Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Augustin Pánek

Úloha z počtu pravděpodobnosti

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 15 (1886), No. 6, 271--275

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/108895`

Z předcházejícího patrno, že Genocchi vším právem k tomu poukazoval (Comptes rendus 1884. p. 81), že v novějším čase (C. R. 1883 p. 1424) dokazují se věty jím dávno dokázané.

Končím vytknutím věty uvedené v Nouvelles Annales 1864 p. 170.:

Dána-li jest řada závitnic Pascalových vytvořených pomocí jediné kružnice a jež mají společný dvojný bod A; vedeme-li bodem tímto transversálu, jež protíná libovolnou závitnici v bodě P a opíšeme-li kružnici, jež se dotýká závitnice v bodu P a prochází-li bodem A: pak mají všechny tyto kružnice společnou chordálu, a když se otáčí zmíněná transversála okolo bodu A, otáčí se chordála též okolo A, kdežto druhý společný bod všech kružnic opisuje zase kružnici.

Úloha z počtu pravděpodobnosti.

Napsal

Augustin Pánek.

Dva vlaky U a V, jichž délky jsou u a v, pohybují se směrem ke společné křižovatce libovolnou rychlostí; je-li první vlak od ní vzdálen o a, druhý o b, při čemž $a > b$, a supponujeme-li, že konec vlaku V jest buď bližší buď vzdálenější křižovatky než počátek vlaku U, jaká jest pravděpodobnosť, že nastane u křižovatky srážka obou vlakův?

Nazvěmež rychlosti vlaků x, y i předpokládejme, že žádná není větší c. Neštěstí nastane, je-li hodnota poměrů rychlostí $\frac{x}{y}$ mezi $\frac{a+u}{b}$ a $\frac{a}{b+v}$, a poněvadž $a > b$, jest zlomek prvý větším druhého.

Budiž O počátkem pravoúhlé soustavy dvouosé a, máme-li zření k mezným případům zde vytčeným, totiž klademe-li $x = c$, $y = c$, rovnice ty představují dvé přímek, jež s osami soustavy činí čtverec OABC. Dále nabudeme z hořejších poměrův úměr $\frac{x}{y} = \frac{a+u}{b}$, $\frac{x}{y} = \frac{a}{b+v}$ aneb ve tvaru

$$(1) \qquad y = \frac{b}{a+u}\,x,$$

$$(2) \qquad y = \frac{b+v}{a}\,x,$$

rovnice to přímek, počátkem O jdoucích.

Přímky tvarů (1) a (2) protnou stranu $\overline{AB}$ čtverce OABC v bodech M, N aneb protne přímka (1) stranu $\overline{AB}$ téhož čtverce v bodě M′ a přímka (2) stranu $\overline{CB}$ v bodě N′. Podle toho jsou případy *příznivé* vyjádřeny, hledíc ku 1. podmínce, ploským obsahem trojúhelníku OMN a vzhledem ke 2. podmínce ploským obsahem čtyřúhelníku OM′BN′; pro obě podmínky vytčené jsou případy *možné* vyjádřeny ploským obsahem čtverce OABC $= c^2$.

Pravděpodobnosť žádaná P jest tedy vzhledem k prvnímu obrazci

$$(\mathrm{I}') \qquad \mathrm{P} = \frac{\triangle \mathrm{OMN}}{c^2}.$$

Ploský obsah trojúhelníku OMN možno dále vyjádřiti

$$\triangle \mathrm{OMN} = \triangle \mathrm{OAN} - \triangle \mathrm{OAM} = \frac{1}{2} c . \overline{\mathrm{AN}} - \frac{1}{2} c . \overline{\mathrm{AM}}$$

$$= \frac{c}{2} (\overline{\mathrm{AN}} - \overline{\mathrm{AM}}).$$

Je-li však $y = \overline{\mathrm{AN}}$, tedy $x = c$, jest dle rovnice (2)

$$\overline{\mathrm{AN}} = \frac{b+v}{a} c;$$

podobně, je-li $y = \overline{\mathrm{AM}}$, tedy $x = c$, jest dle rovnice (1)

$$\overline{\mathrm{AM}} = \frac{b}{a+u} c,$$

a proto bude

$$\triangle \mathrm{OMN} = \frac{c^2}{2} \left(\frac{b+v}{a} - \frac{b}{a+u} \right).$$

Nabude tedy pravděpodobnosť (I′), že nastane neštěstí, tvaru

$$(\mathrm{I}) \qquad \mathrm{P} = \frac{1}{2} \left(\frac{b+v}{a} - \frac{b}{a+u} \right).$$

Vzhledem k příslušnému obrazci druhému bude pravděpodobnosť žádaná

$$(\mathrm{II}') \qquad \mathrm{P}' = \frac{\mathrm{OM'BN'}}{c^2}.$$

Ploský obsah čtyřúhelníku OM'BN' lze však vyjádřiti

$$\mathrm{OM'BN'} = c^2 - (\triangle \mathrm{OAM'} + \triangle \mathrm{ON'C}) = c^2 - \frac{c}{2}\left(\overline{\mathrm{AM'}} + \overline{\mathrm{CN'}}\right).$$

Jako prve $\overline{\mathrm{AM}}$ má též $\overline{\mathrm{AM'}}$ hodnotu $\frac{b}{a+u}c$; je-li $\overline{\mathrm{CN'}} = x$, jest $y = \overline{\mathrm{OC}} = c$, tedy dle rovnice (2)

$$c = \frac{b+v}{a} \cdot \overline{\mathrm{CN'}}, \text{ tudíž } \overline{\mathrm{CN'}} = \frac{a}{b+v}c,$$

pročež jest

$$\mathrm{OM'BN'} = c^2 - \frac{c^2}{2}\left(\frac{b}{a+u} + \frac{a}{b+v}\right).$$

Pravděpodobnost (II'), že stane se neštěstí, nabude podoby

$$\text{(II)} \qquad \mathrm{P'} = 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{b}{a+u} + \frac{a}{b+v}\right).$$

Ploský obsah trojúhelníka v rovině.

Pro žáky středních škol napsal

Jan Slavík,

professor při akademickém gymnasii v Praze.

Podmínkami základními, jimiž trojúhelník v rovině jest dokonale určen, lze také vyjádřiti ploský obsah jeho a to tvary k logarithmickému počítání vhodnými.

Znamenají-li a, b, c strany, α, β, γ úhly protilehlé, v_a, v_b, v_c výšky ku stranám a, b, c příslušné a $\varDelta$ ploský obsah trojúhelníka, jest určiti $\varDelta$.

I. Stranou a přílehlými úhly.

Jak známo, jest

$$\varDelta = \frac{cv_c}{2} = \frac{bv_b}{2} = \frac{av_a}{2}. \qquad (1)$$

Znamenají-li x_c a y_c úseky strany c, jež vzniknou výškou v_c, bude $x_c = v_c : \operatorname{tg}\alpha$, $y_c = v_c : \operatorname{tg}\beta$,

$$c = x_c + y_c = \frac{v_c}{\operatorname{tg}\alpha} + \frac{v_c}{\operatorname{tg}\beta} = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta} v_c.$$

Že však $\qquad \operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta = \dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta},$

jest tedy

$$v_c = \frac{c \sin\alpha \sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}, \text{ tudíž } \varDelta = \frac{c^2}{2} \frac{\sin\alpha \sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}.$$

Obdobně

$$\varDelta = \frac{b^2}{2} \frac{\sin\alpha \sin\gamma}{\sin(\alpha+\beta)} = \frac{a^2}{2} \frac{\sin\beta \sin\gamma}{\sin(\beta+\gamma)}.$$

Poznamenání. K témuž výsledku lze dospěti poučkou sinusovou

$$c = \frac{a \sin\gamma}{\sin\alpha} = \frac{a \sin\gamma}{\sin(\beta+\gamma)}$$

a poněvadž $v_c = a \sin\beta$, bude

$$\varDelta = \frac{cv_c}{2} = \frac{a^2}{2} \frac{\sin\beta \sin\gamma}{\sin(\beta+\gamma)}. \qquad (2)$$

II. Dvěma stranama a úhlem jimi sevřeným.

Poněvadž

$v_c = b \sin\alpha = a \sin\beta$, $v_b = a \sin\gamma = c \sin\alpha$, $v_a = b \sin\gamma = c \sin\beta$,

obdržíme dosazením těchto hodnot do vzorce (1)

$$\varDelta = \frac{ab}{2} \sin\gamma = \frac{ac}{2} \sin\beta = \frac{bc}{2} \sin\alpha. \qquad (3)$$

III. Dvěma stranama a úhlem proti větší straně položeným.

Je-li $a > b$ a β určeno z rovnice $\sin\beta = \frac{b \cdot \sin\alpha}{a}$, jest

$$\varDelta = \frac{ab}{2} \sin(\alpha+\beta). \qquad (4)$$

IV. Třemi stranami.

Dle vzorce (3) jest

$$2\varDelta = ab \sin\gamma = ac \sin\beta = bc \sin\alpha.$$

Znásobením těchto rovnic nabudeme

$$8\varDelta^3 = a^2b^2c^2 \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma,$$

z čehož

$$abc = 2\varDelta \cdot \mathrm{M},$$

znamená-li

$$\mathrm{M} = \sqrt{\frac{2\varDelta}{\sin\alpha \sin\beta \sin\gamma}}.$$

Dělíme-li tuto rovnici postupně všemi třemi původními obdržíme

$$c = M \sin\gamma,\quad b = M \sin\beta,\quad a = M \sin\alpha,$$

z čehož

$$2s = a + b + c = M(\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma) = 4M \cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$$

$$2(s-a) = -a + b + c = M(-\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma) = 4M\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}$$

$$2(s-b) = a - b + c = M(\sin\alpha - \sin\beta + \sin\gamma) = 4M\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}$$

$$2(s-c) = a + b - c = M(\sin\alpha + \sin\beta - \sin\gamma) = 4M\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}.$$

Znásobením těchto rovnic a dosazením hodnoty za M, při čemž užijeme ještě vztahu

$$\sin\chi = 2\sin\frac{\chi}{2}\cos\frac{\chi}{2},$$

nabudeme známého vzorce

$$\varDelta = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}. \qquad (5)$$

Drobné zprávy.

Napsal

A. Strnad,

professor v Hradci Králové.

Z nauky o číslech. Dle *Legendre-a* značí E(x) celistvou část realné hodnoty x (l'entier contenu dans x); jest tedy ku př. $E\sqrt{10} = 3$. Vlastnostmi tohoto úkonu mnoho se zabýval *Buňakovský*, uveřejniv ve spisech akademie petrohradské řadu článků: „Démonstration de quelques propositions relatives à la fonction numérique E(x)." V článku jednom vyšetřil důmyslnými úvahami hodnotu výrazu $\sum\limits_{u=1}^{u=N} E\sqrt[r]{u}$.

Při $r = 2$ jest, položíme-li $n = E\sqrt{N} - 1$,

$$U = \sum_{u=1}^{u=N} E\sqrt{u} = \frac{(n+1)(6N - 2n^2 - 7n)}{6};$$

ku př. $E\sqrt{1} + E\sqrt{2} + E\sqrt{3} + \ldots + E\sqrt{20} = 54$ ($N = 20$, $n = 3$).