obrazy velikých mistrů a ztracené spisy o něčem jiném poučily, že snad za té doby principie pravé perspektivy, podobně jako v středověku tajnosti umění kamenického a tesařského spůsobem tradičním v úzkém kruhu zasvěcenců se udržovaly, — připustíme-li to vše, nuže tážeme se, co z toho plyne? Patrně nic jiného, než že všecky tyto vědomosti v následujících četných převratech, jež pokaždé změnily tvářnost celé Evropy, naprosto zanikly, a že bylo potomstvu práci tuto započíti znovu, jako by před nimi nikdy nebylo o vědě perspektivné pracováno. Skutečný počátek vědy této třeba tedy hledati v oné době, kde všecky uměny a vědy slavily slavnost svého znovuzrození, v době na vždy památného Cinquecenta, na jehož prahu vítá nás veleduch Lionardův, jehož slova byla heslem tohoto našeho pojednání:

Chi non puó quel che vuol,
quel che puó voglia.

Tro- i četverokut u savezu sa aritmetičkimi i geometrijskimi progresijami.

Napisao

prof. **Marko Mikšić.**

I. Označimo koordinate piknjah A, B i C*) redomice sa $x_1 y_1$ $x_2 y_2$, $x_3 y_3$, onda imamo za ploštinu trokuta ABC, ako istu sa p_3 označimo formulu:

$$p_3 = \frac{1}{2} [x_1 (y_3 - y_2) + x_2 (y_1 - y_3) + x_3 (y_2 - y_1)] \dots \quad (1)$$

Popolovimo strane AB, BC, CA u piknja A_1, B_1 i C_1 i označimo koordinate istih piknja sa $\xi_1 \eta_1$, $\xi_2 \eta_2$, $\xi_3 \eta_3$ onda imamo za ploštinu trokuta A_1 B_1 C_1, ako istu sa p'_3 označimo vrědnost

$$p'_3 = \frac{1}{2} [\xi_1 (\eta_3 - \eta_2) + \xi_2 (\eta_1 - \eta_3) + \xi_3 (\eta_2 - \eta_1)] \quad (1')$$

*) Příslušný výkres si každý snadno půlením stran trojúhelníků sestaví.

za koordinate ξ_1, ξ_2, ξ_3, η_1, η_2 i η_3 imamo sledeće vrědnosti

$$\xi_1 = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad \xi_2 = \frac{x_2 + x_3}{2}, \quad \xi_3 = \frac{x_1 + x_3}{2}$$

$$\eta_1 = \frac{y_1 + y_2}{2}, \quad \eta_2 = \frac{y_2 + y_3}{2}, \quad \eta_3 = \frac{y_1 + y_3}{2}$$

i ako ove vrědnosti u formulu (I') substituiramo, dobijemo nakon kratke redukcije za p_3' vrědnost:

$$p_3' = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} [x_1 (y_3 - y_2) + x_2 (y_1 - y_3) + x_3 (y_2 - y_1)]$$

ili

$$p'_3 = \frac{p_3}{4} = \frac{p_3}{2^2}. \tag{I}$$

Na isti način dobijemo za ploštinu trokuta $A_2 B_2 C_2$ ako istu sa p_3'' označimo formulu

$$p_3'' = \frac{p_3'}{4} = \frac{p_3}{16} = \frac{p_3}{2^4} = \frac{p_2}{2^{2.2}} \tag{II}$$

Ako ovako dalje postupamo dobijemo sledeće formule:

$$p_3''' = \frac{p_3''}{4} = \frac{p_3}{64} = \frac{p_3}{2^{2.3}} \tag{III}$$

$$p_3^{IV} = \frac{p_3}{2^{2.4}} \tag{IV}$$

$$p_3^{V} = \frac{p_3}{2^{2.5}} \tag{V}$$

. . . .

$$p_3^{(n)} = \frac{p_3}{2^{2.n}} \tag{n}$$

Uzmimo logaritmus naturalis formulah (I) do (n):

$$l p_3' = l \left[p_3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \right] = l p_3 + 2\, l \left(\frac{1}{2}\right) \tag{I}$$

$$l p_3'' = l p_3 + 2.2\, l \left(\frac{1}{2}\right) \tag{II}$$

$$l p_2''' = l p_3 + 2.3\, l \left(\frac{1}{2}\right) \tag{III}$$

$$l p_3^{IV} = l p_3 + 2.4\, l \left(\frac{1}{2}\right) \tag{IV}$$

. . . .

$$l p_3^{(n)} = l p_3 + 2 n l \left(\frac{1}{2}\right). \qquad (n)$$

Adirajmo zadnji red formula (I) do (n) onda dobijemo

$$(N') \quad l p_3{}' . p_3{}'' . p_3{}''' \dots . p_0^{(n)} = n l p_3 + 2 \,(1 + 2 + \dots + n) . \, l \left(\frac{1}{2}\right)$$

Ovaj niz u zaporku jest aritmetički niz prvoga reda, kojega sbroj je po formuli:

$$S_n = \frac{n}{2} (a_1 + a_n)$$

lasno označiti moći.

$$S_n = \frac{n}{2} (1 + n)$$

uslěd čega formula (N') u sledeću přelazi:

$$(N'') \quad l p_3{}' . p_3{}'' . p'''_3 \dots p_3^{(n)} = n l p_3 + n (1 + n) \, l \left(\frac{1}{2}\right).$$

Metnimo radi kratkoće pisanja:

$$l p'_3 . p_3{}'' . p_3{}''' \dots p^{(n)}_3 = \sum_{m=1}^{m=n} l p^{(m)}_3$$

onda imamo

$$\sum_{m=1}^{m=n} l p_3^{(m)} = n \,[l p_3 - (n+1)\, l 2]$$

ili

$$(N) \quad \sum_{m=1}^{m=n} l p_3^{(m)} = n \, l \left(\frac{p}{2^{n+1}}\right).$$

Na istu je formulu moći doći, ako jednačbe (I) do (n) pomnožimo, t. j. ine jednakosti na levoj i ine na desnoj strani znaka jednakosti medjusobno i logaritmiramo.

Ako pako formule (I) do (n) naprosto adiramo i sumu:

$$p_3{}' + p_3{}'' + p_3{}''' + \dots + p_3^{(n)} = \sum_{m=1}^{m=n} p_3^{(m)}$$

sinbolički označimo, dobijemo formulu

$$(P') \quad \sum_{m=1}^{m=n} p^{(m)} = p_3 \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^6} + \dots + \frac{1}{2^{2n}}\right)$$

ili

$$(P) \quad \sum_{m=1}^{m=n} p_3^{(m)} = \frac{p_3}{2^2}\left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{2^{2n-2}}\right)$$

Valja nam ovaj niz u zaporko diskutirati.

Po formuli $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ doznati ćemo, da li isti konvergira. Kod nas je

$$a_{n+1} = \frac{1}{2^{2n}}$$

a

$$a_n = \frac{1}{2^{2n-2}}$$

dakle

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{1}{2^{2n}}}{\frac{1}{2^{2n-2}}} = \frac{1}{2^2}.$$

Ovaj slomak bi samo onda bio jedinici jednak, ako bi $n = 0$ bio, a za $n = \infty$ prelazi isti u nulu. Iz ovoga slědi da 1) niz u zaporku konvergira, i da je 2) njegovu sumu označiti moći. Panajprije imamo.

$$1 : \frac{1}{2^2} = 2^2, \quad \frac{1}{2^2} : \frac{1}{2^4} = 2^2 \quad \text{i t. d.}$$

dakle je $q = 2^2$ konstantan quotient, i onaj niz giometrijska progresija.

Po formuli

$$S_n = \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

dobijemo za sumu iste progresije

$$S_n = \frac{2^{2n} - 1}{3}$$

uslěd čega i (P') u

$$(P) \qquad \sum_{n=1}^{m=n} p_3^{(m)} = \frac{p_3}{2^2} \frac{(2^{2n} - 1)}{3}$$

prelazi.

II) Koordinate piknjah A, B, C i D označimo sa $x_1 y_1$, $x_2 y_2$, $x_3 y_3$, $x_4 y_4$ onda imamo za ploštinu četverokuta $ABCD$, ako istu sa p_4 označimo formulu

$$p_4 = \frac{1}{2} [x_1(y_4 - y_2) + x_2(y_1 - y_3) + x_3(y_2 - y_4) + x_4(y_3 - y_1)] \quad (\alpha')$$

Popolovimo strane AB, BC, CD, DA u piknjah A_1, B_1, C_1 i D_1 i označimo koordinate istih piknja sa $\xi_1 \eta_1$, $\xi_2 \eta_2$, $\xi_3 \eta_3$ i $\xi_4 \eta_4$, onda imamo za ploštinu četverokuta odnosno parallelograma $A_1 B_1 C_1 D_1$, ako istu ploštinu sa p_4' označimo vrědnost

$$p'_4 = \frac{1}{2}\left[\xi_1(\eta_4-\eta_2)+\xi_2(\eta_1-\eta_3)+\xi_3(\eta_2-\eta_4)+\xi_4(\eta_3-\eta_1)\right] \quad (\alpha'')$$

gdě za koordinate $\xi_1\,\eta_1$, $\xi_2\,\eta_2$, $\xi_3\,\eta_3$, $\xi_4\,\eta_4$ slědeće vrědnosti eksistiraju

$$\xi_1 = \frac{x_1+x_2}{2},\ \xi_2 = \frac{x_2+x_3}{2},\ \xi_3 = \frac{x_3+x_4}{2},\ \xi_4 = \frac{x_1+x_4}{2}$$

$$\eta_1 = \frac{y_1+y_2}{2},\ \eta_2 = \frac{y_2+y_3}{2},\ \eta_3 = \frac{y_3+y_4}{2},\ \xi_4 = \frac{y_1+y_4}{2}$$

koje vrědnosti u formulu (α'') substituirane prelazi ista u

$$p_4' = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\left[x_1(y_4-y_2)+x_2(y_1-y_3)+x_3(y_2-y_4)+x_4(y_3-y_1)\right] \quad (\alpha'')$$

ili pako

$$p_4' = \frac{p_4}{2}. \qquad (\alpha)$$

Ako opet strane $A_1\,B_1$, $B_1\,C_1$, $C_1\,D_1$ i $D_1\,A_1$ popolovimo, i to u piknja A_2, B_2, C_2 i D_2 onda dobijemo drugi parallelogram, kojega je ploština, ako ju (ploštinu) sa p_4'' označimo, formulom

$$p_4'' = \frac{p_4'}{2} = \frac{p^4}{4} \qquad (\beta)$$

predstavljena. Isto tako je i

$$p_4''' = \frac{p_4}{8} \qquad (\gamma)$$

$$p_4^{\mathrm{IV}} = \frac{p_4}{16} \qquad (\delta)$$

$$p_4^{\mathrm{V}} = \frac{p_4}{32} \qquad (\varepsilon)$$

. . . . . .

lasno dobiti moći. Formule (α), (β) i t. d. moći je još drugačije pisati

$$p_4' = \frac{p_4}{2} \qquad (\alpha)$$

$$p_4'' = \frac{p_4}{2^2} \qquad (\beta)$$

$$p_4''' = \frac{p_4}{2^3} \qquad (\gamma)$$

$$p_4^{\mathrm{IV}} = \frac{p_4}{2^4} \qquad (\delta)$$

$$p_4^{\text{V}} = \frac{p_4}{2^5} \qquad (\varepsilon)$$

. . . . .

$$p_4^{(n)} = \frac{p_4}{2^n} \qquad (\nu)$$

Uzmimo najprije logaritmus naturalis jednačbah (α) do (ν)

$$l p_4' = l p_4 + l\left(\frac{1}{2}\right) \qquad (\alpha'')$$

$$l p_4'' = l p_4 + 2l\left(\frac{1}{2}\right) \qquad (\beta'')$$

$$l p_4''' = l p_4 + 3l\left(\frac{1}{2}\right) \qquad (\gamma'')$$

. . . .

$$l p_4^{(n)} = l p_4 + nl\left(\frac{1}{2}\right) \qquad (\nu'')$$

i adirajmo ove zadnje jednačbe, onda dobijemo

$$l p'_4 \cdot p_4'' \cdot p_4''' \ldots p_4^{(n)} = n\, l p_4 + (1 + 2 + 3 + \ldots + n) l\left(\frac{1}{2}\right)$$

ili pako, ako se oni isti sinbolah poslužimo kao i kod trokuta

$$\sum_{m=1}^{m=n} l p_4^{(m)} = n\, l p_4 - (1 + 2 + 3 + \ldots + n)\, l 2 .$$

Poznato je

$$S_n = 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n}{2}(1 + n)$$

dakle

$$\sum_{m=1}^{m=n} l p_4^{(m)} = n\, l p_4 - \frac{n}{2}(1 + n)\, l 2$$

$$= n\left(l p_4 - \frac{1+n}{2}\, l 2\right)$$

$$\sum_{m=1}^{m=n} l p_4^{(m)} = n\, l\left(\frac{p_4}{2^{\frac{1+n}{2}}}\right) . \qquad (Q)$$

Dakako, da bi na istu formulu nadošli, ako ine jednakosti na desnoj i ine jednakosti na lěvoj strani znaka jednakosti pomnožili i logaritmirali. Adirajmo jednačbe (α) do (ν), onda dobijemo, ako kratkoće radi

$$p_4' + p_3'' + p_4''' + \ldots + p_4^{(n)} = \sum_{m=1}^{m=n} p_n^{(m)}$$

sinbolički označimo

$$\sum_{m=1}^{m=n} p^{(m)} = \frac{p_4}{2}\left[1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}\right]$$

Niz u zaporku jest dobro poznata geometrijska progresija. U ovom slučaju imamo za konstantni quotient q vrědnost

$$q = 1 : \frac{1}{2} = 2 = \frac{1}{2} : \frac{1}{2^2} \quad \text{i t. d.}$$

a za sumu iste progresije

$$S_n = \frac{q^n-1}{q-1} = \frac{2^n-1}{2-1} = 2^n - 1$$

dakle konačno

$$(R) \qquad \sum_{m=1}^{m=n} = p_4 \frac{2^n-1}{2}.$$

O posloupnosti geometrické.

Podal

Augustin Pánek.

Nalezá-li se v osudí a černých a b bílých kuliček a značí-li pravděpodobnost absolutní, že vytáhneme kuličku černou u a bílou v, jest, jak známo,

$$u = \frac{a}{a+b}, \quad v = \frac{b}{a+b}.$$

Podobnost, že vytáhneme v jednom tahu kuličku černou $= u$, ve dvou tazích 1 černou a 1 bílou $= uv$, ve třech tazích 1 černou a 2 bílé $= uv^2$, ve čtyřech tazích 1 černou a 3 bílé $= uv^3, \ldots$, v n tazích 1 černou a $(n-1)$bílých $= uv^{n-1}$ aneb konečně samé bílé $= v^n$; dá pak součet podobností jednotlivých příhod jistotu, to jest

$$u + uv + uv^2 + \ldots + uv^{n-1} + v^n = 1$$

aneb

$$u(1 + v + v^2 + \ldots + v^{n-1}) = 1 - v^n,$$

a poněvadž podobnosti