. úl. Řešil p. *Jakub Gabovič-Gaboj*, VIII. rrg., N. Bohumín.

Kořeny rovnice musí míti tvar $\pm u$, $\pm v$ tak, že na př. v pořádku $-v$, $-u$, u, v tvoří arit. řadu s diferencí d. Jest pak $-u + d = u$, $u + d = v$ a odtud: $u = \frac{1}{2}d$, $v = \frac{3}{2}d$. Součin všech kořenů $u^2v^2 = \lambda^2$ čili $\frac{3}{4}d^2 = \lambda$.

Součet dvojnásobných součinů je $-u^2 - v^2 = -(3\lambda + 2)$ čili $\frac{10}{4}d^2 = 3\lambda + 2$.

Eliminací d^2 jde $\lambda = 6$, takže rovnice $x^4 - 20x^2 + 36 = 0$ má kořeny $-3\sqrt{2}$, $-\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$, $3\sqrt{2}$.

12. úl. Řešil p. *Jan Kazimour*, VII. r. v Písku.

Zavěsíme-li klenec ve vrcholu, v němž se stýkají tři ostré úhly hranové, z nichž každý jest α, svírá každá ze tří hran, v tom vrcholu se sbíhajících, s nití úhel φ, od každé stěny pak má nit odchylku ψ.

Z rovnostranného sférického trojúhelníku, jehož strany jsou α, plyne:

$$\sin\varphi = \frac{2\sin\frac{1}{2}\alpha}{\sqrt{3}}, \tag{1}$$

$$\sin\psi = \frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha}{\sqrt{3}}. \tag{2}$$

K určení úhlu α pak máme rovnice

$$6a^2\sin\alpha = 144, \tag{3}$$

$$a^2v\sin\alpha = 18\sqrt{39}, \tag{4}$$

kde a je hrana klence, v jeho výška:

$$v = \sin\omega;$$

ω pak vyplývá ze sférického trojúhelníka rovnostranného o stranách α, v němž je sférickou výškou

$$\cos\omega = \frac{\cos\alpha}{\cos\frac{1}{2}\alpha} = 2\cos\tfrac{1}{2}\alpha - \frac{1}{\cos\frac{1}{2}\alpha},$$

$$\sin\omega = \sqrt{1 - 4\cos^2\tfrac{1}{2}\alpha + 4 - \frac{1}{\cos^2\frac{1}{2}\alpha}} = \sin\tfrac{1}{2}\alpha\sqrt{3 - \operatorname{tg}^2\tfrac{1}{2}\alpha}.$$

Je tedy
$$v = a\sin\tfrac{1}{2}\alpha\sqrt{3 - \operatorname{tg}^2\tfrac{1}{2}\alpha},$$
$$a^3\sin\alpha\sin\tfrac{1}{2}\alpha\sqrt{3 - \operatorname{tg}^2\tfrac{1}{2}\alpha} = 18\sqrt{39}.$$

Dosazením za a z rovnice (3) obdržíme po náležité úpravě
$$64\operatorname{tg}^3\tfrac{1}{2}\alpha - 192\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\alpha + 117 = 0.$$

Tuto rovnici lze psáti takto:
$$64\operatorname{tg}^3\tfrac{1}{2}\alpha - 27 - 192\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\alpha + 144 = 0,$$
$$4^3\operatorname{tg}^3\tfrac{1}{2}\alpha - 3^3 - 48(4\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\alpha - 3) = 0,$$
$$(4\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\alpha - 3)[16\operatorname{tg}^2\tfrac{1}{2}\alpha + 12\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\alpha + 9 - 48] = 0,$$
$$(\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\alpha)_1 = \tfrac{3}{4},\quad (\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\alpha)_{2,3} = \frac{-3 \pm \sqrt{165}}{8}.$$

Úloze vyhovuje kořen $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha = \frac{3}{4}$. Pak jest:
$$\sin\varphi = \frac{2\sqrt{3}}{5},\quad \varphi = 43^0\,51'\,13\tfrac{1}{2}'',$$
$$\sin\psi = \frac{\sqrt{3}}{4},\quad \psi = 25^0\,39'\,32''.$$

Zavěsíme-li však klenec ve vrcholu, v němž se stýkají dva tupé úhly hranové a jeden ostrý, svírá každá ze tří hran s nití úhel λ, stěna s ostrým úhlem má od niti odchylku μ, kdežto stěny s tupým úhlem ve vrcholu mají od niti odchylku ν. Pak plyne z rovnoramenného sférického trojúhelníku, jehož základna je α, ramena $180^0 - \alpha$,
$$\operatorname{tg}\lambda = \frac{2\cos\frac{1}{2}\alpha}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha\sqrt{4\cos^2\frac{1}{2}\alpha - 1}} = \frac{32}{3\sqrt{39}},\quad \lambda = 59^0\,39'\,08'',$$
$$\cos\mu = \frac{\cos\lambda}{\cos\frac{1}{2}\alpha},\quad \mu = 50^0\,50'\,08'',$$
$$\operatorname{tg}\nu = \frac{\cos\frac{1}{2}\alpha}{\sqrt{4\cos^2\frac{1}{2}\alpha - 1}} = \frac{4}{\sqrt{39}},\quad \nu = 32^0\,38'\,24''.$$

13. úl. Řešil p. *Martin Baumann*, VII. rg. v Domažlicích.

Střed kružnice leží na výšce, x poloměr kružnice. Platí:
$$O = \left(\frac{x\sqrt{3}}{2} + \sqrt{2vx - v^2}\right)\left(v - \frac{3x}{2}\right) = \tfrac{3}{5}\cdot\frac{v^2}{\sqrt{3}};$$
po odstranění odmocniny a položením $\dfrac{9x}{2v} = y$, $x = \frac{2}{9}vy$ dostaneme rovnici:
$$y^4 - 18y^3 + 112y^2 - 282y + 247 = 0.$$

Pišme ji:
$$(y^2 - 8y + 13)(y^2 - 10y + 19) = 0.$$

Z toho:
$$y_{1,2} = 4 \pm \sqrt{3},\quad y_{3,4} = 5 \pm \sqrt{6};$$

je tedy:
$$x_{1,2} = \tfrac{2}{9}(4 \pm \sqrt{3})\,v,\quad x_{3,4} = \tfrac{2}{9}(5 \pm \sqrt{6})\,v.$$

Poněvadž $v - \frac{3}{2}x > 0$, platí jen x_2 a x_4.

14. úl. Řešil p. *Jan Kazimour*, VII. r. v Písku.

1. Budiž ohnisko paraboly $F(x, y)$, bod paraboly $A(m, 0)$. Pak jest poloparametr $p = 2\sqrt{x^2 + y^2}$. Osa má směrnici $\operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x}$, takže

$$\sin \alpha = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \cos \alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Řídicí přímka má rovnici

$$X \cos(180^0 + \alpha) + Y \sin(180^0 + \alpha) - \sqrt{x^2 + y^2} = 0,$$

$$-\frac{xX}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \frac{yY}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \sqrt{x^2 + y^2} = 0.$$

Vzdálenost bodu A od ohniska F se rovná jeho vzdálenosti od řídicí přímky

$$\pm\sqrt{(x - m)^2 + y^2} = \frac{mx}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \sqrt{x^2 + y^2},$$

z čehož po náležité úpravě plyne rovnice hledaného geom. místa

$$y^2 = \frac{4x^3}{m - 4x}.$$

2. Budiž $t \equiv X - m = 0$ tečna paraboly, jejíž vrchol jest $V(0, 0)$ a ohnisko $F(x, y)$. Vrcholová tečna má rovnici $Y = -\frac{x}{y} X$, průsečík tečny t s vrcholovou tečnou $P\left(m, -\frac{mx}{y}\right)$. Kolmice s ohniska na tečnu t má rovnici $Y = y$, takže $y = -\frac{mx}{y}$ neboli $y^2 + mx = 0$, což je rovnice hledaného geom. místa. Je to parabola, která má vrchol v počátku a osu v záporné ose X.

3. Budiž $n \equiv X - m = 0$ normála paraboly. Její průsečík s osou paraboly $Y = \frac{y}{x} X$ jest $Q\left(m, \frac{my}{x}\right)$. Příslušná tečna $Y = y_1$ protíná osu paraboly v bodě $K\left(\frac{xy_1}{y}, y_1\right)$. Poněvadž ohnisko $F(x, y)$ půlí úsečku $\overline{KQ}$, jest $y_1 = \frac{(2x - m) y}{x}$. Délka normály jest

$$\frac{my}{x} - y_1 = \frac{my}{x} - \frac{(2x - m) y}{x} = \frac{2(m - x) y}{x}.$$

Subnormála pak jest $\frac{2(m - x) y}{x} \cdot \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 2\sqrt{x^2 + y^2}$, z čehož $y^2 = \frac{x^3}{m - 2x}$, což je rovnice geom. místa.

15. úl. Řešil p. *Martin Baumann*, VII. rg. v Domažlicích.

Je:

$$s_{n,x} = \binom{2n-2}{n-1} + \binom{2n-3}{n-1} x + \ldots + \binom{n}{n-1} x^{n-2} + \binom{n-1}{n-1} x^{n-1};$$

$$\binom{2n-2}{n-1} = \binom{n-2}{n-2} + \binom{n-1}{n-2} + \ldots + \binom{2n-3}{n-2}, \text{ atd. až}$$

. . . .

$$\binom{n}{n-1} = \binom{n-2}{n-2} + \binom{n-1}{n-2},$$

$$\binom{n-1}{n-1} = \binom{n-2}{n-2}.$$

Můžeme tedy psáti:

$$s_{n,x} = \binom{n-2}{n-2}\frac{x^n-1}{x-1} + \binom{n-1}{n-2}\frac{x^{n-1}-1}{x-1} + \ldots + \binom{2n-4}{n-2}\frac{x^2-1}{x-1} +$$

$$+ \binom{2n-3}{n-2}\frac{x-1}{x-1}, \text{ čili}$$

$$s_{n,x}(x-1) = \binom{n-2}{n-2}x^n + \binom{n-1}{n-2}x^{n-1} + \ldots + \binom{2n-3}{n-2}x +$$

$$+ \binom{2n-2}{n-2} - \binom{2n-2}{n-2} - \binom{2n-2}{n-1}; \text{ z toho}$$

$$s_{n,x}(x-1) = \binom{n-3}{n-3}\frac{x^{n+1}-1}{x-1} + \binom{n-2}{n-3}\frac{x^n-1}{x-1} + \ldots$$

$$+ \binom{2n-3}{n-3}\frac{x-1}{x-1} - \binom{2n-2}{n-2} - \binom{2n-2}{n-1}.$$

Opakujeme týž úkon ještě $(n-3)$kráte a položíme $x = 2$; je:

$$s_{n,2} = 2^{2n-2} + 2^{2n-3} + \ldots + 2 + 1 - \left[\binom{2n-2}{0} + \binom{2n-2}{1} + \ldots\right.$$

$$\left. + \binom{2n-2}{2n-3} + \binom{2n-2}{2n-2} - 1\right],$$

$$s_{n,2} = 2^{2n-1} - 1 - 2^{2n-2} + 1, \qquad s_{n,2} = 2^{2n-2}.$$

Přímo: $s_{n,0} = \binom{2n-2}{n-1}$; $s_{n,1} = \binom{2n-1}{n}$.

16. úl. Riešil p. *Arnošt Knöpflmacher,* VII. a rg., Trenčín.

Sčítaním prvých dvoch rovníc s dvojnásobkom tretej rovnice a odmocnením dostávame

$$x + y + z = 0.$$

Ďalej slúčme prvé dve rovnice a dosaďme $z = -x - y$ a podobne rovnicu druhú s dvojnásobkom tretej a dosaďme $x = -y - z$.

Tým dostávame rovnice:

$$x^2 - y^2 = 2, \qquad x^2 - z^2 = -\tfrac{7}{4}.$$

Riešením týchto dvoch rovníc a rovnice $x + y + z = 0$, čo je už snadné, dostávame korene:

$$x_{1,2} = \pm \tfrac{3}{2}, \qquad y_{1,2} = \pm \tfrac{1}{2}, \qquad z_{1,2} = \mp 2,$$
$$x_{3,4} = \pm \tfrac{5}{6}i\sqrt{3}, \qquad y_{3,4} = \mp \tfrac{7}{6}i\sqrt{3}, \qquad z_{3,4} = \pm \tfrac{1}{3}i\sqrt{3}.$$

17. úl. Řešil p. *Jaroslav Vaněk,* VIII. rrg., Sušice a *Jan Kazimour,* VII. r., Písek.

I. Pišme: $c - a = m$, $c - b = n$, $c^2 = a^2 + b^2$.
Z těchto tří rovnic dostaneme:

$$a_{12} = n \pm \sqrt{2mn}, \qquad b_{12} = m \pm \sqrt{2mn}.$$

Výrazy sestrojíme podle věty Euklidovy.

II. Jak snadno nahlédneme, je poloměr vepsané kružnice $\varrho = \sqrt{\frac{1}{2}mn}$, a tedy $b = m + 4\varrho$. Na přímku $\overline{OX}$ naneseme $\overline{OM} = m$, $\overline{MN} = n$ tak, aby $\overline{ON} = m + n$. Nad $\overline{ON}$ jako průměrem opíšeme kružnici K. V bodě M vztyčíme kolmici k $\overline{ON}$, tato kolmice protne kružnici K v bodě C; sestrojíme čtverec $CPMQ$, jehož úhlopříčkou je $\overline{CM}$. Na prodloužení $\overline{CP}$ naneseme $\overline{CA} = 4\overline{CP} + m$. Ke kružnici K_1 opsané kolem bodu M poloměrem $\overline{MP}$ vedeme z bodu A druhou tečnu, jež protne $\overline{CQ}$ v bodě B. $\triangle ABC$ je trojúhelník žádaný.

III. (A.) Označme hledaný trojúhelník ABC, a buď $m > n$. Sestrojme bod A' tak, aby $\overline{CA'} = b$; tedy $\overline{A'B} = m - n = b - a$, a sestrojme dále přímku $p \parallel \overline{A'B}$ ve vzdálenosti $n = c - b$.

Pro bod A platí: $\overline{AB} = c$, $(A \vdash p) = c$, $\sphericalangle (\overline{AA'}, p) = 45^0$. Bod A lze tedy sestrojiti jako střed kružnice, která má střed na přímce $\overline{AA'}$, prochází B (ten volíme) a dotýká se přímky p, která od $\overline{A'B}$ má vzdálenost n. Úloha dvojznačná.

18. úl. Řešil p. *Jaroslav Vaněk*, VIII. rrg., Sušice.

Ze známých vzorců: $ef = ac + bd$, $\dfrac{e}{f} = \dfrac{ad + bc}{ab + cd}$,

dostaneme: $\quad e^2 = \dfrac{(ac + bd)(ad + bc)}{ab + cd}$. Podle Heronova vzorce:

$$\begin{aligned} O &= \tfrac{1}{4}\sqrt{(a + b + e)(a + b - e)(a - b + e)(-a + b + e)} + \\ &+ \tfrac{1}{4}\sqrt{(c + d + e)(c + d - e)(c - d + e)(-c + d + e)} = \\ &= \tfrac{1}{4}\sqrt{(a^2 + 2ab + b^2 - e^2)(e^2 - a^2 + 2ab - b^2)} + \\ &+ \tfrac{1}{4}\sqrt{(c^2 + 2cd + d^2 - e^2)(e^2 - c^2 + 2cd - d^2)} \text{ čili} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} O &= \frac{ab}{4(ab + cd)}\sqrt{[(a + b)^2 - (c - d)^2][(c + d)^2 - (a - b)^2]} + \\ &+ \frac{cd}{4(ab + cd)} \cdot \sqrt{[(c + d)^2 - (a - b)^2][(a + b)^2 - (c - d)^2]}. \end{aligned}$$

Z toho

$$O = \tfrac{1}{4}\sqrt{(a + b - c + d)(a + b + c - d)(c + b - a + b)(c + d + a - b)}.$$

Označíme-li $\dfrac{a + b + c + d}{2} = s$, je:

$$O = \sqrt{(s - a)(s - b)(s - c)(s - d)}.$$

19. úl. Řešil p. *Jan Kazimour*, VII. r. v Písku.
Pišme:

$$S = \sum_{k=1}^{n}(2k - 1)^2(2n - 2k + 1) = \sum_{k=1}^{n} 2n(2k - 1)^2 - \sum_{k=1}^{n}(2k - 1)^3,$$

$$S = 2n\sum_{k=1}^{n}(4k^2 - 4k + 1) - \sum_{k=1}^{n}(8k - 12k^2 + 6k^3 - 1),$$

$$S = 8n\sum_{k=1}^{n}k^2 - 8n\sum_{k=1}^{n}k + 2n^2 - 8\sum_{k=1}^{n}k^3 + 12\sum_{k=1}^{n}k^2 - 6\sum_{k=1}^{n} + n,$$

$$S = 2n^2 + n - (8n + 6)\frac{n(n+1)}{2} + (8n + 12)\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} -$$

$$- 8\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2,$$

$$S = \frac{n^2(2n^2 + 1)}{3}.$$

20. úl. Řešil p. *Jan Kazimour*, VII. r. v Písku.

Poněvadž výšky $v_a = \frac{2P}{a}$, $v_b = \frac{2P}{b}$, $v_c = \frac{2P}{c}$ mají býti racionální, musí býti obsah P racionální. Jsou-li strany trojúhelníku $b - 1$, b, $b + 1$, jest $P = \sqrt{\frac{3}{2}b\,(\frac{1}{2}b + 1)\,\frac{1}{2}b\,(\frac{1}{2}b - 1)} = \frac{1}{4}b\sqrt{3(b^2 - 4)}$. Musí tedy býti splněny podmínky

$$b > 2, \tag{1}$$

$$b^2 - 4 = 3m^2, \tag{2}$$

kde m značí nějaké celé číslo. Snadno nahlédneme, že čísla b a m obě musí býti sudá. Pišme tedy

$$b = 2x, \tag{3}$$

$$m = 2y, \tag{4}$$

takže rovnice (2) nabude tvaru

$$x^2 - 3y^2 = 1. \tag{5}$$

Tuto rovnici máme řešiti celými kladnými čísly. Buďiž x_1, y_1 pár nejnižších kořenů. Pak jest

$$1 = (x_1 + y_1\sqrt{3})\,(x_1 - y_1\sqrt{3}),$$

ale také

$$1 = (x_1 + y_1\sqrt{3})^n\,(x_1 - y_1\sqrt{3})^n = (x + y\sqrt{3})\,(x - y\sqrt{3}).$$

Rozvedením podle binomické věty obdržíme:

$$\left\{\left[x_1^n + \binom{n}{2}x_1^{n-2}\,.\,3y_1^2 + \binom{n}{4}x_1^{n-4}\,.\,3^2y_1^4 + \ldots\right] + \sqrt{3}\left[\binom{n}{1}x_1^{n-1}y_1 + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \binom{n}{3}x_1^{n-3}\,.\,3y_1^3 + \ldots\right]\right\}\left\{\left[x_1^n + \binom{n}{2}x_1^{n-2}\,.\,3y_1^2 + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \binom{n}{4}x_1^{n-4}\,.\,3^2y_1^4 + \ldots\right] - \sqrt{3}\left[\binom{n}{1}x_1^{n-1}y_1 + \binom{n}{3}x_1^{n-3}\,.\,3y_1^3 + \ldots\right]\right\} =$$

$$= x^2 - 3y^2$$

neboli

$$\left[x_1^n + \binom{n}{2}x_1^{n-2}\,.\,3y_1^2 + \binom{n}{4}x_1^{n-4}\,.\,3y_1^4 + \ldots\right]^2 - 3\left[\binom{n}{1}x_1^{n-1}y_1 + \right.$$

$$\left. + \binom{n}{3}x_1^{n-3}\,.\,3y_1^3 + \ldots\right]^2 = x^2 - 3y^2.$$

Vyhovuje-li tedy rovnici (5) pár kořenů x_1, y_1, vyhovuje také

$$x = x_1^n + \binom{n}{2}x_1^{n-2} \cdot 3y_1^2 + \binom{n}{4}x_1^{n-4} \cdot 3^2y_1^4 + \ldots,$$

$$y = \binom{n}{1}x_1^{n-1}y_1 + \binom{n}{3}x_1^{n-3} \cdot 3y_1^3 + \binom{n}{5}x_1^{n-5} \cdot 3^2y^5 + \ldots,$$

kdež za n můžeme postupně dosazovati 1, 2, 3, ... Stačí tedy najíti pár nejnižších kořenů rovnice (5).

Řešení $x = 1$, $y = 0$ nevyhovuje vzhledem k podmínce (1). Nejnižší pár kořenů je patrně $x_1 = 2$, $y_1 = 1$.

Pak další kořeny jsou

$$x_n = 2^n + \binom{n}{2}2^{n-2} \cdot 3 + \binom{n}{4}2^{n-4} \cdot 3^2 + \ldots,$$

$$y_n = \binom{n}{1}2^{n-1} + \binom{n}{3}2^{n-3} \cdot 3 + \binom{n}{5}2^{n-5} \cdot 3^2 + \ldots,$$

kde za n dosazujeme postupně 2, 3, 4, ...

Je tedy

$$b = 2\left[2^n + \binom{n}{2}2^{n-2} \cdot 3 + \binom{n}{4}2^{n-4} \cdot 3^2 + \ldots\right].$$

Tak obdržíme hledané trojúhelníky

$n = 1$,	$a = 3$,	$b = 4$,	$c = 5$,	
$n = 2$,	$a = 13$,	$b = 14$,	$c = 15$,	
$n = 3$,	$a = 51$,	$b = 52$,	$c = 53$,	
$n = 4$,	$a = 193$,	$b = 194$,	$c = 195$,	
$n = 5$,	$a = 723$,	$b = 724$,	$c = 725$,	
$n = 6$,	$a = 2701$,	$b = 2702$,	$c = 2703$,	atd.

Z fysiky.

1. úl. *Řešení autorovo.**)

Drát o průměru q, délky l prodlouží se celkovým napětím P o $\Delta l = \frac{1}{E} \cdot \frac{P}{q} l$. V našem příkladě jest $E = 22 \cdot 10^5$ kg/cm², $\frac{P}{q}$ (mez pružnosti pro plávkovou ocel) $= 3300$ kg/cm² a l (vzdálenost Měsíce od Země) $= 3844 \cdot 10^7$ cm. Tedy $\Delta l = 576{,}6$ km. Síla P, kterou Země přitahuje Měsíc, podle zákona Newtonova $= k \cdot \frac{Mm}{l^2g}$ kg, kde M je hmota země ($5{,}959 \cdot 10^{27}$ g), m hmota Měsíce $\left(\frac{1}{81}M\right)$, k gravitační konstanta a $g = 981 \cdot 10^3$ dyn. Podle dřívějšího jest $P = \frac{\Delta l}{l} \cdot Eq = \frac{\Delta l}{l} E\pi \frac{d^2}{4}$. Z obou rovnic plyne $d = \frac{2M}{9}\sqrt{\frac{\pi g E \Delta l}{kl}} = 936$ km.

2. úl. Řešil p. *Martin Baumann*, VII. rg., Domažlice.

Rozložme rychlosti c_1 a c_2 ve dvě složky k sobě kolmé, z nichž $c_1 \cos \alpha_1$ a $c_2 \cos \alpha_2$ spadají do směru středné. Předpokládáme-li, že jsou koule dokonale

*) Autorem úlohy je profesor *František Bouchal.*

hladké, nezmění se rázem tečné složky rychlosti. Rázem se koule deformují; v okamžiku, kdy se deformace dovrší, normálné rychlosti se vyrovnají na společnou rychlost $u = \frac{1}{2}(c_1 \cos \alpha_1 + c_2 \cos \alpha_2)$ $(m_1 = m_2)$ ve směru středné. Složka $c_2 \cos \alpha_2$ se zmenší o $(c_2 \cos \alpha_2 - u)$, $c_1 \cos \alpha_1$ se zvětší o $(u - c_1 \cos \alpha_1)$. Snahou deformovaných koulí nabýti původního tvaru nastává ráz druhý opačného směru, jímž se $c_2 \cos \alpha_2$ zmenší ještě o $k_2 (c_2 \cos \alpha_2 - u)$ a složka $c_1 \cos \alpha_1$ zvětší se o $k_1 (u - c_1 \cos \alpha_1)$. Normálné rychlosti po rázu budou

$$v_1 = c_1 \cos \alpha_1 + (1 + k_1)(u - c_1 \cos \alpha_1) = 0{,}99598\ldots,$$

$$v_2 = c_2 \cos \alpha_2 - (1 + k_2)(c_2 \cos \alpha_2 - u) = 0{,}919615\ldots,$$

výsledné rychlosti po rázu

$$C_1 = \sqrt{v_1^2 + c_1^2 \sin^2 \alpha_1} = 1{,}11445,$$

$$C_2 = \sqrt{v^2 + c_2^2 \sin^2 \alpha_2} = 1{,}96103;$$

úhly se střednou po rázu určují rovnice

$$\operatorname{tg} \beta_1 = \frac{c_1 \sin \alpha_1}{v_1}, \quad \operatorname{tg} \beta_2 = \frac{c_2 \sin \alpha_2}{v_2},$$

z nichž plyne

$$\beta_1 = 26^0\, 39'\, 27'', \quad \beta_2 = 62^0\, 2'\, 2''.$$

Směry se liší o úhel

$$\beta_2 - \beta_1 = 35^0\, 22'\, 35''.$$

3. úl. Řešil p. *Jan Kazimour*, VII. r., Písek.

Hmotný bod padaje po elipse bez tření podléhá síle mg, mířící svisle dolů, t. j. rovnoběžné s hlavní osou a síle odstředivé $m \frac{v^2}{R}$ mířící od středu křivosti, t. j. mající směr normály. Zůstává na elipse, pokud složka váhy padající do směru normály je větší než síla odstředivá. Svírá-li normála s vedlejší osou úhel α, opustí hmotný bod elipsu v místě, v němž

$$mg \sin \alpha = m \frac{v^2}{R},$$

$$gR \sin \alpha = v^2.$$

Rychlost v plyne ze zákona o zachování energie

$$\tfrac{1}{2} mv^2 = mg (a - y),$$

$$v^2 = 2g (a - y),$$

takže

$$R \sin \alpha = 2 (a - y). \tag{1}$$

Je-li rovnice elipsy $b^2y^2 + a^2x^2 = a^2b^2$, je poloměr křivosti

$$R = \frac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''} = \frac{(b^4y^2 + a^4x^2)^{\frac{3}{2}}}{a^4b^2}. \tag{2}$$

Směrnice normály jest

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{b^2y}{a^2x},$$

takže

$$\sin \alpha = \frac{b^2y}{\sqrt{b^4y^2 + a^4x^2}}. \tag{3}$$

Dosazením hodnot (2), (3) do (1) obdržíme pro y rovnici

$$y^3 - \frac{3a^4}{e^2} y + \frac{2a^5}{e^2} = 0, \tag{4}$$

Pro $a = \frac{5}{4}$, $b = \frac{5\sqrt{14}}{32}$ rovnice (4) nabude tvaru

$$y^3 - 6y + 5 = 0,$$

která má kořeny $y_1 = 1$, $y_2 = \frac{\sqrt{21} - 1}{2}$, $y_3 = \frac{-\sqrt{21} - 1}{2}$, jimž přísluší hodnoty $x_1 = \frac{3\sqrt{14}}{32}$, x_2 a x_3 jsou imaginární.

Hmotný bod opustí elipsu v místě $A\left(\frac{3\sqrt{14}}{32}, 1\right)$.

4. úl. **Řešil** p. *Leo Kalvoda*, VIII. rg., Litovel.

Sílu P rozložme ve složky $P \sin \alpha$ (svislou) a $P \cos \alpha$ (vodorovnou). Platí, že $T = f . N$; zde tedy $P \cos \alpha = f\,(N - P \sin \alpha)$, značí-li N váhu tělesa. Z toho $P = \frac{fN}{f \sin \alpha + \cos \alpha}$. Extrém má tato funkce pro $P' = \frac{\sin \alpha - f \cos \alpha}{(f \sin \alpha + \cos \alpha)^2} = 0$. Z toho plyne $f = \mathrm{tg}\alpha$. Je to minimum, ježto druhá derivace je kladná.

5. úl. **Řešil** p. *Václav Münz*, VII. r., Prostějov.

Svírá-li vektor rychlosti c s osami X, Y, Z úhly $(cX), (cY), (cZ)$; pak platí pro souřadnice plochy, na které se bude bod po době t nacházeti, rovnice:

$$x = ct \cos(cX),$$
$$y = ct \cos(cY),$$
$$z = ct \cos(cZ) - \frac{g}{2} t^2.$$

Poněvadž $\cos^2 (cX)^2 + \cos^2 (cY)^2 + \cos^2 (cZ)^2 = 1$, je rovnice hledané plochy:

$$x^2 + y^2 + (z + \frac{g}{2} t^2)^2 = c^2 t^2.$$

Po době t leží tedy hmotné body na kouli o poloměru ct, jejíž střed je o $\frac{g}{2} t^2$ pod bodem, ze kterého byly body vrženy. Střed této koule padá volným pádem, poloměr rovnoměrně roste rychlostí vrhu.

6. úl. *Řešení autorovo.*

Jako nezávisle proměnnou x zvolme výšku kapaliny nad dnem a závisle proměnnou y výšku společného těžiště nad dnem. Vzhledem ke dnu platí momentová rovnice:

$$(p + \pi r^2 xs)\, y = pd + \pi r^2 xs \frac{x}{2},$$

z čehož plyne závislost

$$y = \frac{2pd + \pi r^2 s x^2}{2p + 2\pi r^2 s x}. \qquad (1)$$

Derivujme a položme derivaci rovnou 0; dostáváme

$$x^2 + \frac{2p}{\pi r^2 s} x - \frac{2pd}{\pi r^2 s} = 0$$

a pro

$$x = \frac{\sqrt{p^2 + 2\pi r^2 dps} - p}{\pi r^2 s},$$

kteroužto hodnotu dosadíme do (1). Obdržíme

$$y_{\min} = \frac{\sqrt{p^2 + 2\pi r^2 dps} - p}{\pi r^2 s}.$$

Dosáhne tedy těžiště nejnižší polohy, když padne právě do povrchové hladiny kapaliny.

7. úl. **Řešil** p. *Leo Kalvoda*, VIII. rg. v Litovli.

Spojíme-li n-článků do x skupin po y článcích, pak je-li R vnější odpor, r vnitřní odpor každého článku a e elm. síla, intensita jest dána $I = \frac{xe}{xr/y + R}$. Poněvadž pak $xy = n$, hledáme maximum funkce $I = \frac{ne}{nr/y + Ry}$ o proměnné y.

Z první derivace $I' = \frac{ne\,(nry^{-2} - R)}{[nr/y + Ry]^2} = 0$ plyne pro $y = \sqrt{\frac{nr}{R}}$. Dosazením do druhé derivace plyne maximum I.

Dále pak

$$x = \sqrt{\frac{nR}{r}};$$

při této podmínce celkový odpor vnitřní rovná se odporu vnějšímu a nastává max. intensita.

8. úl. *Řešení autorovo.*

V strede kormidla O bude pôsobište odporu prostredia (vody s koeficientom k). Sila táto f je daná: $f = kFv^2$ a rozkladá sa vo dve složky f_1 a f_2, z ktorých f_1 loďku otáča a f_2 (poneváč prechádza ťažišťom T) ju sdružuje v chodu a zároveň priťahuje k stredu S (rozkladajúc sa zase v f_3 a f_4). Preto hľadanou krivkou bude spirála, ktorej veličiny si určíme:

Veľkosö síl f_1 až f_4 je táto:

$$f_1 = f \sin\beta, \quad f_2 = f\cos\beta, \quad f_3 = f\cos^2\beta, \quad f_4 = \tfrac{1}{2} f \sin 2\beta.$$

kde

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{b}{a}.$$

Postupná otáčivá rýchlosť loďky (pôsobená silou f_1) je $v_1 = \frac{f_1}{M}$; uhlová rýchlosť

$$\omega = \frac{v_1}{2\pi\,.\,\overline{OT}} = \frac{f\sin^2\beta}{2\pi bM}.$$

Sila f_3 bude loďku v chodu zdržovať rýchlosťou $v_3 = \frac{f_3}{M}$, čiže rýchlosť loďky $v' = v - v_3$.

Odhliadnúc prezatým od sily f_4 loďka koná dráhu kruhovú s úhlovou rýchlosťou zase ω, lebo sa pohybuje vo smere tečny. Preto platí:

$$\omega = \frac{f\sin^2\beta}{2\pi bM} = \frac{v - v_3}{2\pi r_0} = \frac{Mv - f\cos^2\beta}{2\pi M r_0}$$

a z toho pre

$$r_0 = \frac{bMv - bf\cos^2\beta}{f\sin^2\beta}$$

a po upravení:

$$r_0 = \frac{M(a^2 + b^2)}{bFkv} - \frac{a^2}{b};$$

r_0 = je pri tom počiatočným polomerom spirály.

Po vykonaní oblúku 360°-ého sa však polomer r_0 zmenší na r_1. Tento rozdiel $r_0 - r_1 = r_1 - r_2 = r_n - r_{n+1}$. Tým je spirála dostatočne určená.

Čas vykonania oblúku 360°ého τ

$$\tau = \frac{1}{\omega} = \frac{2\pi bM}{f \sin^2 \beta}.$$

Násobíme-li τ rýchlosťou v_4 (pôsobenou silou f_4, smerujúcou do S), obdržíme $r_0 - r_1$.

$$r_0 - r_1 = \frac{2\pi bM}{f \sin^2 \beta} \cdot \frac{f_4}{M},$$

$$f_4 = \tfrac{1}{2} f \sin 2\beta, \quad \text{čiže}$$

$$r_0 - r_1 = 2\pi a.$$

9. úl. Řešil p. *Jan Kazimour*, VII. r., Písek.

Dopadne-li míč v bodě O na rovinu rychlostí c, která má od roviny odchylku a, odrazí se pod elevačním úhlem a a dopadne opět na rovinu ve vzdálenosti $\frac{c^2 \sin 2a}{g}$, odrazí se opět pod elevačním úhlem a, vystoupí však jen do $\frac{3}{4}$ původní výše a dopadne ve vzdálenosti $\frac{c'^2 \sin 2a}{g}$, kde $c'^2 = \frac{3}{4} c^2$, atd.

Vzdálenost posledního dopadu od bodu O jest

$$d = \frac{c^2 \sin 2a}{g} + \frac{3}{4} \frac{c^2 \sin 2a}{g} + \left(\frac{3}{4}\right)^2 \frac{c^2 \sin 2a}{g} + \left(\frac{3}{4}\right)^3 \frac{c^2 \sin 2a}{g} + \ldots \text{ in inf.},$$

$$d = \frac{c^2 \sin 2a}{g} \left(1 + \frac{3}{4} + \frac{9}{16} + \ldots \text{ in inf.}\right),$$

$$d = \frac{4c^2 \sin 2a}{g}.$$

10. úl. Řešil p. *Jaroslav Vaněk*, VIII. rrg., Sušice.

Paprsek svírá s odvěsnou úhel a, láme se a svírá pak s ní úhel $a + \beta$. S druhou odvěsnou svírá úhel $90^0 - (a + \beta)$, po odraze s přeponou úhel $45^0 + a + \beta$, s lomeným paprskem $90^0 - \beta$, s původním pak 90^0.

Z deskriptivní geometrie.

1. úl. Řešil p. *P. Prokopec*, VI. r., Praha X.

Označme rovinu bodů $(A_i, B_i, C_i) \equiv \varrho_i$. Chordálné roviny ϱ_i, ϱ_k se protnou v přímce $p_{i,k}$, kterou procházejí potenční roviny všech koulí svazků (A_i, B_i, C_i) resp. (A_k, B_k, C_k). Naše potenční rovina je tedy určena $(p_{i,k}, M) \equiv \equiv \tau_{i,k}$. Hledané středy ploch kulových v našich svazcích, které mají $\tau_{i,k}$ za potenční, dostaneme takto. Sestrojíme příčku os obou svazků kolmou k $\tau_{i,k}$ (za pomoci průmětu obou os do $\tau_{i,k}$); kde protne tato příčka osy svazků, jsou středy S_i resp. S_k.

2. úl. Řešil p. *Jaroslav Vaněk*, VIII. rrg., Sušice.

Přímkou p a bodem B proložíme rovinu ϱ. K bodům M, N najdeme souměrné podle ϱ a tím je koule určena 4 body. Osu dostaneme, spojíme-li střed koule s B.

3. úl. Řešil p. *K. Zivuška*, VI. r., Praha X.

Z bodu R vedeme tečnu k dané ploše kulové a její délku označíme t. Spojíme R s A a sestrojíme na $\overline{AR}$ bod C, pro který platí: $\overline{RA}\,.\,\overline{RC} = t^2$. Taktéž sestrojíme bod D na spojnici $\overline{RB}$, pro který platí: $\overline{RB}\,.\,\overline{RD} = t^2$. Kulová pl. je tedy určena 4 body: A, B, C, D.

4. úl. Riešil p. *V. Hönig*, VI. rrg. v Novom Meste nad Váhom.

Bodmi M, N ide priamka a. Vyhľadajme priesečík a s ϱ a vyhľadajme priemet kolmý priamky a do ϱ. Rozpôlime uhol α a jej priemetu, dostaneme priamku b (osu toho uhlu). Priamkou b položíme rovinu σ kolmú k rovine τ. Určíme priesečnicu ϱ, σ a vyhľadáme odchylku α roviny τ od ϱ. Sostrojíme dále rovinu ν, ktorá má odchylku od ϱ 2α a M, N budú v ní obsažené. Vyhľadáme $\nu \times \varrho$. Tým je kružnica antiparalelného rezu určená bodmi M, N a tečnou $t \equiv (\nu \times \tau)$. Kde sa dotýká kružnica antip. rezu priesečnice $(\nu \times \varrho)$, tam je i dotykový bod spodnej kružnice určené mimo to tečnou $(\varrho \times \tau)$.

5. úl. Řešil p. *F. Wergner*, VI. r., Praha X.

Označíme-li X bod hledané plochy kulové a S přísl. střed, platí:

$$\sin\frac{\alpha_1}{2} = \frac{\overline{SX}}{\overline{O_1S}}, \quad \sin\frac{\alpha_2}{2} = \frac{\overline{S_2X}}{\overline{O_2S}}.$$

Vydělením těchto rovnic je:

$$\frac{\sin\frac{1}{2}\alpha_1}{\sin\frac{1}{2}\alpha_2} = \frac{\overline{O_2S}}{\overline{O_1S}},$$

je tedy g. m. středů ploch kulových, které jsou viděny z bodů O_1 a O_2 pod úhly α_1 resp. α_2, Apol. plocha kulová, která je sestrojena nad úsečkou $\overline{O_1O_2}$ pro poměr $\frac{\sin\frac{1}{2}\alpha_2}{\sin\frac{1}{2}\alpha_1}$.

Podobně dostaneme Apol. plochy kulové nad úsečkou $\overline{O_1O_3}$ a také nad úsečkou $\overline{O_1O_4}$.

Tyto 3 plochy kulové mají společné 2 body, středy hledaných ploch kulových. Poloměry určíme z rovnice:

$$\overline{SX} = \overline{O_1S}\,.\,\sin\tfrac{1}{2}\alpha_1.$$

Seznam řešitelů úloh.

Martin Baumann, VII. rg., Domažlice, m.: 1—20, f.: 2—7, 9, dg.: 1—5; *Jakub Gabovič-Gaboj*, VII. rrg., Nový Bohumín, m.: 2, 3, 6, 9, 11, 16, 19, f.: 7; *Vojtěch Hönig*, VI. rrg., Nové Mesto nad Váhom, m.: 1, 2, 10, 11, 15, 16, 17, 19, 20, dg.: 4; *Antonín Huťa*, VII. rg., Bratislava, m.: 2, 7, 10, 11, 16, 19; *Leo Kalvoda*, VIII. rg., Litovel, m.: 2, 6, 10, 11, 18, f.: 1—7, 9, 10; *František Kašpar*, II. st. průmyslová škola, Praha XVI., m.: 2, f.: 4, 6, 7, dg.: 3; *Jan Kazimour*, VII. r., Písek, m.: 1—20, f.: 1—7, 9, 10; *Josef Kelich*, VII. r., Louny, f.: 1, 5, 7; *Arnošt Knöpfelmacher*, VII. rg., Trenčín, m.: 1—19; *Zdeněk Kopal*, VIII. rg., Smíchov, m.: 2, 11, 16; *Zdeněk Kubík*, VI. r., Praha X., dg.: 1—5; *Karol Kukuča*, VIII. rrg., Turč. Sv. Martin; *V. Münz*, VII. rg., Prostějov, m.: 1—11, 13, 14, 19, f.: 2—7, 10; *Jan Navrátil*, VII. rg., Litovel, m.: 6, 8, 10, 16, 18; *Pavel Prokopec*, VI. r., Praha X., dg.: 1—5; *Václav Šebesta*, V. rrg., Sušice, m.: 2, 9, 16, 18; f.: 10; *Jar. Vaněk*, VIII. rrg., Sušice, m.: 1—3, 6—12, 14—20, f.: 1, 2, 4—7, 9, 10, dg.: 2, 3, 4; *Viktor Vychodil*, VI. rg., Kralupy n. Vltavou, m.: 10, 16, f.: 5, dg.: 3; *František Wergner*, VI. r., Praha X., dg.: 1—5; *Karel Zivuška*, VI. r., Praha X., dg.: 1—5.

Udělení cen.

Redakce, přihlížejíc k jakosti a počtu řešených úloh, přisoudila těmto řešitelům ceny, vypsané výborem Jednoty československých matematiků a fysiků:

Z matematiky:

První cenu obdrží: *Jan Kazimour*, VII. r., Písek, druhé ceny *Martin Baumann*, VII. rg., Domažlice, *Arnošt Knöpfelmacher*, VII. rg., Trenčín a *Jan Vaněk*, VIII. rrg., Sušice.

Z fysiky:

Obdrží ceny: *Jan Kazimour*, VII. r. v Písku a *Leo Kalvoda*, VIII. rg. v Litovli.

Z deskriptivní geometrie:

Obdrží cenu: *Pavel Prokopec*, VI. r., Praha X.

Z fondu Jaromíra Mareše:

Ceny obdrží: *Martin Baumann*, VII. rg., Domažlice a *Svatopluk Rozsíval*, žák V. *c* třídy I. obecné chlapecké školy v Českých Budějovicích, označený správou školy za nejlepšího počtáře.