Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Josef Langr

Brocardova kružnice trojúhelníka jako místo geometrické

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 29 (1900), No. 3, 210--217

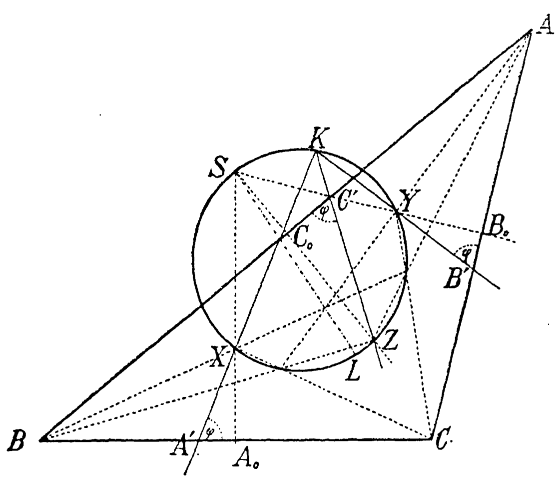
Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/108863

Brocardova kružnice trojúhelníka jako místo geometrické.

Napsal

Jos. Langr, c. k. námořní inženýr v Pole.

V novější geometrii trojúhelníka zhusta pojednává se o kružnici sedmi bodů či kružnici Brocardově, zvané tak dle franc. mathematika Brocarda, majora ženijního sboru. Vlastnosti této kružnice jsou stručně podány p. řed. Strnadem v XV. roč. tohoto časopisu str. 28 a 276. Odkazuji čtenáře na tyto články. V přítomném pojednání hodlám uvésti novou, pokud mi povědomo, vlastnost této kružnice a zároveň s ní souvislé relace.



Obr. 1.

I. *Buď dán trojúhelník ABC. Vytkněme v jeho stranách po libovolném bodě. Tyto body značme A′, B′, C′. Opíšeme-li nad trojúhelníky AB′C′, BA′C′, CA′B′ kružnice, procházejí tyto jediným bodem K a*

$$\sphericalangle KC'A = \sphericalangle KA'B = \sphericalangle CB'K = \varphi.$$

Důkaz této věty je velmi snadný. Nechť kružnice opsané nad $\triangle AC'B'$ a $\triangle BA'C'$ se protínají v bodě K (obr. 1.). Jelikož čtyřúhelník KC'AB' a A'KC'B jsou do kružnice vepsané, jest $\sphericalangle B'KC'$ výplňkem úhlu α a $\sphericalangle A'KC'$ výplňkem úhlu β. Musí tedy býti $\sphericalangle A'KB'$ výplňkem úhlu γ čili K ležeti na kružnici opsané $\triangle CA'B'$; tedy všecky tři kružnice jdou bodem K.

Jelikož jest též

$$\sphericalangle KC'B + \sphericalangle KB'A = 180^0,$$

jest

$$\sphericalangle KC'A = \sphericalangle CB'K$$

a taktéž

$$\sphericalangle CB'K = \sphericalangle BA'K$$

čili každá příčka svírá se stranou trojúhelníka, již protíná, stejný úhel φ.

Větě I. bude hověno také, když pro dělící body A', B', C' položíme následující podmínku

$$(a) \qquad \frac{\overline{AC'}}{\overline{BC'}} = \frac{\overline{CA'}}{\overline{BA'}} = \frac{\overline{AB'}}{\overline{CB'}} = \lambda.$$

V tomto případě lze udati direktní relaci mezi λ a φ. Pokračujme takto:

Pro obsah $\triangle ABC$ lze psáti vzorec tento:

$$(1) \qquad 2\Delta = (\overline{AB}\,.\,\overline{KC'} + \overline{BC}\,.\,\overline{KA'} + \overline{AC}\,.\,\overline{KB'})\sin\varphi.$$

Dle Carnotovy věty vycházejí rovnice

$$\begin{aligned}
\overline{AC'}^2 + \overline{C'K}^2 - 2\overline{AC'}\,.\,\overline{KC'}\,.\cos\varphi &= \overline{AB'}^2 + \overline{KB'}^2 \\
&\quad + 2\overline{KB'}\,.\,\overline{AB'}\,.\cos\varphi, \\
\overline{BA'}^2 + \overline{KA'}^2 - 2\overline{BA'}\,.\,\overline{KA'}\,.\cos\varphi &= \overline{BC'}^2 + \overline{KC'}^2 \\
&\quad + 2\overline{BC'}\,.\,\overline{KC'}\,.\cos\varphi, \\
\overline{CB'}^2 + \overline{KB'}^2 - 2\overline{CB'}\,.\,\overline{KB'}\,.\cos\varphi &= \overline{CA'}^2 + \overline{KA'}^2 \\
&\quad + 2\overline{CA'}\,.\,\overline{KA'}\,.\cos\varphi.
\end{aligned}$$

Sečtěme tyto rovnice. Některé členy se ruší, a dostaneme:

$$\begin{aligned}
2\,(\overline{KB'}\,.\,\overline{AB'} + \overline{AC'}\,.\,\overline{KC'} + \overline{BA'}\,.\,\overline{KA'} + \overline{CB'}\,.\,\overline{KB'} + \overline{BC'}\,.\,\overline{KC'} \\
+ \overline{CA'}\,.\,\overline{KA'})\cos\varphi = \overline{AC'}^2 - \overline{BC'}^2 + \overline{BA'}^2 - \overline{CA'}^2 + \overline{CB'}^2 - \overline{AB'}^2.
\end{aligned}$$

Na levé straně lze vždy dva a dva členy sloučiti; na pravé zavedeme strany a, b, c s ohledem na podmínku (α).

Tím získáme rovnici:

$$(2)\qquad 2\left(\overline{AB}\,.\,\overline{KC'}+\overline{BC}\,.\,\overline{KA'}+\overline{AC}\,.\,\overline{KB'}\right)\cos\varphi$$

$$=(a^2+b^2+c^2)\frac{\lambda+1}{\lambda-1}.$$

Nyní dělíme rovnici (2) rovnicí (1), a dostaneme již relaci mezi λ a φ.

$$(3)\qquad \operatorname{ctg}\varphi=\frac{a^2+b^2+c^2}{4\Delta}\cdot\frac{\lambda+1}{\lambda-1}.$$

Pro stručnost položme

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{4\Delta}=\mathrm{K}.$$

Této konstantě K lze dáti jiný elegantní tvar následující operací:

Dle Carnotovy věty jest

$$b^2+c^2=a^2+2bc\cos\alpha,$$
$$a^2+c^2=b^2+2ac\cos\beta,$$
$$a^2+b^2=c^2+2ab\cos\gamma.$$

Sečtěním těchto tří rovnic vyjde

$$a^2+b^2+c^2=2(bc\cos\alpha+ac\cos\beta+ab\cos\gamma).$$

Konstanta K jeví se nyní ve tvaru

$$\mathrm{K}=\frac{bc\cos\alpha+ac\cos\beta+ab\cos\gamma}{2\Delta}.$$

Vyjádříme-li postupně Δ oběma stranami a sinusem úhlu jimi sevřeného a provedeme-li dělení, objeví se K ve formě

$$\mathrm{K}=\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta+\operatorname{ctg}\gamma,$$

a rovnice (3) jest nyní

$$(4) \qquad \operatorname{ctg} \varphi = \frac{\lambda + 1}{\lambda - 1} (\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta + \operatorname{ctg} \gamma)\,^{*}).$$

II. *Mění-li λ svoji hodnotu, otáčejí se příčky $\overline{KA'}$, $\overline{KB'}$, $\overline{KC'}$ každá kol svého stálého bodu.*

Proveďme důkaz o příčce $\overline{KA'}$. Buď střed strany BC nazván A_0 a v něm buď vztyčena kolmice ku BC. Příčka $\overline{KA'}$ protíná kolmici v bodě X, který jest oním konstantním bodem.

Jest totiž

$$\overline{A_0X} = \overline{A_0A'} \operatorname{tg} \varphi$$

a

$$\overline{A_0A'} = \overline{BA_0} - \overline{A'B} = \frac{a}{2} + \frac{a}{\lambda - 1} = \frac{\lambda + 1}{\lambda - 1} \cdot \frac{a}{2}.$$

Tedy

$$\overline{A_0X} = \frac{\lambda + 1}{\lambda - 1} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{1}{K} \cdot \frac{\lambda - 1}{\lambda + 1}$$
$$= \frac{a}{2} \cdot \frac{1}{K}.$$

Vidno, že $\overline{A_0X}$ jest konstantní, a tedy bod X jest stálý; jím procházejí všecky příčky $\overline{KA'}$ odpovídající jednotlivým λ.

Tímtéž způsobem lze dokázati, že příčka $\overline{KB'}$ prochází stálým svým bodem Y, vzdáleným od strany AC o $\frac{b}{2} \cdot \frac{1}{K}$, a na příčce, tuto stranu kolmo půlící, se nalézajícím.

Taktéž příčka $\overline{KC'}$ jde svým pevným bodem Z, obdobně vůči straně AB ležícím.

III. *Jak již v důkazu věty I. uvedeno, svírají příčky $\overline{KA'}$, $\overline{KB'}$, $\overline{KC'}$ vzájemně stálé úhly, výplňky vnitřních úhlů trojúhelníka ABC.*

---

*) Již tento vzorec nasvědčuje souvislosti s Brocardovými výsledky. Pro Brocardův úhel jest totiž

$$\operatorname{ctg} \omega = \operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta + \operatorname{ctg} \gamma$$

čili vztaženo na naše pojednání

$$\operatorname{ctg} \omega = K$$

a

$$\operatorname{ctg} \varphi = \frac{\lambda + 1}{\lambda - 1} \operatorname{ctg} \omega.$$

Pohybují se zde tedy stálé úhly tak, že ramena jejich procházejí stálými body: musí tedy společný vrchol K oněch úhlů opisovati kružnici, jež jde body X, Y, Z.

A tu jsem nalezl překvapující výsledek: *Kružnice tato jest identická s kružnicí sedmi bodů či kružnicí Brocardovou,* u níž dosud toliko sedm jejích bodů bylo uvažováno: Střed kružnice opsané trojúhelníku ABC, dva body segmentarné, tři vrcholy trojúhelníka Brocardova a bod Lemoineův*).

Všecky tyto body vyskytují se i na kružnici naší a obdržíme je, klademe-li specielní hodnoty za λ.

Je-li $\lambda = -1$, jest bod K středem S opsané kružnice trojúhelníku ABC.

Je-li $\lambda = 0$ a $\lambda = \infty$, dostaneme body segmentarné O_1, O_2, pro něž

$$\operatorname{ctg} \varphi = \pm K.$$

Úhel tento zove se úhel Brocardův. Již tyto tři body stačí ku stvrzení identity obou kružnic.

Bod Lemoineův L obdrží se při $\lambda = 1$. Trojúhelník Brocardův je náš trojúhelník XYZ. Vlastnosti tohoto trojúhelníka jsou taktéž uvedeny ve zmíněném článku řed. Strnada**). Některé vlastnosti, jež pěstitelé této kružnice dosti namáhavě musili dokazovati, vyplývají poměrně snadno na základě principu, dle něhož kružnice naše vytvořena byla.

Uvedu ještě několik zajímavých výsledků, jichž jsem dosáhl.

IV. *Body K' a K'', jimž odpovídají reciproké hodnoty λ, stanoví*

---

*) Prosím, aby laskavý čtenář neobtěžoval si vyhledati ve zmíněném článku p. řed. Strnada význam těchto bodů.

**) Dovoluji si tuto poukázati na důkaz jedné vlastnosti: Trojúhelníky XYZ a ABC mají společné těžiště. Důkaz podává nám věta, již jsem uveřejnil v XXVII. roč. tohoto časopisu ve čl. „Příspěvek k mnohoúhelníkům", a jež, byvši použita pro trojúhelník, zní: Sestrojíme-li nad stranami trojúhelníka trojúhelníky vzájemně podobné, stanoví jich nové vrcholy trojúhelník, jenž má s původním těžiště společné.

Že jest zde

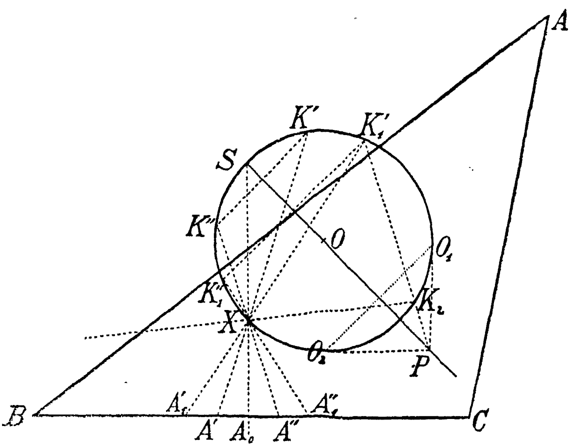
$$\triangle XBC \sim \triangle YAC \sim \triangle ZBA,$$

vidno z předešlých fakt.

tetivu konstantního směru. Zvolíme-li tedy jakési λ_1 a reciproké $\frac{1}{\lambda_1}$, vyhledáme jim body odpovídající K_1', K_1'', jest

$$K_1' K_1'' \parallel K' K''.$$

Důvody této vlastnosti jsou zřejmy z obrazce 2.



Obr. 2.

Tu jest

$$\sphericalangle K''XS = \sphericalangle A''XA_0\,,$$
$$\sphericalangle K'XS = \sphericalangle A'XA_0\,.$$

Ale $\sphericalangle A''XA_0 = \sphericalangle A'XA_0$, neboť příslušná λ mají reciprokou hodnotu, a jest $A_0A' = A_0A''$. Proto též jest

$$\sphericalangle K'XS = \sphericalangle K''XS.$$

Těmto dvěma stejně velkým úhlům obvodovým přísluší stejně velké oblouky. Tedy

$$arc\, SK' = arc\, SK''.$$

Taktéž

$$arc\, SK_1' = arc\, SK_1'',$$

pročež $K'K'' \parallel K_1'K_1''$ a zároveň rovnoběžno s tečnou ke kružnici v bodě S čili kolmo ku průměru kružnice bodem S vedeným.

Pro $\lambda = -1$ oba body K' a K'' se stotožňují, stanovíce tečnu ke kružnici; podobně pro Lemoineův bod při $\lambda = 1$. Jelikož obě tečny jsou rovnoběžny, musí spojnice dotyčných bodů býti průměrem čili střed S a bod Lemoinův L určují průměr naší kružnice*).

V. *Spojnice bodů K_1**) a K_2, jimž odpovídají λ stejně velká, ale opačného algebraického znamení, procházejí stálým bodem P.*

Nechť bodu K_1 odpovídá λ_1. Jest tedy příslušné φ_1 určeno vzorcem

$$\operatorname{ctg} \varphi_1 = K \frac{\lambda_1 + 1}{\lambda_1 - 1}.$$

Bodu K_2 nechť patří $\lambda_2 = -\lambda_1$, i jest příslušné φ_2 stanoveno vzorcem

$$\operatorname{ctg} \varphi_2 = K \frac{\lambda_1 - 1}{\lambda_1 + 1}.$$

Spojnice $K_1 K_2$ protíná průměr SL v bodě P. Tento bod je stálý. Je-li tomu tak, musí býti jeho mocnost vzhledem k naší kružnici konstantní. To dokážeme. Za příčinou zjednodušení klaďme

$$K_1P = l_1, \quad K_2P = l_2, \quad \text{a} \quad l_1 . l_2 = M.$$

Obvodovému úhlu $K_1XL = \varphi_1$ přísluší středový úhel $K_1OL = 2\varphi_1$.

Podobně jest

$$K_2OL = 2\varphi_2.$$

Nyní vidno, že

$$l_1 : l_2 = \sin 2\alpha_1 : \sin 2\alpha_2.$$

Mimo to z $\triangle K_1K_2O$ lze určiti

$$K_1 K_2 = l_1 - l_2 = 2r \sin (\alpha_2 - \alpha_1),$$

kde r značí poloměr kružnice Brocardovy.

Z uvedených dvou rovnic lze vypočísti l_1 i l_2 a výsledný jich součin jest

---

*) Tato vlastnost také jest uvedena ve zmíněném článku.

**) Bod K_1 jest identický s bodem K'_1.

$$M = 4r^2 \sin 2\varphi_1 \sin 2\varphi_2 \left[\frac{\sin(\varphi_2 - \varphi_1)}{\sin 2\varphi_2 - \sin 2\varphi_1}\right]^2.$$

Vypočítáme-li z hořejších cotangent $\cos\varphi_1$, $\sin\varphi_1$, $\cos\varphi_2$ a $\sin\varphi_2$ a dosadíme, vyjde po úpravě

$$M = 4r^2 K^2. \tag{4}$$

Vidno, že mocnost M bodu P jest konstantní, že tedy bod P je stálý, címž dokázána věta V.

Pro body Brocardovy, jichž $\lambda = 0$, ∞, přechází sečna $K_1 K_2$ v tečnu jdoucí taktéž bodem P.

Jest tedy stálý bod P vzhledem ke kružnici Brocardově polem polary stanovené Brocardovými body.

Princip jednoduchosti ve fysice.

Napsal

Ph. dr. **Vlad. Novák,**

docent české university v Praze.

(Dokončení.)

2. Zákon Boyle-Mariotteův uvádí se vzorcem

$$P.\, V = const.$$

čili objem plynu a tlak jeho jsou v nepřímém poměru, pokud ovšem temperatura jest stálou.

Jenom snaha po zjednodušení uvádí spojený zákon Boyle-Gay-Lussacův z formy

$$P.\, V = P_0\, V_0\, (1 + \alpha\, t)$$

na tvar

$$P.\, V = R.\, T$$

kladením

$$P_0\, V_0\, \alpha = R \quad \text{a} \quad T = t + 273, \quad \alpha = \frac{1}{273}.$$

Jednoduchý zákon přímky neb hyperboly rovnoosé ustupuje jindy zákonům složitějším a geometrický obraz závis-