Úlohy

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 27 (1898), No. 5, 325--372

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/108947

Úlohy.

Úloha 24.

Do půlkruhu vepsán lichoběžník, jehož větší půdicí jest průměr; menší půdice rovná se dvojnásobnému rameni. Otočí-li se tento lichoběžník kolem průměru, který jest povrch a obsah tělesa otočením vytvořeného?

Řed. *A. Strnad.*

Řešení. (Zaslal p. *Václav Novák*, stud. VII. tř. r. v Ječné ulici v Praze).

Budiž *abcd* žádaný lichoběžník, v němž

$$\overline{ab} = 2r\,, \quad \overline{ad} = \overline{bc} = s\,, \quad \overline{cd} = 2s\,;$$

střed půdice $\overline{ab}$ buď v o, $\overline{cd}$ rozpůleno bodem m. Označme ještě

$$\overline{om} = \varrho\,, \quad \sphericalangle\, com = \alpha\,.$$

Z trojúhelníka *com* plyne

$$s = r \sin\alpha\,,$$

z trojúhelníka *abc* pak vychází

$$s = 2r \sin\frac{R - \alpha}{2}\,;$$

k určení úhlu α máme tudíž rovnici

$$\sin\alpha = 2\sin\frac{R - \alpha}{2}\,.$$

Tuto přetvořme způsobem následujícím

$$\sin\alpha = 2\sqrt{\frac{1+\cos(R-\alpha)}{2}},$$

$$\sin\alpha = 2\sqrt{\frac{1+\sin\alpha}{2}},$$

$$\sin^2\alpha - 2\sin\alpha - 2 = 0.$$

Jest tedy

$$\sin\alpha = \sqrt{3} - 1,$$

$$\cos\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{6}(\sqrt{3}-1);$$

odtud ustanovíme

$$s = r(\sqrt{3}-1),$$

$$\varrho = \frac{r}{2}\sqrt{6}(\sqrt{3}-1),$$

$$v = r - s = r(2-\sqrt{3}).$$

Bude pak povrch tělesa vyjádřen

$$P = 2\pi\varrho\,.\,2s + 2\,.\,\pi\varrho s = 6\,\pi\varrho s,$$

$$P = 6\pi r^2\sqrt{6}(2-\sqrt{3});$$

obsah stanoven vzorcem

$$T = \pi\varrho^2\,.\,2s + 2\,.\,\frac{1}{3}\,\pi\varrho^2 v$$

$$= \frac{2}{3}\,\pi\varrho^2(3s+v),$$

posléze $T = 2\pi r^3(5\sqrt{3}-8)$.

Úloha 25.

Ke kružnicím poloměrů r_1, r_2 vně se dotýkajícím vedeny společné vnější tečny, omezené body dotyčnými. Otočí-li se tento útvar kolem své osy souměrnosti, který jest povrch a obsah tělesa otočením vytvořeného?

Řed. *A. Strnad.*

Řešení. (Zaslal p. *Gabriel Tůma*, stud. VII. tř. r. v Budějovicích).

Těleso otočením vzniklé omezeno jest

a) pláštěm kuželovým poloměrů ϱ_1, ϱ_2 a strany $t = \varrho_1 + \varrho_2$,

b) vrchlíkem poloměru ϱ_1 a výšky v_1,

c) " " ϱ_2 " " v_2.

Znajíce poloměry r_1, r_2 kružnic se dotýkajících, ustanovíme jich střednou

$$s = r_1 + r_2,$$

mimo to pak

$$t^2 = (r_1 + r_2)^2 - (r_1 - r_2)^2 = 4 r_1 r_2;$$

dále pak jest

$$\frac{\varrho_1}{r_1} = \frac{\varrho_2}{r_2} = \frac{t}{s}, \quad \varrho_1 = \frac{2r_1\sqrt{r_1 r_2}}{r_1 + r_2}, \quad \varrho_2 = \frac{2r_2\sqrt{r_1 r_2}}{r_1 + r_2}.$$

Předpokládáme-li $r_1 > r_2$, jest

$$v_1 = r_1 + \sqrt{r_1^2 - \varrho_1^2} = \frac{2r_1^2}{r_1 + r_2},$$

$$v_2 = r_2 - \sqrt{r_2^2 - \varrho_2^2} = \frac{2r_2^2}{r_1 + r_2}.$$

Výšku u kužele dotyčného ustanovíme z podmínky

$$\frac{u}{t} = \frac{t}{s}, \quad u = \frac{4r_1 r_2}{r_1 + r_2}.$$

Po těchto přípravných výpočtech přikročme ku vlastní úloze. Povrch tělesa rotačního vyjádříme takto:

$$\begin{aligned} \mathrm{P} &= \pi(\varrho_1 + \varrho_2)t + 2\pi r_1 v_1 + 2\pi r_2 v_2 \\ &= 4\pi r_1 r_2 + 4\pi \frac{r_1^3 + r_2^3}{r_1 + r_2} \end{aligned}$$

čili

$$\mathrm{P} = 4\pi(r_1^2 + r_2^2).$$

Rovná se tudíž povrch tento součtu povrchů obou koulí kuželem obepjatých.

Obsah T tělesa rotačního skládá se z komolého kužele a dvou úsečí kulových; jest pak

$$T = \frac{\pi}{3} u (\varrho_1^2 + \varrho_1\varrho_2 + \varrho_2^2) + \frac{\pi}{2} (\varrho_1^2 v_1 + \varrho_2^2 v_2)$$

$$+ \frac{\pi}{6} (v_1^3 + v_2^3).$$

Dosadíme-li hodnoty dříve ustanovené, obdržíme po náležitém zjednodušení

$$T = \frac{4}{3} \pi \frac{r_1^5 - r_2^5}{r_1^2 - r_2^2}.$$

Úloha 26.

S vrcholů trojúhelníka abc spuštěny kolmice na libovolnou přímku X; jich patami a_1, b_1, c_1 vedeny po řadě kolmice $A \perp bc$, $B \perp ca$, $C \perp ab$. Dokázati, že přímky A, B, C protínají se v jediném bodě.

Řed. *A. Strnad.*

Řešení. (Zaslal p. *Otakar Lhotský,* stud. VII. tř. gymn. v Opavě).

Buďtež vrcholy trojúhelníka určeny souřadnicemi

$$a\,(x_1, y_1),\ b\,(x_2, y_2),\ c\,(x_3, y_3);$$

jich průměty v ose X jsou a_1, b_1, c_1 a těmi procházejí po řadě přímky $\qquad A \perp bc,\ B \perp ca,\ C \perp ab.$

Rovnice těchto přímek jsou:

$$A \equiv y + \frac{x_2 - x_3}{y_2 - y_3}(x - x_1) = 0$$

$$B \equiv y + \frac{x_3 - x_1}{y_3 - y_1}(x - x_2) = 0$$

$$C \equiv y + \frac{x_1 - x_2}{y_1 - y_2}(x - x_3) = 0$$

čili

$$A \equiv (x_2 - x_3)\,x + (y_2 - y_3)\,y - x_1\,(x_2 - x_3) = 0$$
$$B \equiv (x_3 - x_1)\,x + (y_3 - y_1)\,y - x_2\,(x_3 - x_1) = 0$$
$$C \equiv (x_1 - x_2)\,x + (y_1 - y_2)\,y - x_3\,(x_1 - x_2) = 0.$$

Jelikož

$$A + B + C = 0,$$

protínají se tyto tři přímky v bodě jediném.

Úloha 27.

V ose X dán stálý bod a a mimo to v ní vytčeny body c, e, v ose $Y \perp X$ body b, d tak, že

$$ab \perp bc \perp cd \perp de.$$

Které jest geom. místo bodu m půlícího délku bc, bodu n půlícího cd a bodu p půlícího de?

Řed. *A. Strnad.*

Řešení. (Zaslal p. *Václav Špaček,* stud. VIII. tř. gymn. v Příbrami.)

Budiž $\overline{oa} = a$, $\sphericalangle\, oab = \alpha$; potom jest

$$\overline{ob} = a \operatorname{tg} \alpha, \qquad \overline{oc} = -a \operatorname{tg}^2 \alpha,$$

$$\overline{od} = -a \operatorname{tg}^3 \alpha, \quad \overline{oe} = a \operatorname{tg}^4 \alpha.$$

Bod *m* půlící délku $\overline{bc}$ má souřadnice

$$x = -\frac{a}{2} \operatorname{tg}^2 \alpha, \quad y = \frac{a}{2} \operatorname{tg} \alpha;$$

rovnici geom. místa jeho nalezneme vyloučivše α z obou posledních rovnic. Bude pak

$$y^2 = -\frac{a}{2}\, x,$$

pročež tímto místem jest *parabola*.

Pro bod *n* půlící $\overline{cd}$ ustanovíme souřadnice

$$x = -\frac{a}{2} \operatorname{tg}^2 \alpha, \qquad y = -\frac{a}{2} \operatorname{tg}^3 \alpha;$$

odtud plyne rovnice geom. místa

$$ay^2 = -x^3,$$

rovnice to *semikubické paraboly.*

Bod p půlící $\overline{de}$ má souřadnice

$$x = \frac{a}{2}\operatorname{tg}^4\alpha, \quad y = -\frac{a}{2}\operatorname{tg}^3\alpha;$$

vyloučením α obdržíme

$$y^4 = \frac{a}{2}x^3$$

akožto rovnici geom. místa bodu p, kterýmž místem jest zvláštní *parabola 4. stupně.*

Úloha 28.

V přímce P dány body a, b, c; sestrojena kružnice K, která se přímky P v bodě c dotýká, a vedeny k ní z bodů a, b tečny. Které jest geom. místo průsečíku těchto tečen, mění-li se kružnice K? Které, mění-li se bod dotyčný c a zůstává-li stálým poloměr kružnice K?

Řed. *A. Strnad.*

Řešení. (Zaslal p. *Frant. Záviška,* stud. VIII. tř. gymn. v Brně).

a) Druhá tečna vedená bodem a dotýkej se kružnice K v bodě m, tečna z b vycházející měj dotyčný bod n; průsečík obou tečen jest p. Jsou pak v platnosti relace:

$$am = ac,\ bn = bc,\ pm = pn.$$

Mimo to jest

$$ap = ac \mp pm,\ bp = bc + pn,$$

kdež svrchní znaménko sluší klásti, leží-li body a, b na téže straně bodu c; spodní pak, jsou-li body ty na různých stranách od c. V prvním případě jest

$$ap + bp = ac + bc = \text{const},$$

ve druhém

$$ap - bp = ac - bc = \text{const},$$

předpokládáme-li stálým bod c; příslušná geometrická místa jsou ellipsa a hyperbola.

b) Není-li stálým bod c, nýbrž poloměr kružnice K, zvolme $\overline{ab} = 2k$ osou X, symetrálu délky ab osou Y; znamenejme stručně

$$\overline{ac} = a, \ \overline{bc} = b, \ \overline{ab} = c.$$

Rovnice tečen z bodů a, b jsou

$$y = \mathrm{A}(x + k), \qquad y = -\mathrm{B}(x - k);$$

A, B jsou tangenty úhlů, jichž polovicím náleží tangenty $\frac{r}{a}$, $\frac{r}{b}$. Proto jest

$$\mathrm{A} = \frac{2ar}{a^2 - r^2}, \quad \mathrm{B} = \frac{2br}{b^2 - r^2},$$

z čehož

$$a = \frac{r}{\mathrm{A}}\left[1 \pm \sqrt{1 + \mathrm{A}^2}\right], \ b = \frac{r}{\mathrm{B}}\left(1 \pm \sqrt{1 + \mathrm{B}^2}\right)$$

nebo

$$a = \frac{r}{y}\left[x + k \pm \sqrt{(x + k)^2 + y^2}\right],$$

$$b = \frac{r}{y}\left[x - k \pm \sqrt{(x - k)^2 + y^2}\right].$$

Ježto však $a \pm b = \text{const} = c$, obdržíme odtud rovnici žádaného geom. místa.

Úloha 29.

Ve které výši nad středem okrouhlého stolu jest zavěsiti lampu, aby osvětlovala okraj stolu co nejvíce?

Řed. *A. Strnad.*

Řešení. (Zaslal p. *Bohumil Člupek,* stud. VII. tř. real. v Prostějově).

Je-li x výška lampy nad stolem, s přepona trojúhelníka o odvěsnách x a r, α úhel v tomto trojúhelníku proti x položený, k určitá konstanta, jest intensita osvětlení libovolného místa na okraji stolu

$$J = \frac{k \sin \alpha}{s^2} = \frac{kx}{s^3} = \frac{kx}{\sqrt{(x^2 + r^2)^3}} .$$

Výraz tento dosáhne maxima, bude-li minimem výraz

$$V = \frac{(x^2 + r^2)^3}{x^2} .$$

Použitím počtu differencialného obdržíme podmínku

$$\frac{dV}{dx} = 0$$

čili

$$(x^2 + r^2)^3 . 2x - (x^2 + r^2)^2 . 6x^3 = 0.$$

Odtud vypočítáme realnou hodnotu

$$x = \frac{r}{2} \sqrt{2} ,$$

při které

$$J_{max} = \frac{k}{18 r^2} \sqrt{6} .$$

Úloha 30.

Dvě ladičky o malý půltón od sebe rozdílné a spoluznějící vydají v 10 sekundách 36 rázů. Jest ustanoviti tóny ladiček.

Lad. Fahoun, kand. prof. v Praze.

Řešení. (Zaslal p. *Bohumil Hamrle,* stud. VII. tř. r. na Malé Straně v Praze).

Je-li 36 počet rázů v 10 sek., je v jedné sek. rázů 3·6; má-li pak jeden ton výchvějů n_1, druhý n_2, jest

$$n_1 - n_2 = 3{\cdot}6.$$

Poněvadž pak tony ty liší se od sebe o malý půlton, jest

$$n_1 = \frac{25}{24} n_2 .$$

Z obou rovnic ustanovíme

$$n_1 = 90,\ n_2 = 86{\cdot}4,$$

takže tony ladiček jsou

$$fis^{-1}\,(90) \text{ a } f^{-1}\,(86{\cdot}4).$$

Úloha 31.

Rozdělíme-li šesticiferné číslo ve dvě skupiny po 3 cifrách, liší se jedna skupina od druhé opačným pořádkem cifer. Součet dvojmocí obou skupin jest o 46359 menší než trojnásobné číslo dané. Rozdělíme-li číslo toto ve 3 skupiny dvojmístné, mají se k sobě jako 4 : 11 : 7. Které jest to číslo?

Řed. *A. Strnad.*

Řešení. (Zaslal p. *Bedřich Novák,* stud. VI. tř. r. na Král Vinohradech).

Jsou-li x, y, z číslice čísla hledaného, jest dle podmínek

$$(10^2x + 10y + z)^2 + (10^2z + 10y + x)^2 + 46359$$
$$= 3\,(10^5x + 10^4y + 10^3z + 10^2z + 10y + x),$$
$$(10^2x + y) : 11z : (10y + x) = 4 : 11 : 7.$$

Z úměr posledních vyhledáme

$$y = 2x,\ z = 3x$$

a dosadivše tyto hodnoty do rovnice první, přijdeme k rovnici

$$130x^2 - 47x + 51 = 0,$$

z níž ustanovíme

$$x = \frac{407 \pm 373}{260}\,.$$

Úloze vyhovují pouze hodnoty celistvé a kladné

$$x = 3,\ y = 6,\ z = 9;$$

pročež jest hledané číslo 369963.

Úloha 32.

Kterého čísla dvojmoc shoduje se s číslem tím ve dvou posledních číslicích? Řed. *A. Strnad.*

Řešení. (Zaslal p. *Karel Prokeš,* stud. VII. tř. gymn. na Malé Straně v Praze).

Budiž číslo

$$N = 10^2 n + 10a + b;$$

na poslední dvě číslice jeho dvojmoci má vliv pouze dvojčlen $20ab + b^2$. Jest tedy podmínkou

$$20\,ab + b^2 - 100\,m = 10\,a + b,$$

kdež m značí počet set, je-li $20\,ab + b^2 > 100$. Aby b i b^2 končily stejnou číslicí, musí b míti některou z hodnot 0, 1, 5, 6.

a) Je-li $b = 0$, musí též $a = 0$.

b) Je-li $b = 1$, má býti

$$20a + 1 - 100m = 10a + 1$$

$$a = 10m$$

$$a = 0.$$

c) Je-li $b = 5$, obdržíme

$$100a + 25 - 100m = 10a + 5$$

$$9a = 10m - 2,$$

čemuž vyhovuje $m = 2$, $a = 2$.

d) Při $b = 6$ vedeni jsme k rovnici

$$120a + 36 - 100m = 10a + 6$$

$$11a = 10m - 3,$$

které vyhoví

$$m = 8, \quad a = 7.$$

Úloze tudíž činí zadost čísla ukončená na

00, 01, 25, 76.

Úloha 33.

Který jest součet a) dvojmocí, b) čtvrtých mocnin všech kořenů rovnice

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1 = 0?$$

Řed. *A. Strnad.*

Řešení. (Zaslal p. *Frant. Velísek,* stud. VII. tř. gymn. v Uh. Hradišti).

a) Jelikož

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -a,$$

$$x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_1 x_4 + x_2 x_3 + x_2 x_4 + x_3 x_4 = b,$$

$$x_1 x_2 x_3 + x_1 x_2 x_4 + x_1 x_3 x_4 + x_2 x_3 x_4 = -a,$$

$$x_1 x_2 x_3 x_4 = 1,$$

jest

$$(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + 2(x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_1 x_4 + x_2 x_3 + x_2 x_4 + x_3 x_4) = a^2$$

a tedy

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = a^2 - 2b.$$

b) Zdvojmocníme-li tuto rovnici, obdržíme

$$x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + x_4^4 + 2(x_1^2 x_2^2 + x_1^2 x_3^2 + x_1^2 x_4^2 + x_2^2 x_3^2 + x_2^2 x_4^2 + x_3^2 x_4^2) = a^4 - 4a^2 b + 4b^2.$$

Jest však dle hořejších podmínek

$$x_1^2 x_2^2 + x_1^2 x_3^2 + x_1^2 x_4^2 + x_2^2 x_3^2 + x_2^2 x_4^2 + x_3^2 x_4^2 + 2(x_1^2 x_2 x_3 + x_1^2 x_2 x_4 + x_1^2 x_3 x_4 + x_2^2 x_1 x_3 + x_2^2 x_1 x_4 + x_2^2 x_3 x_4 + x_3^2 x_1 x_2 + x_3^2 x_1 x_4 + x_3^2 x_2 x_4 + x_4^2 x_1 x_2 + x_4^2 x_1 x_3 + x_4^2 x_2 x_3) = b^2;$$

mimo to jest

$$x_1^2 x_2 x_3 + x_1^2 x_2 x_4 + x_1^2 x_3 x_4 = \frac{x_1}{x_4} + \frac{x_1}{x_3} + \frac{x_1}{x_2}$$

$$= \frac{x_1 x_2 x_3 + x_1 x_2 x_4 + x_1 x_3 x_4}{x_2 x_3 x_4} = \frac{-a - x_2 x_3 x_4}{x_2 x_3 x_4}$$

$$= -ax_1 - 1$$

a proto výraz v poslední závorce obsažený má hodnotu

$$-[a(x_1+x_2+x_3+x_4)+4]=a^2-4.$$

Jest tudíž

$$x_1^4+x_2^4+x_3^4+x_4^4+2b^2-4(a^2-4)=a^4-4a^2b+4b^2$$

čili

$$x_1^4+x_2^4+x_3^4+x_4^4=a^4-4a^2b+4a^2+2b^2-16.$$

Úloha 34.

Stanoviti kořeny rovnice stupně třetího

$$x^3-10x+\sqrt{2}+\sqrt{3}=0,$$

předpokládáme-li pouze známost řešení rovnic stupně druhého.

R.

Řešení. (Zaslal p. *Otokar Grössl,* stud. VI. tř. r. na král. Vinohradech).

Znásobme danou rovnici x, načež bude

$$x^4-10x^2=-(\sqrt{3}+\sqrt{2})x$$

aneb v jiné podobě

$$x^4-(5+2\sqrt{6})x^2=(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2x^2-(\sqrt{3}+\sqrt{2})x.$$

Přičteme-li na obou stranách rovnice této

$$\frac{1}{4}(5+2\sqrt{6}),$$

pomníce, že

$$5+2\sqrt{6}=(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}},$$

obdržíme úplný čtverec, takže pak

$$x^2-\frac{1}{2}(5+2\sqrt{6})=\pm\left[(\sqrt{3}-\sqrt{2})x-\frac{1}{2}(5+2\sqrt{6})\right].$$

Vzhledem k hornímu znaménku dostaneme kořen

$$x_1=\sqrt{3}-\sqrt{2},$$

rovnici vyhovující; vzhledem k dolnímu znaménku, obdržíme z příslušné kvadratické rovnice druhé dva kořeny

$$x_{2,3} = \frac{1}{2}\left(-\sqrt{3} + \sqrt{2} \pm \sqrt{25 + 6\sqrt{6}}\right).$$

Úloha 35.

Řešiti jest rovnici

$$2^{3x} - 8 \,.\, 2^{-3x} - 6\,(2^x - 2^{1-x}) = 1.$$

R.

Řešení. (Zaslal p. *Karel Hýbner,* stud. VII. tř. gymn. v Litomyšli).

Dejme rovnici podobu

$$2^{3x} - \frac{8}{2^{3x}} - 6\left(2^x - \frac{2}{2^x}\right) = 1$$

a položme

$$2^x - \frac{2}{2^x} = z;$$

potom, ztrojmocníme-li, nalezneme

$$2^{3x} - \frac{8}{2^{3x}} = z^3 + 6z.$$

Tím rovnice daná přechází v tuto

$$z^3 + 6z - 6z - 1 = 0,$$

jejíž kořeny jsou

$$z_1 = 1, \qquad z_{2,3} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}.$$

Při realném z obdržíme rovnici

$$2^x - \frac{2}{2^x} = 1,$$

které vyhovuje realný kořen

$$x_1 = 1$$

a imaginárný kořen

$$x_2 = \log(-1) : \log 2.$$

Úloha 36.

Řešiti jest soustavu rovnic

$$\left[(\sqrt[9]{7})^{2x}\right]^{3y} = 7^8$$

$$(777^{x-y-1})^{x^2+6y^2-60} = 1.$$

R.

Řešení. (Zaslal p. *Emil Schoenbaum*, stud. V. tř. g. v Benešově).

Z prvé rovnice

$$7^{\frac{2x \cdot 3y}{9}} = 7^8$$

vychází

$$xy = 12\,;$$

z druhé rovnice plyne

$$(x - y - 1)(x^2 + 6y^2 - 60) = 0\,.$$

a) Je-li $x - y = 1$, $xy = 12$, vypočítáme známým způsobem

$$x_1 = 4\,, \quad y_1 = 3\,,$$

$$x_2 = -3\,, \quad y_2 = -4\,.$$

b) Z rovnic $x^2 + 6y^2 - 60 = 0$, $xy = 12$ vyloučíme x a obdržíme

$$y^4 - 10y^2 + 24 = 0\,;$$

odtud najdeme hodnoty $y_{3,4,5,6}$, ku kterým stanovíme příslušné x. Tak nalezneme

$$y_{3,4} = \pm\sqrt{6}\,, \quad x_{3,4} = \pm 2\sqrt{6}\,,$$

$$y_{5,6} = \pm 2\,, \quad x_{5,6} = \pm 6\,.$$

Úloha 37.

Úhel AB půlen jest polopaprskem C. Uvnitř úhlu toho dán bod p, jímž vedeny kolmice

$$pa \perp A, \; pb \perp B, \; pc \perp C;$$

mimo to učiněno $cd \perp A$. Dokažte, že

$$\overline{pa} + \overline{pb} = 2 . \overline{cd}.$$

Kterak změní se tento výsledek, je-li bod p vně úhlu AB?

Řed. *A. Strnad.*

Řešení. (Zaslal p. *Emerich Brinkmann*, stud. VI. tř. r. na Malé Straně v Praze).

Sestrojme k bodu p souměrně sdružený p' dle osy C a veďme $p'a' \perp B$.

Jest pak $$\overline{p'a'} = \overline{pa}$$

a v lichoběžníku $pba'p'$ jest cd střední příčkou, o níž jest v platnosti rovnice

$$\overline{p'a'} + \overline{pb} = 2 . \overline{cd};$$

jest tedy, jak tvrzeno,

$$\overline{pa} + \overline{pb} = 2 . \overline{cd}.$$

Je-li bod p vně úhlu AB a má-li od A větší vzdálenost než od B, jest

$$\overline{pa} - \overline{pb} = 2 . \overline{cd},$$

což zcela obdobně lze dokázati.

Úloha 38.

Sestrojiti pětiúhelník, dány-li a) středy jeho stran, b) středy úhlopříček.

Řed. *A. Strnad.*

Řešení. (Zaslal p. *Josef Mucha*, stud. VIII. tř. gymn. v Brně).

a) Označme středy stran pětiúhelníka *abcde* písmeny protějších vrcholů s připojeným ukazatelem 1; středy úhlopříček souhlasně, avšak s ukazatelem 2. Jest tedy

strana ab půlena bodem d_1,
„ bc „ „ e_1,
„ cd „ „ a_1,
úhlopříčka ad „ „ e_2;

při tom jest $d_1e_1a_1e_2$ rovnoběžník.

Lze tudíž z daných bodů d_1, e_1, a_1 sestrojiti bod e_2; vedeme-li bodem tím přímku rovnoběžnou s $\overline{b_1 c_1}$ a přeneseme-li na ni

$$\overline{e_2 a} = \overline{e_2 d} = \overline{b_1 c_1},$$

jsou a, d dva vrcholy žádaného pětiúhelníka. Obdobně sestrojíme vrcholy ostatní.

b) Úhlopříčky

$$be, \quad ca, \quad db, \quad ec, \quad ad$$

půleny jsou po řadě body

$$a_2, \quad b_2, \quad c_2, \quad d_2, \quad e_2,$$

kteréž jsou středy stran hvězdovitého pětiúhelníka $a_2 c_2 e_2 b_2 d_2$; při tom

$$a_2 c_2 \parallel de, \qquad a_2 c_2 = d_2 a_1 = e_2 c_1 = \frac{1}{2} de,$$

$$b_2 d_2 \parallel ea, \qquad b_2 d_2 = a_2 d_1 = e_2 b_1 = \frac{1}{2} ea, \quad \text{a t. d.}$$

Vedeme-li tedy na př bodem b_2 rovnoběžku k $c_2 e_2$ a bodem c_2 rovnoběžku k $b_2 e_2$, obdržíme průsečík e_1, střed strany bc; jím prochází strana $bc \parallel a_2 d_2$ a jest

$$e_1 b = e_1 c = a_2 d_2.$$

Tím sestrojeny vrcholy b, c; obdobně nalezneme ostatní.

Úloha 39.

Ke kruhovému oblouku $\overline{ab}$, jehož střed jest o, sestrojeny v bodech a, b tečny protínající se v c. Tečna v libovolném bodě p téhož oblouku zřízená seče $\overline{ac}$ v m, $\overline{bc}$ v n. Které jest geom. místo středu kružnice opsané trojúhelníku omn?

Řed. *A. Strnad.*

Řešení. (Zaslal p. *František Záviška*, stud. VIII. tř. g. v Brně).

Označme $\sphericalangle aop = \alpha$, $\sphericalangle bop = \beta$; potom jest

$$\sphericalangle aom = \sphericalangle mop = \frac{\alpha}{2},$$
$$\sphericalangle bon = \sphericalangle nop = \frac{\beta}{2},$$
$$\sphericalangle aoc = \sphericalangle boc = \frac{\alpha + \beta}{2}.$$

Vztyčíme-li v bodě m kolmici ku om a v bodě n kolmici ku on, protínají se tyto kolmice v bodě q; kružnice opsaná trojúhelníku omn prochází pak též bodem q, $\overline{oq}$ jest jejím průměrem. Jelikož pak

$$\sphericalangle nop = \sphericalangle nmq = \sphericalangle moq,$$

jest

$$\sphericalangle aoq = \sphericalangle aom + moq = \frac{\alpha + \beta}{2},$$

pročež aq prodlouženo prochází bodem c čili jinými slovy:

Střed kružnice opsané trojúhelníku omn leží na $\overline{oc}$; přímka tato jest geometrickým místem všech takových středů.

Úloha 40.

Je-li v trojúhelníku úhel $\alpha = 2\beta$, jest

$$a^2 = b\,(b + c)$$

a příčka půlící úhel α má délku $bc : a$. Důkaz?

Řed. *A. Strnad.*

Řešení. (Zaslal p. *Jan Lang*, stud. VII. tř. g. v Olomouci).

Kladouce $\alpha = 2\beta$ v úměře

$$a : b = \sin\alpha : \sin\beta,$$

obdržíme

$$a = 2b \cos\beta$$

čili

$$a = 2b\sqrt{\frac{1 + \cos\alpha}{2}}.$$

Dle věty Carnotovy

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha ;$$

vyloučíme-li úhel α z posledních dvou rovnic, nabudeme relace

$$\frac{a^2 - 2b^2}{2b^2} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc},$$

kterou upravíme na

$$a^2 (b + c) = b (b^2 + 2bc + c^2) .$$

Zkrátíme-li dvojčlenem $b + c$, dospějeme k výsledku žádanému

$$a^2 = b (b + c) .$$

O příčce p, půlící úhel α, platí pak úměra

$$p : c = \sin \beta : \sin \left(\frac{\alpha}{2} + \beta \right) = \sin \beta : \sin \alpha ,$$

z čehož $\quad p : c = b : a , \quad p = bc : a .$

Úloha 41.

V přímce dány body m, n, o. Z bodu o jakožto středu opsána kružnice, k níž vedeny tečny body m, n. Které jest geom. místo průsečíků těchto tečen, mění-li se poloměr kružnice?

Řed. *A. Strnad.*

Řešení. (Zaslal p. *František Kačer*, stud. VII. tř. gymn. v Budějovicích).

Tečna vedená bodem m dotýkej se kružnice v bodě a, tečna z bodu n jdoucí dotýkej se v bodě b; průsečík obou tečen buď p. Vedeme-li $pq \perp mn$, bude

$$\triangle mpq \sim \triangle moa , \quad \triangle npq \sim \triangle nob ;$$

odtud vysvítají úměry

$$mp : om = pq : oa$$

$$np : on = pq : ob ,$$

z nichž, ježto $oa = ob$, plyne

$$mp : om = np : on$$

čili

$$mp : np = om : on = \text{const.}$$

Jest tedy geom. místem průsečíku p obou tečen kružnice, jejímž průměrem jest $\overline{oo'}$, značí-li o' bod harmonicky sdružený s o vzhledem k bodům m, n.

Úloha 42.

Řešiti jest rovnici

$$\sin 3x - 3 \cos x = \sqrt{2} \, . \cos 3 (x + 15^0).$$

R.

Řešení. (Zaslal p. *Jaroslav Smetánka,* stud. VII. tř. g. v Kolíně).

Rovnici danou lze psáti

$$\sin 3x - 3 \cos x = \cos 3x - \sin 3x$$

čili

$$2 \sin 3x - 3 \cos x = \cos 3x \, .$$

Ježto

$$\sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x \, ,$$

$$\cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x \, ,$$

bude

$$6 \sin x - 8 \sin^3 x - 3 \cos x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$$

čili

$$\sin x (3 - 4 \sin^2 x) = 2 \cos^3 x \, .$$

Můžeme též klásti

$$3 = 3 \cos^2 x + 3 \sin^2 x \, ,$$

načež nabude rovnice podoby

$$\sin x (3 \cos^2 x - \sin^2 x) = 2 \cos^3 x$$

neboli

$$\operatorname{tg} x (3 - \operatorname{tg}^2 x) = 2 \, ,$$

$$\mathrm{tg}^3 x - 3\,\mathrm{tg}\, x + 2 = 0\,.$$

Odtud nalezneme

$$\mathrm{tg}\, x_1 = 1\,, \quad x_1 = n\pi + 45^0\,;$$

dále pak

$$\mathrm{tg}^2 x + \mathrm{tg}\, x - 2 = 0\,,$$

$$x_2 = x_1\,, \quad \mathrm{tg}\, x_3 = -2\,, \quad x_3 = n\pi - 63^0\, 26'\, 5''\,.$$

Úloha 43.

Dokažte, že trojúhelník, o jehož úhlech platí relace

$$\cos\alpha \cos\beta \sin\gamma = \frac{\sin\alpha + \sin\beta}{\sec\alpha + \sec\beta}\,,$$

jest pravoúhlý.

R.

Řešení. (Zaslal p. *J. Kloboučck*, stud. VII. tř. r. v Pardubicích).

Zbavíme-li rovnici zlomků, nabývá tvaru

$$(\cos\alpha + \cos\beta)\sin\gamma = \sin\alpha + \sin\beta$$

čili

$$2\,.\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\,.\,2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$

$$= 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\,.$$

Zkrácením obdržíme

$$2\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2} = 1\,,$$

tedy

$$\cos\frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{2}\,,$$

$$\frac{\alpha+\beta}{2} = 45^0\,, \quad \alpha+\beta = 90^0\,, \quad \gamma = 90^0\,;$$

pročež jest trojúhelník pravoúhlým, jak tvrzeno.

Úloha 44.

Jsou-li a, b, c strany trojúhelníka, x, y, z délky os úhly půlících, jest dokázati vztah

$$\frac{(a+b)^2}{ab} z^2 + \frac{(b+c)^2}{bc} x^2 + \frac{(c+a)^2}{ca} y^2 = (a^2+b^2+c^2)^2.$$

R.

Řešení. (Zaslal p. *Václav Špaček*, stud. VIII. tř. gymn. v Příbrami).

Úhel $A = \alpha$ půlen buď příčkou $AA' = x$.

Z podmínky

$$\triangle AA'B + \triangle AA'C = \triangle ABC$$

vyvodíme rovnici

$$cx \sin\frac{\alpha}{2} + bx \sin\frac{\alpha}{2} = bc \sin\alpha$$

čili

$$(b+c)\,x = 2\,bc \cos\frac{\alpha}{2}.$$

Jelikož

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}},$$

bude

$$\frac{(b+c)^2}{bc} x^2 = 4s\,(s-a)$$

a obdobně

$$\frac{(a+c)^2}{ac} y^2 = 4s\,(s-b)$$

$$\frac{(a+b)^2}{ab} z^2 = 4s\,(s-c).$$

Sečtením obdržíme relaci, kterou bylo dokázati.

Úloha 45.

Dokázati relaci

$$tg\,\alpha + tg\,\beta + tg\,\gamma + tg\,\delta = tg\,\alpha\,tg\,\beta\,tg\,\gamma + tg\,\alpha\,tg\,\beta\,tg\,\delta$$
$$+ tg\,\alpha\,tg\,\gamma\,tg\,\delta + tg\,\beta\,tg\,\gamma\,tg\,\delta\,,$$

značí-li α, β, γ, δ *úhly čtyrúhelníka.*

R.

Řešení. (Zaslal p. *Bedřich Novák*, stud. VI. tř. r. na Král. Vinohradech).

Známo o úhlech čtyřúhelníka, že

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 2\pi\,,$$

tedy

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta + \gamma + \delta) = 0\,;$$

ježto

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta + \gamma + \delta) = \frac{\operatorname{tg}(\alpha + \beta) + \operatorname{tg}(\gamma + \delta)}{1 - \operatorname{tg}(\alpha + \beta)\operatorname{tg}(\gamma + \delta)} = 0\,,$$

proto též

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) + \operatorname{tg}(\gamma + \delta) = 0\,,$$
$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = -\operatorname{tg}(\gamma + \delta)\,,$$

$$\frac{1}{\operatorname{tg}(\alpha + \beta)} = -\frac{1}{\operatorname{tg}(\gamma + \delta)}\,,$$

$$\frac{1}{\operatorname{tg}(\alpha + \beta)} + \frac{1}{\operatorname{tg}(\gamma + \delta)} = 0\,.$$

Tuto rovnici násobíme součinem

$$(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta)(\operatorname{tg}\gamma + \operatorname{tg}\delta)\,,$$

čímž vyvodíme

$$(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta)\frac{\operatorname{tg}\gamma + \operatorname{tg}\delta}{\operatorname{tg}(\alpha + \beta)} + (\operatorname{tg}\gamma + \operatorname{tg}\delta)\frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}(\gamma + \delta)} = 0$$

aneb

$$(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta)(1 - \operatorname{tg}\gamma\operatorname{tg}\delta) + (\operatorname{tg}\gamma + \operatorname{tg}\delta)(1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta) = 0\,,$$

odkud

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma + \operatorname{tg}\delta = \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma + \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\delta$$
$$+ \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\gamma\operatorname{tg}\delta + \operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma\operatorname{tg}\delta.$$

Úloha 46.

Je-li $x + \frac{1}{x} = 2\cos\alpha$, *dokažte, že* $x^n + \frac{1}{x^n} = 2\cos n\alpha$

Řed. *A. Strnad.*

Řešení. (Zaslal p. *František Nepustil*, stud. VIII. tř. g. v Olomouci).

Je-li

$$x + \frac{1}{x} = 2\cos\alpha,$$

jest

$$x^2 - 2x\cos\alpha + 1 = 0,$$

z čehož

$$x = \cos\alpha \pm i\sin\alpha,$$

$$\frac{1}{x} = \cos\alpha \mp i\sin\alpha.$$

Dle poučky Moivreovy jest pak

$$x^n = \cos n\alpha \pm i\sin n\alpha,$$

$$\frac{1}{x^n} = \cos n\alpha \mp i\sin n\alpha,$$

pročež, jak tvrzeno,

$$x^n + \frac{1}{x^n} = 2\cos n\alpha.$$

Úloha 47.

Ustanovte úhel γ *a obsah trojúhelníka, jehož strany jsou vyjádřeny čísly poměrnými*

$$a = 2u + 1$$
$$b = u^2 - 1$$
$$c = u^2 + u + 1;$$

při tom jest u číslo libovolné.

Řed. *A. Strnad.*

Řešení. (Zaslal p. *Frant. Jiruška*, stud. VI. tř. r. v Pardubicích).

Ustanovíme-li součet stran

$$2s = 2u^2 + 3u + 1 = (u + 1)(2u + 1)\,,$$

nalezneme

$$s - a = \frac{1}{2}(u - 1)(2u + 1)\,,$$

$$s - b = \frac{3}{2}(u + 1)\,,$$

$$s - c = \frac{1}{2}(u - 1)\,;$$

ze vzorce

$$\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}}$$

vysvítá pak, že v daném případě jest

$$\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{(u-1)(2u+1)\,.\,3(u+1)}{(u+1)(2u+1)\,.\,(u-1)}} = \sqrt{3}\,,$$

pročež

$$\frac{\gamma}{2} = 60^0\,, \qquad \gamma = 120^0\,.$$

Pro obsah užijeme vzorce Heronova a obdržíme

$$\varDelta = \sqrt{\frac{(u+1)(2u+1)}{2}\,.\,\frac{(u-1)(2u+1)}{2}\,.\,\frac{3(u+1)}{2}\,.\,\frac{u-1}{2}}$$

čili

$$\varDelta = \frac{1}{4}(2u+1)^2(u^2-1)\sqrt{3}\,.$$

Úloha 48.

Řešiti jest trojúhelník, dány-li jeho těžnice

$$t_1 = \sqrt{430},\quad t_2 = \sqrt{367},\quad t_3 = \sqrt{398}.$$

Řed. *A. Strnad.*

Řešení. (Zaslal p. *Jan Žížala*, stud. VII. tř. g. v Příbrami).

Tvoří-li těžnice t_1 se stranou a úhel φ, jest

$$b^2 = t_1^2 + \frac{a^2}{4} - at_1 \cos\varphi,$$

$$c^2 = t_1^2 + \frac{a^2}{4} + at_1 \cos\varphi;$$

sečtením vychází

$$b^2 + c^2 = 2t_1^2 + \frac{a^2}{2}.$$

Jsou tedy platnými rovnice

$$2b^2 + 2c^2 - a^2 = 4t_1^2$$
$$2c^2 + 2a^2 - b^2 = 4t_2^2$$
$$2a^2 + 2b^2 - c^2 = 4t_3^2.$$

Dosadíme-li dané hodnoty, vznikne soustava o 3 neznámých, ze které vypočítáme strany trojúhelníka

$$a = 20, \quad b = 22, \quad c = 24.$$

Úloha 49.

Řešiti trojúhelník, dáno-li $a^2 + b^2 = 6724$, obsah $\Delta = 720$ a poloměr opsané kružnice $r = 41$.

Řed. *A. Strnad.*

Řešení. (Zaslal p. *Frant. Velísek,* stud. VII. tř. g. v Uh. Hradišti).

Z rovnic

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma = 6724 - 2ab\cos\gamma$$
$$2\Delta = ab\sin\gamma = 1440$$
$$c = 2r\sin\gamma = 82\sin\gamma$$

vylučme strany a, b, c; obdržíme rovnici

$$4\Delta \operatorname{ctg}^3\gamma - (a^2 + b^2)\operatorname{ctg}^2\gamma + 4\Delta\operatorname{ctg}\gamma - a^2 - b^2 + 4r^2 = 0$$

čili ve zvláštním případě daném

$$720 \operatorname{ctg}^3 \gamma - 1681 \operatorname{ctg}^2 \gamma + 720 \operatorname{ctg} \gamma = 0 .$$

Rovnici této vyhovuje úhel $\gamma_1 = 90^0$, při kterém obdržíme racionalný pravoúhlý trojúhelník o stranách

$$a_1 = 80, \quad b_1 = 18, \quad c_1 = 82.$$

Mimo to hoví rovnici úhly

$$\gamma_2 = 29^0\, 28'\, 13'', \quad \gamma_3 = 60^0\, 31'\, 47'',$$

kterým náleží strany

$$a_2 = 70{\cdot}82\ldots, \; b_2 = 41{\cdot}32\ldots, \; c_2 = 40{\cdot}34\ldots,$$
$$a_3 = 79{\cdot}10\ldots, \; b_3 = 20{\cdot}89\ldots, \; c_3 = 71{\cdot}27\ldots.$$

Úloha 50.

Dokažte, že čtyrúhelníku určenému stranami

$$a = 155, \; b = 120, \; d = 128$$

a úhly

$$\cos \alpha = \frac{7}{25}, \; \cos \beta = \frac{9}{41},$$

lze kružnici opsati i vepsati a ustanovte poloměry obou těchto kružnic.

Řed. *A. Strnad.*

Řešení. (Zaslal p. *Gabriel Tůma*, stud. VII. tř. r. v Budějovicích).

Promítneme daný čtyrúhelník do os

$$X \,//\, \overline{ab}, \quad Y \perp ab;$$

tím obdržíme rovnice

$$\begin{aligned} a - b \cos \beta + c \cos (\beta + \gamma) - d \cos \alpha &= 0 \\ b \sin \beta - c \sin (\beta + \gamma) - d \sin \alpha &= 0 , \end{aligned} \quad ^{*)}$$

ze kterých ustanovíme

*) Viz: Strnad, Geometrie pro vyšší školy realné, str. 163.

$$c \cos(\beta + \gamma) = 93 + \frac{7}{25} + \frac{9}{41},$$
$$c \sin(\beta + \gamma) = -8 - \frac{24}{25} + \frac{40}{41}.$$

Odtud vypočítáme

$$c = 93, \ \beta + \gamma = 183^0\, 34'\, 49'';$$

úhly čtyrúhelníka jsou pak

$$\alpha = 73^0\, 44'\, 23'', \quad \beta = 77^0\, 19'\, 12'',$$
$$\gamma = 106^0\, 15'\, 37'', \quad \delta = 102^0\, 40'\, 48''.$$

Jelikož strany splňují podmínku

$$a + c = b + d = 248$$

a úhly

$$\alpha + \gamma = \beta + \delta = 180^0,$$

jest tím zjištěno, že čtyrúhelníku lze kružnici vepsati i opsati; jest to čtyrúhelník bicentrický.

Ježto plocha čtyrúhelníka

$$P = \frac{1}{2}(ad \sin\alpha + bc \sin\gamma) = \frac{1}{2}(a + b + c + d)\,\varrho = 14880,$$

ustanovíme poloměr ϱ kružnice vepsané

$$\varrho = 60;$$

poloměr r kružnice opsané dán vzorcem

$$r = \frac{1}{4}\sqrt{(ab + cd)(ac + bd)(ad + bc)} : P,$$

z něhož vypočítáme

$$r = 89{\cdot}15\ldots.$$

Úloha 51.

Který jest obsah trojúhelníka určeného v pravoúhlé soustavě vrcholy

$$a(-3, 2, 3),\ b(6, -2, 6),\ c(3, 6, 10),$$

a který úhel tvoří rovina jeho s rovinou XY? Řed. *A. Strnad.*

Řešení. (Zaslal p. *Antonín Rejzek*, stud. VIII. tř. gymn. ve Vys. Mýtě).

Vypočítejme délky stran trojúhelníka dle vzorce

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}\,;$$

obdržíme tak neracionálné hodnoty

$$\overline{ab} = \sqrt{106}\,, \quad \overline{bc} = \sqrt{89}\,, \quad \overline{ca} = \sqrt{101}\,.$$

Obsah trojúhelníka vyšetříme vzorcem

$$\Delta = \frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)}$$

a dospějeme k hodnotě v případě daném racionálné

$$\Delta = 42{\cdot}5.$$

Průmět trojúhelníka toho do roviny XY má obsah

$$\Delta_1 = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 30\,;$$

jelikož však

$$\Delta_1 = \Delta \cos\omega\,,$$

značí-li ω odchylku žádanou, bude

$$\cos\omega = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{12}{17}\,,$$

tudíž

$$\omega = 45^0\, 5'\, 57''.$$

Úloha 52.

V pravidelném jehlanu 9tibokém dána jest hrana základny $a = 47{\cdot}2$ a úhel $\alpha = 75^0\, 59'\, 49''$, který pobočná stěna svírá se základnou. Vypočítati jest výšku jehlanu a délku hrany pobočné.

Řed. *A. Strnad.*

Řešení. (Zaslal p. *Pavel Stross*, stud. VII. tř. r. v Prostějově).

Poloměr ϱ kružnice vepsané v základnu jest

$$\varrho = \frac{a}{2} \operatorname{cotg} 20^0 = 64{\cdot}84\ldots$$

a výška jehlanu

$$v = \varrho \operatorname{tg} \alpha = 260.$$

Poloměr r kružnice opsané o základnu jest

$$r = \frac{a}{2 \sin 20^0} = 69$$

a pobočná hrana jehlanu

$$b = \sqrt{r^2 + v^2} = 269.$$

Úloha 53.

Vrcholem kužele, jehož poloměr $r = 10$ a výška $v = 15$, prochází rovina protínající jej v trojúhelníku, jenž obsahuje 68% plochy osového řezu. Který úhel tvoří rovina ta se základnou?

Řed. *A. Strnad.*

Řešení. (Zaslal p. *Adolf Koláček*, stud. VII. tř. r. v Kutné Hoře).

Budiž osovým řezem trojúhelník $\varDelta = abt$, obecný řez vrcholový pak trojúhelník $\varDelta_1 = cdt$.

Jest pak
$$\varDelta = rv = 150,$$

$$\varDelta_1 = \frac{68}{100} \varDelta = 102.$$

Označíme-li půdici trojúhelníka cdt,

$$cd = 2x$$

a výšku jeho y, máme podmínky

$$xy = 102$$
$$x^2 + y^2 = r^2 + v^2 = 325,$$

z kterých ustanovíme

$$x = 6, \quad y = 17.$$

Odchylka α roviny tohoto trojúhelníka od základny dána vzorcem

$$\sin\alpha = \frac{v}{y} = \frac{15}{17},$$

z čehož

$$\alpha = 61^0\, 55'\, 33''.$$

Úloha 54.

Body m (2, 6), n (5, 0), p (5, 5), q (2, —4) proložiti jest 4 přímky omezující čtverec. Body m a n, p a q jsou v protějších stranách čtverce. Které isou rovnice přímek těch a který jest obsah čtverce?

Řed. *A. Strnad.*

Řešení. (Zaslal p. *Frant. Kačer*, stud. VII. tř. gymn. v Budějovicích).

Označme přímky, čtverec omezující a body m, n, p, q procházející, souhlasnými písmeny velkými. Jsou pak rovnice přímek těch

$$\begin{aligned} M &\equiv y - 6 - A\,(x - 2) = 0 \\ N &\equiv y - A\,(x - 5) = 0 \\ P &\equiv y - 5 + \frac{1}{A}(x - 5) = 0 \\ Q &\equiv y + 4 + \frac{1}{A}(x - 2) = 0 \end{aligned}$$

a vzdálenosti jich od počátku

$$v_1 = \frac{2A - 6}{\sqrt{1 + A^2}}, \qquad v_2 = \frac{5A}{\sqrt{1 + A^2}},$$
$$v_3 = \frac{5A + 5}{\sqrt{1 + A^2}}, \qquad v_4 = \frac{2 - 4A}{\sqrt{1 + A^2}}.$$

Aby přímky ty omezovaly čtverec, k tomu nutnou i dostatečnou jest podmínka

$$v_1 - v_2 = \pm (v_3 - v_4),$$

při čemž strana čtverce

$$s = v_1 - v_2.$$

Jelikož $v_1 - v_2 = -\dfrac{3A + 6}{\sqrt{1 + A^2}}, \quad v_3 - v_4 = \dfrac{9A + 3}{\sqrt{1 + A^2}},$

jest tedy směrnici A ustanoviti z rovnice

$$3A + 6 = \pm (9A + 3);$$

tím nabudeme hodnot

$$A_1 = \frac{1}{2}, \quad A_2 = -\frac{3}{4}.$$

a) Pro hodnotu A_1 budou rovnice žádaných přímek

$$\begin{aligned} M &\equiv x - 2y + 10 = 0 \\ N &\equiv x - 2y - 5 = 0 \\ P &\equiv 2x + y - 15 = 0 \\ Q &\equiv 2x + y = 0 \end{aligned}$$

a obsah čtverce $\qquad s^2 = 45 .$

b) Při hodnotě A_2 obdržíme žádané rovnice

$$\begin{aligned} M &\equiv 3x + 4y - 30 = 0 \\ N &\equiv 3x + 4y - 15 = 0 \\ P &\equiv 4x - 3y - 5 = 0 \\ Q &\equiv 4x - 3y - 20 = 0 \end{aligned}$$

a obsah čtverce $\qquad s^2 = 9 .$

Úloha 55.

Dány jsou body $m\,(10, 0)$, $n\,(-17, 0)$.
Na kružnici $x^2 + y^2 = 1360$ ustanoviti jest bod p tak, aby

$$\sphericalangle\, opm = \sphericalangle\, opn.$$

Řed. *A. Strnad.*

Řešení. (Zaslal p. *Karel Engliš*, stud. VII. tř. gymn. v Opavě).

Označíme-li souřadnice bodu p (x, y) a

$$\sphericalangle\, opm = \alpha, \qquad \sphericalangle\, opn = \beta,$$

jest

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\dfrac{y}{\alpha - 10} - \dfrac{y}{x}}{1 + \dfrac{y^2}{x\,(x - 10)}} = \frac{10\,y}{x^2 + y^2 - 10x},$$

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{\frac{y}{x} - \frac{y}{x+17}}{1 + \frac{y^2}{x(x+17)}} = \frac{17y}{x^2 + y^2 + 17x}.$$

Z toho plyne rovnice geometrického místa bodu p při podmínce $\alpha = \beta$

$$L \equiv 7x^2 + 7y^2 - 340\,x = 0.$$

Tímto místem jest kružnice L, jejíž průsečík s kružnicí danou K jest bodem žádaným. Z rovnic obou křivek snadně nalezneme

$$x_{1,2} = 28\,, \quad y_{1,2} = \pm 24\,.$$

Úloha 56.

Řešiti soustavu rovnic

$$(x + y)(x^2 + y^2) = 13$$
$$(x^2 + y^2)(x^4 + y^4) = 1261.$$

Řed. *A. Strnad.*

Řešení. (Zaslal p. *Mikuláš Šmok,* stud. VI. tř. gymn. v Hradci Králové).

Položíme-li $y = ux$, obdržíme

$$x^3(1 + u)(1 + u^2) = 13$$
$$x^6(1 + u^2)(1 + u^4) = 1261\,;$$

vyloučením x nabudeme pak

$$\frac{(1 + u^2)(1 + u^4)}{(1 + u)^2(1 + u^2)^2} = \frac{97}{13},$$

kteráž rovnice přechází v reciprokou

$$42u^4 + 97u^3 + 97u^2 + 97u + 42 = 0.$$

Řešením obdržíme

$$u_1 = -\frac{2}{3}, \quad u_2 = -\frac{3}{2}, \quad u_{3,4} = \frac{-1 \pm i\sqrt{195}}{14},$$

načež ustanovíme

$$x_1 = -2\,, \quad y_1 = 3\,,$$
$$x_2 = 3\,, \quad y_2 = -2\,;$$

hodnoty $x_{3,4}$, $y_{3,4}$ jsou komplexní.

Úloha 57.

Řešiti soustavu rovnic

$$x+y+z=a$$
$$(x-y)^2=5az$$
$$x^2+y^2+z^2=\frac{7}{2}a^2.$$

Řed. *A. Strnad.*

Řešení. (Zaslal p. *Václav Přikryl,* stud. VII. tř. r. v Brně).

Z prvních dvou rovnic plyne

$$x^2+y^2=\frac{1}{2}(a^2+3az+z^2),$$

ze třetí pak

$$x^2+y^2=\frac{1}{2}(7a^2-2z^2).$$

Srovnáním dospějeme k rovnici

$$z^2+az-2a^2=0,$$

z níž ustanovíme

$$z=a, \quad z=-2a.$$

a) Při hodnotě první jest

$$x+y=0$$
$$(x-y)^2=5a^2,$$

pročež

$$x_{1,2}=\pm\frac{a}{2}\sqrt{5}, \quad y_{1,2}=\mp\frac{a}{2}\sqrt{5}, \quad z_{1,2}=a.$$

b) Při hodnotě druhé jest

$$x+y=3a,$$
$$(x-y)^2=-10a^2,$$

z čehož

$$x_{3,4}=\frac{a}{2}(3\pm i\sqrt{10}), \quad y_{3,4}=\frac{a}{2}(3\mp i\sqrt{10}), \quad z_{3,4}=-2a.$$

Úloha 58.

Jest dokázati, že arithmetický průměr tří čísel trojciferných, tvořících tři cyklické permutace, jest vždy číslo celé dělitelné číslem 37. Řed. *A. Strnad.*

Řešení. (Zaslal p. *František Straka*, stud. VII. tř. g. v Kroměříži).

Dané číslo buď

$$N = 100x + 10y + z,$$

jeho cyklické permutace

$$N_1 = 100y + 10z + x,$$
$$N_2 = 100z + 10x + y;$$

arithmetický průměr čísel těchto jest

$$P = \frac{N + N_1 + N_2}{3} = \frac{111x + 111y + 111z}{3},$$
$$P = 37(x + y + z).$$

Tím výrok úlohy dokázán.

Úloha 59.

Ustanoviti jest číslo trojciferné, které jest arithmetickým průměrem obou svých cyklických permutací a má se k jich rozdílu jako 7 : 9. *Týž.*

Řešení. (Zaslal p. *Ferdinand Šob*, stud. VII. tř. g. v Brně) Dle označení užitého v úloze 58. máme podmínky

$$N = \frac{1}{2}(N_1 + N_2), \quad N : (N_2 - N_1) = 7 : 9,$$

které vyjádříme rovnicemi

$$189x - 81y - 108z = 0$$
$$(100x + 10y + z) : (9x - 99y - 90z) = 7 : 9$$

čili

$$7x - 3y - 4z = 0$$
$$31x + 29y - 23z = 0.$$

Z rovnic těchto vyplývá

$$\frac{x}{116-69} = \frac{y}{161-124} = \frac{z}{93+203},$$

$$\frac{x}{185} = \frac{y}{37} = \frac{z}{296}$$

čili

$$\frac{x}{5} = \frac{y}{1} = \frac{z}{8}.$$

Jest tedy hledané číslo

$$N = 518.$$

Úloha 60.

Sestrojiti přímku rovnoběžnou k úhlopříčce ac rovnoběžníka abcd tak, aby protínala strany ba, bc a prodloužení stran da, dc ve 4 bodech harmonicky sdružených. Řed. *A. Strnad.*

Řešení. (Zaslal p. *František Holzmann,* stud. VII. tř. g. v Brně).

Žádaná příčka nechť protíná stranu $\overline{ab}$ v bodě p, $\overline{bc}$ v bodě n, prodloužení $\overline{ad}$ nechť seče v bodě m, prodloužení $\overline{cd}$ v bodě q. Základní vztah, jemuž má býti zadost učiněno, jest

$$\frac{mp}{np} = \frac{mq}{nq}.$$

Označíme-li úhlopříčku $\overline{ac} = u$ a úsečku $\overline{mp} = \overline{nq} = x$, máme úměru

$$\frac{x}{u-x} = \frac{u+x}{x},$$

ze které vypočítáme

$$x = \frac{u}{2}\sqrt{2}.$$

Dle tohoto výsledku lze sestrojení snadně vykonati.

Úloha. 61.

Čtyrúhelníku abcd lze vepsati kružnici poloměru r. Úhlopříčky jeho $\overline{ac} = m$, $\overline{bd} = n$ protínají se v bodě o, a trojúhel-

níkům abo, bco, cdo, dao opsány kružnice poloměrů r_1, r_2, r_3, r_4. *Dokázati, že*

$$r_1 + r_2 + r_3 + r_4 = \frac{mn}{2\varrho}.$$

Řed. *A. Strnad.*

Řešení. (Zaslal p. *František Košelka,* stud. VIII. tř. g. ve Val. Meziříčí).

Je-li ω úhel úhlopříček m, n, jsou poloměry kružnic vepsaných v trojúhelníky *abo*, *bco*, *cdo*, *dao* dány rovnicemi

$$\frac{r_1}{a} = \frac{r_2}{b} = \frac{r_3}{c} = \frac{r_4}{d} = \frac{1}{2 \sin \omega};$$

proto jest

$$r_1 + r_2 + r_3 + r_4 = \frac{a + b + c + d}{2 \sin \omega}.$$

Značí-li r poloměr kružnice vepsané, jest obsah čtyrúhelníka

$$\mathrm{P} = (a + b + c + d)\frac{r}{2}$$

a zároveň také

$$\mathrm{P} = \frac{mn}{2} \sin \omega;$$

proto jest, jak tvrzeno,

$$r_1 + r_2 + r_3 + r_4 = \frac{2\,\mathrm{P}}{2r \sin \omega} = \frac{mn}{2r}.$$

Úloha 62.

Řešiti rovnici

$$7346 \,.\, 7^{\sec x} + 7^{1 + \sec x} - 7010 \,.\, 7^{2 \sec x}$$
$$- 7^{3 + 2 \sec x} + 3 \,.\, 7^{2 + 3 \sec x} = 147.$$

R.

Řešení. (Zaslal p. *Alois Závodník,* stud. VI. tř. real. v Brně).

Položíme-li

$$7^{\sec x} = y,$$

můžeme rovnici danou psáti v podobě

$$147\,(y^3 - 1) - 7353y\,(y - 1) = 0$$

čili

$$(y - 1)\,(147y^2 - 7206y + 147) = 0.$$

Odtud ustanovíme

$$y = 1, \frac{1}{49}, \ 49,$$

načež obdržíme příslušné hodnoty

$$\sec x = 0, \ -2, \ 2\ ;$$

k těmto náleží žádaný úhel

$$x = 2n\pi \pm \frac{1}{3}\pi.$$

Úloha 63.

Ustanoviti úhel α, při kterém

a) $\sin\alpha$, $\sin 2\alpha$, $\sin 3\alpha$,

b) $\cos\alpha$, $\cos 2\alpha$, $\cos 3\alpha$

tvoří arithmetickou prosloupnost. Řed. *A. Strnad.*

Řešení. (Zaslal p. *Richard Ševčík,* stud. VII. tř. gymn. v Brně).

a) Z podmínky

$$\sin\alpha - \sin 2\alpha = \sin 2\alpha - \sin 3\alpha$$

vychází dle známých vzorců

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$$

rovnice

$$\sin^3\alpha - \sin\alpha\cos\alpha - \sin\alpha = 0;$$

z této pak buď

$$\sin\alpha = 0,\ \alpha = 0,\ 2\,\mathrm{R},\ 4\mathrm{R},\ldots$$

aneb

$$\sin^2\alpha - \cos\alpha - 1 = 0,$$

odkudž

$$\cos\alpha\,(1 - \cos\alpha) = 0,$$

$$\alpha = \mathrm{R},\ 2\,\mathrm{R},\ 3\,\mathrm{R},\ 4\,\mathrm{R},\ldots$$

b) Podmínka

$$\cos\alpha - \cos 2\alpha = \cos 2\alpha - \cos 3\alpha$$

užitím vzorů

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$$

$$\cos 3\,\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$$

přechází v rovnici

$$2\cos^3\alpha - 2\cos^2\alpha - \cos\alpha + 1 = 0$$

čili

$$(1 - \cos\alpha)\,(2\cos^2\alpha - 1) = 0.$$

Jest tedy buď

$$1 - \cos\alpha = 0,\ \alpha = 0,\ 4\,\mathrm{R},\ldots$$

aneb

$$2\cos^2\alpha - 1 = 0,\ \cos 2\alpha = 0,$$

$$\alpha = \frac{\mathrm{R}}{2},\ \mathrm{R},\ \frac{3\,\mathrm{R}}{2},\ 2\,\mathrm{R},\ldots.$$

Úloha 64.

Jsou-li a_n strany pravidelných n-úhelníků vepsaných do téže kružnice, dokázati, že

$$2a_6a_{20} = a_4\,(a_6 + a_{10} - a_5)\,.$$

Řed. *A. Strnad.*

Řešení. (Zaslal p. *Jan Štěpán*, stud. VIII. tř. gymn. v Kroměříži).

Je-li r poloměr opsané kružnice, jest

$$a_{20} = 2r \sin 9^0 = 2r \sin (45^0 - 36^0) = r\sqrt{2}\, (\cos 36^0 - \sin 36^0).$$

V rovnoramenném trojúhelníku, jehož strany jsou r, r, a_{10}, jest, jak vysvítá ze známé vlastnosti pravidelného trojúhelníka,

$$\cos 36^0 = \frac{r + a_{10}}{2} = \frac{a_6 + a_{10}}{2};$$

mimo to jest

$$\sin 36^0 = \frac{a_5}{2a_6}, \quad r\sqrt{2} = a_4.$$

Proto lze a_{20} vyjádřiti rovnicí

$$2a_6\, a_{20} = a_4\, (a_6 + a_{10} - a_5).$$

Úloha 65.

Z podmínek úlohy předešlé dokázati, že

$$a_9^3 - 3a_6^2 a_9 + a_3 a_6^2 = 0.$$

Řed. *A. Strnad.*

Řešení. (Zaslal p *Rudolf Bartoš*, stud. VI. tř. real. na Malé Straně v Praze).

Dle označení užitého v úloze předcházející jest

$$a_3 = 2a_6 \sin 60^0, \quad a_9 = 2a_6 \sin 20^0.$$

Užijeme-li vzorce

$$\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3\alpha$$

kladouce $\alpha = 20^0$, obdržíme

$$2a_6^3 \sin 60^0 - 6a_6^3 \sin 20^0 + 8a_6^3 \sin^3 20^0 = 0,$$

rovnici tuto lze psáti též

$$(2a_6 . \sin 20^0)^3 - 3 . a_6^2 . (2a_6 \sin 20^0) + a_6^2 . (2a_6 \sin 60^0)$$

čili, jak v úloze vytčeno,

$$a_9^3 - 3a_6^2\, a_9 + a_3\, a_6^2 = 0.$$

Poznámka redakce.

Kořeny rovnice

$$x^3 - 3r^2 x + r^3 \sqrt{3} = 0$$

značí strany pravid. devítiúhelníka 1., 2. a 4. řádu vepsaného do kružnice o poloměru r.

Úloha 66.

Na podstavci výšky a stojí socha, mající výšku b; z které vzdálenosti jeví se socha v úhlu co největším?

Řed. *A. Strnad.*

Řešení. (Zaslal p. *Josef Dobiáš,* učitel ve Vosicích).

Je-li x vzdálenost oka pozorovatelova od paty podstavce, jeví se podstavec v úhlu

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{x},$$

socha i s podstavcem v úhlu

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{a+b}{x},$$

tudíž socha sama v úhlu

$$\operatorname{tg} \gamma = \operatorname{tg} (\beta - \alpha) = \frac{bx}{x^2 + a(a+b)}.$$

Tím přicházíme k rovnici kvadratické

$$x^2 - bx \operatorname{cotg} \gamma + a(a+b) = 0,$$

jejíž kořeny

$$x = \frac{1}{2}\left[b \operatorname{cotg} \gamma \pm \sqrt{b^2 \operatorname{cotg}^2 \gamma - 4a(a+b)}\right]$$

jsou realnými, pokud

$$b^2 \operatorname{cotg}^2 \gamma \geqq 4a(a+b).$$

Jest tedy při největším úhlu γ

$$\operatorname{cotg} \gamma = \frac{2}{b}\sqrt{a(a+b)}, \quad x = \sqrt{a(a+b)}.$$

Úloha 67.

Do kruhové výseče vepsán kruh a sestrojen pak kruh druhý, který dotýká se prvého i obou ramen výseče. Jsou-li poloměry obou kruhů v poměru 3 : 1, jak velký jest středový úhel výseče?

Řed. *A. Strnad.*

Řešení. (Zaslal p. *Antonín Vitěka,* stud. VII. tř. gym. v Budějovicích).

Střed menšího kruhu měj od vrcholu středového úhlu α vzdálenost x; poloměr jeho buď ϱ, poloměr většího kruhu vepsaného r. Potom jest dle podmínky

$$r = 3\varrho;$$

mimo to

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{\varrho}{x} = \frac{r}{r+\varrho+x}.$$

Z toho vypočítáme

$$x = 2\varrho, \quad \sin\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2},$$

tudíž

$$\alpha = 60^0.$$

Úloha 68.

Ve čtverci abcd vedena příčka am tak, že $\sphericalangle\, bam = \alpha$. *Jak musí býti velký úhel* α, *aby obsah tělesa vzniklého otočením lichoběžníka adcm kolem osy am rovnal se n-násobnému obsahu dvojkužele vzniklého otočením trojúhelníka abm kolem přepony?*

Řed. *A. Strnad.*

Řešení. (Zaslal p. *František Nepustil,* stud. VIII. tř. g. v Olomouci).

Otočením trojúhelníka *abm* kolem přepony $\overline{am} = p$ vzniká dvojkužel, jehož obsah

$$A = \frac{\pi}{3}\varrho^2 p,$$

značí-li ϱ výšku trojúhelníka příslušnou k přeponě. Jelikož

$$p = \frac{a}{\cos a}, \quad \varrho = a \sin \alpha,$$

jest

$$A = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{a^3 \sin^2 \alpha}{\cos \alpha}.$$

Jsou-li pak ϱ_1, ϱ_2 vzdálenosti vrcholů d a c od příčky $\overline{am}$, jest

$$\varrho_1 = a \cos \alpha, \quad \varrho_2 = \varrho_1 - \varrho = a(\cos \alpha - \sin \alpha).$$

Obsah B tělesa vytvořeného lichoběžníkem $adcm$ rovná se rozdílu dvou dvojkuželů, takže

$$B = \frac{\pi}{3} \varrho_1^2 \cdot \frac{a}{\sin \alpha} - \frac{\pi}{3} \varrho_2^2 \left(\frac{a}{\sin \alpha} - \frac{a}{\cos \alpha} \right).$$

Dosadivše hodnoty svrchu uvedené, nabudeme po snadné redukci

$$B = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{a^3}{\cos \alpha} (3 \cos^2 \alpha - 3 \cos \alpha \sin \alpha + \sin^2 \alpha).$$

Poněvadž podle podmínky

$$B = n A,$$

jest

$$3 \cos^2 \alpha - 3 \cos \alpha \sin \alpha + \sin^2 \alpha = n \sin^2 \alpha$$

čili

$$3 \operatorname{ctg}^2 \alpha - 3 \operatorname{ctg} \alpha = n - 1.$$

Z rovnice této plyne pro $\alpha < R$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{3 \pm \sqrt{3(4n-1)}}{2}.$$

Na př. pro $n = 7$ jest $\operatorname{ctg} \alpha = 2$.

Správná řešení úloh zaslali pp.:

Bartoš Rudolf, stud. VI. tř. r. na Malé Straně v Praze, úl. 20., 22., 23., 29., 30., 31., 33., 35., 36., 37., 40., 43., 46. až 49., 52., 57., 58., 60., 62., 63., 65., 66., 67.

Brinkmann Emerich, stud. VI. tř. r. na Malé Straně v Praze, úl. 30., 31., 32., 33., 35., 36., 37., 40., 42., 43., 47. až 50., 52., 53., 57., 58., 62., 63., 65., 67.

Brix František, stud. VI. tř. g. v Brně, úl. 35., 36., 37., 40., 43., 47., 52., 57.

Burda Antonín, stud. VIII. tř. g. v Třebíči, úl. 24., 25., 27., 31., 36., 40. až 43., 46. až 49., 52. až 55., 57. až 59., 62., 67.

Cepák Karel, stud. V. tř. r. v Budějovicích, úl. 37.

Cerman Jaroslav, stud. V. tř. g. v Jičíně, úl. 3.

Člupek Bohumil, stud. VII. tř. r. v Prostějově, úl. 1. až 4., 6., 7., 9., 11., 12., 13., 16., 17., 18., 20., 22. až 26., 29., 35., 36., 41., 45., 53., 58., 62., 66.

Dobiáš Joséf, učitel na ob. šk. ve Vosicích, úl. 1., 3., 12., 13., 16., 18., 20., 23., 24., 31., 32., 36., 40., 42., 43., 46., 47., 48., 52., 53., 55., 57., 61., 63., 66., 67., 68.

Engliš Karel, stud. VII. tř. g. v Opavě, úl. 13., 16., 17., 18., 21., 22., 24., 31., 32., 33., 35., 36., 37., 40., 42., 43., 52., 53., 55., 62., 67.

Gardovský Ladislav, stud. VIII. tř. g. v Plzni, úl. 24., 26., 27., 28., 30.

Goláň Josef, stud g. ve Val. Meziříčí, úl. 24., 25.

Grössl Otakar, stud. VI. tř. r. na Král. Vinohradech, úl. 24., 31., 34. až 37., 40., 43., 47., 52., 53., 56., 58., 62., 63., 67.,

Halámek Ludvík, stud. VII. tř. g. v Brně, úl. 31., 35., 36., 40., 42., 43., 48., 55.

Hamrle Bohumil, stud. VII. tř. r. na Malé Straně v Praze, úl. 24., 25., 30., 31., 35., 36., 38., 48., 52., 53., 54., 55., 56., 62., 63., 67.

Hendrich Emil, stud. VI. tř. g. v Žitné ulici v Praze, úl. 1., 4., 6., 7., 8., 10., 16., 17., 18., 31.

Holzman Frant., stud. VII. tř. g. v Brně, úl. 31., 33. až 38., 40., 42., 43., 47., 48., 49., 52. až 55., 57., 58., 60. až 63., 67.

Hrubý František, stud. VII. tř. r. v Prostějově, úl. 35., 36.

Hýbner Karel, stud. VII. tř. g. v Litomyšli, úl. 24., 31., 35.,

Nepustil František, stud. VIII. tř. g. v Olomouci, úl. 16., 17., 18., 24., 25., 26., 30., 31., 35., 36., 40., 41., 42., 43., 46. až 59., 62., 63., 65. až 68.

Novák Bedřich, stud. VI. tř. r. na Král. Vinohradech, úl. 31., 32., 33., 35., 36., 37., 40., 43., 45., 47., 49., 50., 52., 53., 56., 58., 62., 63., 67.

Novák Václav, stud. VII. tř. r. v Ječné ulici v Praze, úl. 24., 25., 26., 33., 34., 35., 37., 41. až 45., 47., 48., 51. až 56., 58., 67.

Petřvalský Ladislav, stud. VII. tř. g v Brně, úl. 24., 31., 32., 36., 43., 47., 52. až 55., 58., 59., 62., 63., 67.

Polák Jaroslav, stud. VII. tř. g. v Přerově, úl. 10., 23. až 27., 31., 35. až 38., 40., 41. až 43., 45. až 49., 52. až 55., 57., 58., 60., 62., 63., 66., 67., 68.

Pospíšil Jan, stud VIII. tř g. v Pelhřimově, úl. 31., 34., 36., 43., 47. až 50.

Prokeš Karel, stud. VII. tř. g. na Malé Straně v Praze, úl. 1., 2., 3., 6., 7., 8., 11., 16. až 19., 22. až 25., 31., 32., 35., 36., 40., 43., 47., 52., 54., 56., 58., 62., 63., 67.

Přikryl Václav, stud. VII. tř. r. v Brně, úl. 24., 26., 29., 31., 32., 35., 36., 40., 43., 46., 47., 53., 55., 56., 57., 62., 63., 67., 68

Půda Jan, stud. VI. tř. g. v Olomouci, úl. 11., 16., 17., 37., 49., 52., 53., 64., 65., 67.

Racek Jindřich, stud. VIII. tř. g. v Žitné ulici v Praze, úl. 31., 37., 40., 43., 47. až 50., 52. až 55.

Rejzek Antonín, stud. VIII. tř. g. ve Vys. Mýtě, úl. 24. až 27., 30. až 33., 35., 36., 37., 40., 43., 44., 47., 49. až 53., 55., 57., 61., 62., 63., 67., 68.

Schoenbaum Emil, stud. V. tř. g. v Benešově, úl. 30., 36., 37., 40., 43., 50., 58.

Sigmund Rudolf, v Olomouci, úl. 1. až 13., 16. až 20., 24., 25., 27.

Smetánka Jaroslav, stud. VII. tř. r. v Karlíně, úl. 24., 36., 37., 40., 42., 43., 45. až 49.

Souček Josef, stud. VI. tř. g. v Brně, úl. 24., 25., 26., 27., 28., 31., 33., 34., 35., 37., 38., 40. až 43., 45., 46., 47., 49., 52. až 58., 63., 67.

Velísek Ignát, stud. VII. tř. g. v Uh. Hradišti, úl. 16., 30., 31., 35., 36., 46., 48., 50., 53. až 56.
Vitěka Antonín, stud. VII. tř. g. v Budějovicích, úl. 17., 24., 25., 31., 32., 34. až 37., 42., 43., 47. až 50., 52. až 57., 60., 62., 67.
Vojtěch Jan, stud. VIII. tř. g. v Uh. Hradišti, úl. 24. až 30.
slč. *Votrubová Žofie*, stud. VI. tř. g. Minervy v Praze, úl. 24., 32., 37.
Zapletal Innocenc, stud. VII. tř. g. v Kroměříži, úl. 1., 2., 3., 17., 18., 20., 24., 31., 36., 43., 46., 49., 52., 53., 54., 62.
Záviška František, stud. VIII. tř. g. v Brně, úl. 24. až 68.
Závodník Alois, stud. VI. tř. r. v Brně, úl. 1., 2., 3., 7., 9., 11., 16., 35., 36., 46., 47., 52., 57., 62., 63.
Zavřel Jan, stud. VIII. tř. g. v Třebíči, úl. 24., 27.
Žížala Jan, stud. VII. tř. g. v Příbrami, úl. 22., 24., 29., 31., 32., 33., 35., 36., 43., 46., 48., 50., 52., 57., 58., 59., 63., 67.
Nejmenovaný z Král. Vinohradů, úl. 33., 35., 36., 40., 43.
Nejmenovaný ze Smíchova, úl. 31., 36., 43., 52., 57., 58., 59., 62., 63., 67.

Ceny udělené za řešení úloh.

Redakce těchto listů uznala, aby za nejdokonalejší a největší počet řešení úloh obsažených v tomto ročníku Časopisu pro pěstování mathematiky a fysiky (1898) ceny vypsané výborem Jednoty českých mathematiků uděleny byly těmto řešitelům.

A. Pět prvních cen.

1. *Brinkmann Emerich*, stud. VI. tř. r. na Malé Straně v Praze.
2. *Grössl Otakar*, stud. VI. tř. r. na Král. Vinohradech.
3. *Kačer František*, stud. VII. tř. g. v Budějovicích.
4. *Lhotský Otakar*, stud. VII. tř. g. v Opavě.
5. *Záviška František*, stud. VIII. tř. g. v Brně.

B. Deset druhých cen.

1. *Burda Antonín*, stud. VIII. tř. g. v Třebíči.
2. *Engliš Karel*, stud. VII. tř. g. v Opavě.

3. *Košelka František*, stud. VIII. tř. g. ve Val. Meziříčí.
4. *Mucha Josef*, stud. VIII. tř. g. v Brně.
5. *Nepustil František*, stud. VIII. tř. g. v Olomouci.
6. *Rejzek Antonín*, stud. VIII. tř. g. ve Vys. Mýtě.
7. *Špaček Václav*, stud. VIII. tř. g. v Příbrami.
8. *Štěpán Jan*, stud. VIII. tř. g. v Kroměříži.
9. *Tůma Gabriel*, stud. VII. tř. r. v Budějovicích.
10. *Velísek František*, stud. VII. tř. g. v Uh. Hradišti.

C. Patnáct třetích cen.

1. *Bartoš Rudolf*, stud. VI. tř. r. na Malé Straně v Praze.
2. *Dobiáš Josef*, učitel na ob. škole ve Vosicích.
3. *Hýbner Karel*, stud. VII. tř. g. v Litomyšli.
4. *Koláček Adolf*, stud. VII. tř. r. v Kutné Hoře.
5. *Lang Jan*, stud. VII. tř. g. v Olomouci.
6. *Nečas Karel*, stud. VIII. tř. g. ve Val. Meziříčí.
7. *Novák Václav*, stud. VII. tř. r. v Ječné ulici v Praze.
8. *Polák Jaroslav*, stud. VII. tř. g. v Přerově.
9. *Prokeš Karel*, stud. VII. tř. g. na Malé Straně v Praze.
10. *Přikryl Václav*, stud. VII. tř. r. v Brně.
11. *Straka František*, stud. VII. tř. g. v Kroměříži.
12. *Ševčík Richard*, stud. VII. tř. g. v Brně.
13. *Tille Josef*, stud. VIII. tř. g. v Křemencové ulici v Praze.
14. *Vitěka Antonín*, stud. VII. tř. g. v Budějovicích.
15. *Žížala Jan*, stud. VII. tř. g. v Příbrami.