Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

Josef Kounovský

Zobecnění problému normál na elipse

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 58 (1929), No. 1-2, 37--41

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/108906

Zobecnění problému normál na elipse.

Dr. *Josef Kounovský*.

1. Problém normál kuželosečky možno zobecniti úlohou: *V rovině kuželosečky sestrojiti přímky, jež procházejíce daným bodem mimo kuželosečku protínají ji v daném úhlu.*

Budiž dána elipsa E oběma osami, ostrý úhel α, v kterém mají žádané přímky elipsu protínati a to v určitém smyslu (v obr. jest vyznačen šípem ve smyslu pohybu hodinových ručiček od tečny k žádané přímce) a bod o, jímž mají žádané přímky procházeti. Kineticky vyjádřeno pohybuje se neproměnný úhel α tak, že jedno rameno prochází pevným bodem o a druhé rameno obaluje danou křivku E. Jinak formulováno, mají se sestrojiti bodem o paprsky, známe-li jich úhel dopadu $R - \alpha$ na elipsu.

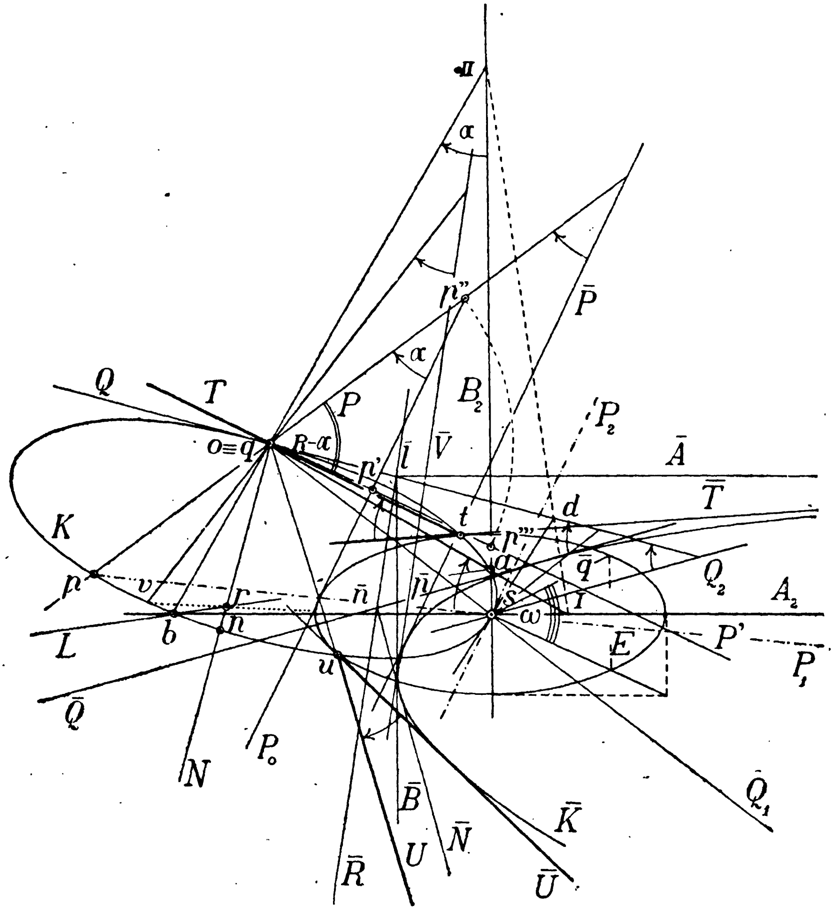
Je-li P_0 proměnná tečna elipsy, sestrojme bodem o přímku $P' \perp P_0$ a přímku P svírající s P_0 v daném smyslu daný úhel α. Jsou-li p' a p'' průsečíky přímek P' a P s tečnou P_0, jest geometrickým místem paty p' úpatnice C' elipsy pro bod o a geometrickým místem průsečíku p'' křivka C'', jiż můžeme nazvati šikmou úpatnicí elipsy. Pravoúhlý $\triangle\ op'\,p''$ se stálým úhlem α zachová ve všech polohách svou podobu, poměr stran $\overline{op'} : \overline{op''} = \sin\alpha$ jest stálý. Otočíme-li paprskový svazek $o\,(P\ldots)$ ve smyslu úhlu α o úhel $R - \alpha$, obdržíme paprskový svazek $o\,(P'\ldots)$, bod p'' se otočí do polohy p''' a křivka C'' do křivky C'''. Jelikož $\overline{op'} : \overline{op'''} = \sin\alpha$ jest stálý poměr, jest křivka C''' homotetická s úpatnicí C' v poměru $\sin\alpha$. Tedy:

Sestrojíme-li libovolným bodem paprsky protínající tečny dané křivky v daném úhlu, jest geometrickým místem příslušných průsečíků křivka podobná úpatnici dané křivky pro ten bod v poměru sinu daného úhlu.

Průsečíky šikmé úpatnice C'' s danou křivkou poskytují řešení našeho problému pro libovolnou křivku.

2. Paty normál procházejících bodem o na elipsu E sestrojují se jako její průsečíky s rovnoosou hyperbolou Apolloniovou takto vytvořenou: Vytkneme proměnnou dvojici sdružených průměrů elipsy $P_1\,P_2$ a sestrojíme bodem o kolmici $P' \perp P_2$; průsečík kolmice P' s průměrem P_1 jest bodem pomocné hyperboly, která jest

vytvořena projektivními paprskovými svazky $o\,(P'\ldots)\,\overline{\wedge}\,s\,(P_1\ldots)$, kde s jest střed elipsy; svazek $o\,(P'\ldots)$ jest kolmý ke svazku $s\,(P_2\ldots)$ a s ním shodný. Hyperbola prochází vrcholy o, s svazků a úběžnými body na osách elipsy.



Paprskový svazek $o\,(P\ldots)$ vzniká otočením svazku $o\,(P'\ldots)$ o úhel $R - \alpha$ v opačném smyslu úhlu α. I jest patrný projektivní vztah svazků $o\,(P\ldots)\,\overline{\wedge}\,s\,(P_1\ldots)$; jich výtvarem jest geometrické místo bodu $p\ldots$, kuželosečka K, jež prochází bodem o a středem s. Kuželosečka K jest tedy geometrickým místem průsečíku průměru dané elipsy s přímkou, jež procházejíc bodem o svírá s průměrem jemu sdruženým daný úhel α. Průsečíky kuželosečky K s danou elipsou, v obr. body t a u, poskytují řešení vytčeného úkolu; přímky $T \equiv ot$ a $V \equiv ou$ protínají elipsu v úhlu α.

Budiž ω úhel, jejž svírají oba stejně dlouhé sdružené průměry dané elipsy; úhel dvojic jejích sdružených průměrů pohybuje se v mezích ω a R. Druh kuželosečky K závisí na obou úhlech α a ω. Je-li $\alpha < \omega$, pak jest K elipsou, ježto konstrukce poskytuje všechny body křivky v konečné vzdálenosti. Pro $\alpha = \omega$ jest K parabolou, majíc jeden bod v nekonečnu, a to na jednom z obou sdružených průměrů stejně dlouhých. Při $\alpha > \omega$ vyskytnou se na elipse dvě dvojice sdružených průměrů, souměrné podle jejích os, jež svírají úhel α; ty poskytnou dva nekonečně vzdálené body kuželosečky K, která jest v tomto případě hyperbolou; pro $\alpha = 90^0$ stává se hyperbolou Apolloniovou.

Sestrojme poláru $\overline{Q}$ bodu o vzhledem k elipse E a vytkněme její dvojici sdružených průměrů $Q_1 Q_2$, kde Q_1 prochází bodem o a $Q_2 \parallel Q$; i jest $o \equiv q$ bodem kuželosečky K, jevícím se jako průsečík průměru Q_1 s přímkou Q, jež procházejíc bodem o protíná průměr Q_2 v úhlu α. Přímka Q jest tedy tečnou kuželosečky K v bodě o jakožto paprsek přiřaděný spojnicí so vrcholů obou projektivních svazků, čítáme-li ji do svazku o vrcholu s.

Sestrojíme-li bodem o přímku svírající s malou osou B_2 elipsy úhel α, protíná velkou osu v bodě b kuželosečky K; a přímka $oa \perp ob$ svírajíc s velkou osou A_2 elipsy úhel α protíná malou osu v bodě a na K.

Tím jest kuželosečka K úplně určena: prochází body $o\,s\,a\,b$ a dotýká se v bodě o přímky Q. Snadno sestrojíme tečnu v bodě s, procházející direkčním středem d obou projektivních svazků, který jest určen na tečně Q spojnicí $I\,II$, plynoucí ze známé křížové konstrukce kuželosečky; $I \equiv (\overline{oa}, \overline{sb})$, $II \equiv (\overline{ob}, \overline{sa})$. Involucí sdružených průměrů sestrojíme osy. Je-li K parabolou nebo hyperbolou, sestrojí se pomocí prvků úběžných.

3. Paty normál procházejících bodem o na danou elipsu sestrojují se duálně k dříve uvedené konstrukci pomocnou parabolou Steiner-Pelzovou, jež jest polárně reciprokou křivkou uvedené Apolloniovy hyperboly vzhledem k základní kuželosečce. Otáčí-li se přímka P kolem bodu o, obaluje její kolmá sdružená polára vzhledem k základní elipse tuto pomocnou parabolu, která se dotýká os uvažované kuželosečky a poláry $\overline{Q}$. Společné tečny obou křivek určují dotyčnými body na dané kuželosečce paty žádaných normál.

Sestrojme v našem obrazci polárně reciprokou parabolu $\overline{K}$ k pomocné kuželosečce K vzhledem k základní elipse E. Její proměnná tečna $\overline{P}$, polára to bodu p, který leží na průměru P_1, jest rovnoběžná s průměrem P_2 a svírá s přímkou P daný úhel α. Společné tečny paraboly $\overline{K}$ a dané elipsy, v obr. $\overline{T}$ a $\overline{U}$, určují dotyčnými body t a u průsečíky elipsy s přímkami vyhovujícími dané podmínce.

Pól $\bar{q}$ tečny Q kuželosečky K vzhledem k elipse, jest dotyčným bodem pomocné paraboly na tečně $\bar{Q}$.

Konstruktivně důležité jsou její tečny $\bar{A}$ a $\bar{B}$, poláry průsečíků a a b kuželosečky K s osami dané elipsy; $\bar{A} \perp \bar{B}$ a jejich průsečíkem $\bar{l}$ prochází řídicí přímka $\bar{R}$ paraboly.

Sestrojme normálu $N \perp Q$ kuželosečky K a na ní její bod n. Polára $\bar{N} \perp \bar{Q}$, protože přímky $N \perp Q$ svírají s N resp. $\bar{Q}$ daný úhel α. Průsečíkem $\bar{n} \equiv (\bar{N}, \bar{Q})$ prochází rovněž řídicí přímka paraboly, tedy $R \equiv \bar{l}\,\bar{n}$, kteráž jest polárou průsečíku $r \equiv (\overline{ab}, \overline{nq})$.

Bod r jest pólem involuce, kterou vytíná na kuželosečce K pravoúhlá involuce paprsková o středu o; dvě její dvojice jsou $\overline{oa}, \overline{ob}; \overline{on}, \overline{oq}$. Každá dvojice této bodové involuce na K poskytuje dvě vzájemně kolmé tečny pomocné paraboly, protínající se na její přímce řídicí. Vytkneme-li bodem r tětivu $\overline{sv}$ na K, příslušejí dvojici bodů s a v úběžná tečna paraboly a její tečna vrcholová $\bar{V} \parallel \bar{R}$.

4. Tím jsou dány vzájemně související konstrukce důležitých prvků obou pomocných polárně reciprokých křivek, jež řeší vytčený úkol pro elipsu. Při hyperbole a parabole jest řešení zcela obdobné. Zobecnění problému normál možno takto vyjádřiti:

Otáčí-li se v rovině kuželosečky přímka kolem pevného bodu, protíná průměr kuželosečky sdružený k průměru, s nímž přímka svírá daný úhel (i smyslem) v bodě, jehož geometrickým místem jest kuželosečka; její průsečíky s danou kuželosečkou jsou body, jichž spojnice s uvažovaným pevným bodem protínají kuželosečku v daném úhlu. Přímka sestrojená pólem otáčející se přímky a protínající ji v tomto daném úhlu obaluje parabolu, jejíž společné tečny s danou kuželosečkou řeší dotyčnými body na ní tentýž úkol.

Křivý svazek tečen $\bar{P}$ paraboly $\bar{K}$ jest patrně kolmý na svazek $o\,(P' \ldots)$ a tedy rovnoběžný se svazkem tečen paraboly Steiner-Pelzovy, přiřaděné bodu o, čímž dáno jest samostatně její projektivní zdůvodnění (bez polárnosti s křivkou K). Každým dvěma vzájemně kolmým přímkám ve svazku o vrcholu o jsou přiřaděny vzájemně kolmé tečny této paraboly.

Vyvozených vztahů možno použíti při pohybu smykavém jako speciálním pohybu kardioidickém, při němž po evolutě dané elipsy jako poloidě nehybné kotálí její tečna jako poloida hybná. Pohyb ten jest dán danou elipsou jako trajektorií vrcholu pohybujícího se pravého úhlu, když jedno rameno zůstává normálou kuželosečky; snadno posoudíme, že okamžitý pól jest v příslušném středu křivosti elipsy. Přímka procházející vrcholem pravého úhlu a protínající v libovolném úhlu danou elipsu obaluje křivku 4. třídy, jejíž tečny z libovolného bodu vycházející jsou dány zobecněním problému normál. Dotyčný bod v každé poloze jest patou kolmice na přímku příslušným středem křivosti (pólem). A libovolná přímka takové pohybující se nepromĕnné soustavy obaluje její ekvidistantu.

*

Généralisation du problème des normales pour l'ellipse.

(Extrait de l'article précédent.)

Cette généralisation est énoncée par le problème suivant: Mener, par un point donné dans le plan de l'ellipse, des droites coupant la courbe sous un angle donné (en grandeur et en sens). La construction est effectuée de deux manières à l'aide de deux coniques polaires réciproques par rapport à l'ellipse donnée; ces coniques sont classifiées et déterminées par des conditions simples. Ces deux courbes sont l'analogie de l'hyperbole d'Apollonius et de la parabole de Steiner-Pelz, dont on se sert dans les deux constructions réciproques du problème des normales des coniques.