Václav Obešlo
O logarithmicko-grafickém počítání. [II.]

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 45 (1916), No. 2-3, 241--283

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/108952

Příloha k Časopisu pro pěstování mathematiky a fysiky.

O logarithmicko-grafickém počítání.

Napsal Václav Obešlo.

(Pokračování.)

10. Logarithmické pravítko ve své 1. poloze skýtá možnost velmi rozmanitého použití v praksi. Tak *ve všech oborech technických* naskýtá se veliký počet případů výpočtu proporcí dle vzorců $\frac{ac}{b}$ nebo $\frac{ax}{b}$ [14]), kde přesnost pravítka postačí a tudíž jeho užití jest nejlépe doporučitelno. Sem patří na př. výpočty při *analysách chemických*. Zdlouhavé konstrukce v *perspektivě*, což má význam pro *architekta*, dají se zkrátiti současným užitím log. pravítka a jemného millimetrového měřítka naneseného na ostré hraně jeho (toho týká se poznámka od *Lubbe* v „Deutsche Bauzeitung", 40. roč., č. 72, 1906). V *geodesii* jest log. pravítko téměř nevyhnutelné pro celou řadu malých výpočtů, zvláště k *interpolacím* a *počtům vyrovnávacím*. Na základě opravných rovnic atd. možno vyrovnávací počty nižší geodesie provésti téměř vždy úplně pravítkem; ba možno říci, že užití methody nejmenších čtverců v nižší geodesii stává se opravdu výhodným jen užitím log. pravítka. Při rýsování konstruktéra nutno log. pravítko doporučiti k provádění menších výpočtů.

Příklady. 1. Vytyčiti jest přímou spojnici dvou míst A, B na poli, jež jsou vzájemně neviditelna. (Obr. 6.) — Mezi body A, B budiž na př. les. Najděme užitím zrcátka takový bod C, z A i B viditelný, že $\sphericalangle ACB = 90^0$. V bodech M, N, .. spojnice AC vztyčme kolmice a najděme na nich body M', N', .. ležící na žádané spojnici AB.

[14]) Hammer, cit., str. 45.

Položíme-li $\frac{BC}{AC} = \lambda$, bude

$$MM' = \lambda \,.\, AM, \quad NN' = \lambda \,.\, AN, \ldots$$

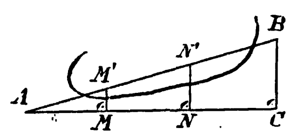
Poloha $\frac{BC}{AC}$ log. pravítka vede nás současně k výpočtu všech délek MM', NN', ... Je-li na př.

$BC = 7{\cdot}25\ m$, $AC = 312{\cdot}5\ m$, $AM = 115\ m$, $AN = 227\ m$, máme

$$MM' = \frac{7{\cdot}25}{312{\cdot}5} \times 115\ m = 2{\cdot}67\ m \text{ (přesněji } 2{\cdot}668\text{)},$$

$$NN' = \frac{7{\cdot}25}{312{\cdot}5} \times 227\ m = 5{\cdot}27\ m \text{ (přesněji } 5{\cdot}266\text{)};$$

millimetry ovšem nemají významu, takže přesnost log. pravítka jest více než dostatečná.



Obr. 6.

2. V *tachymetrii* známá konstanta K mění se, jak známo, během měření. Klademe-li

$$K = 100 + x$$

a je-li l čtení na lati, nutno vypočísti součin $l \,.\, x$, kde x jest obyčejně malým číslem Takových výpočtů nutno mnohdy prováděti na sta během dne. Poněvadž pak číslo x se mění, neskýtají zde tabulky výhody. Logarithmické pravítko jest zde *nepostrádatelné.* Takových příkladů bylo by možno uvésti veliké množství.

3. Jednoduché užití log. pravítka *k vyrovnávání údajů pozorování* podává nám následující příklad[15]: Mezi dvěma veličinami x, y budiž možno předvídati vztah

$$x = c \,.\, y^2, \text{ čili } \frac{x}{y^2} = c,$$

[15]) Sanden, cit., str. 19.

kde c jest nějaká konstanta. Řadou měření nechť nabudeme dvojic hodnot

$$x = 0{\cdot}328;\ 6{\cdot}565;\ 1{\cdot}18;\ 2{\cdot}07$$
$$y = 1{\cdot}13\ ;\ 1{\cdot}47\ ;\ 2{\cdot}13;\ 2{\cdot}80.$$

Jaká jest hodnota konstanty c? — Vytýkejme veličinu x na A, veličinu y na C a hleďme vzhledem k předpokládanému vztahu postaviti dvojice příslušných čísel proti sobě. Vidíme, že žádnou polohou posouvátka není to současně přesně možno. Najdeme však brzy takovou polohu, kterou vzhledem k možným chybám měření jest pokládati za správnou. Nad počátkem 1 posouvátka vidíme tu hodnotu 0·263 konstanty c. Vyhledáváním správné polohy nabudeme zároveň kriteria přesnosti, se kterou konstanta c jest našimi měřeními dána. Vidíme, že poslední cifra 3 jest až na dvě jednotky nespolehlivá, tedy

$$0{\cdot}261 \leqq c \leqq 0{\cdot}265.$$

Počet vyrovnávací jest sám sebou approximativní a proto přesný výpočet jeho vzorců jest bezúčelný. Tak známé vzorce

$$\sqrt{\frac{[\Delta^2]}{n-1}},\ \sqrt{\frac{[\Delta^2]}{n(n-1)}},\ \dots$$

provádějme vždy užitím log. pravítka a tužky.

11. První poloha (přímá), jež se dobře osvědčuje ve všech předchozích případech, není výhodna, jde-li na př. o úlohu děliti pevné číslo a číslem z, jež nabývá řady různých hodnot:

$$y = \frac{a}{z}.$$

Pro každé dělení bylo by zde totiž nutno uváděti posouvátko do jiné polohy. V tomto případě užijeme **2. polohy** posouvátka, polohy obrácené. Zasuneme je totiž tak, že přilehnou navzájem stupnice A, C a stupnice B, D — čili stupnice x, ξ' a stupnice x', ξ, — že tedy x', ξ' postupují z pravé strany k levé s převrácenými ciframi. Uvažujeme-li v tomto případě dvě stupnice téhož modulu, na př. obě stupnice „horní“ x, x', vidíme, že pro každý posun platí mezi čísly nad sebou stojícími vztah $x \,.\, x' = c$, čili $x = \frac{c}{x'}$, kde číslo c čteme nad počátkem 1 stupnice x' na stupnici x.

Cvičení. Jakou šířku (na obvodě měřeno) má jeden zub kola o poloměru r při různém počtu n zubů? (číslo $2r$ na x, k tomu π na obráceném x'; nad různými n na x' pouhým přemísťováním posouvátka čti výsledky na x).

Applikuj též vztahy

$$\alpha \, . \, \beta^2 = konst, \quad \alpha \sqrt{\beta} = konst, \quad \alpha^2 \, . \, \beta = konst, \quad \beta\sqrt{x} = konst$$

pro různá α pro výpočet příslušného β; kterých stupnic užijeme a kde čteme výsledek?

Obrácené polohy užijeme též, vzhledem ke vzorci

$$a^3 = a^2 \, . \, a,$$

při hledání **trojmoci** (tu lze též užíti přímé polohy) a *třetí odmocniny* čísel. Tak dáno-li a, stanovíme $b = \sqrt[3]{a}$ takto: Počátek 1 obrácené stupnice ξ' uvedeme proti číslu a stupnice x a nyní posouváme index tak, až objeví se pod ním na uvedených obou stupnicích stejná čísla b. Vzhledem k obdobě při dvojmocích netřeba připomínati nutnou zde opatrnost při vytýkání mocnin čísla 10 z čísel daných.

Cvičení. Prováděj příklady na výpočet výrazů:

$$x = \frac{a^3}{b}, \quad \sqrt[3]{ab^2}, \quad \sqrt[3]{ab^2}, \quad \sqrt[3]{a^2b^2}, \quad \sqrt[3]{\frac{a}{b}}, \quad \sqrt[3]{\frac{a^2}{b}}, \quad \sqrt[3]{\frac{a}{b^2}},$$

$$\sqrt{\frac{a^3}{b}}, \quad \sqrt{\frac{a}{b^2}}. \text{ atd.}$$

Co [16]) váží koule mosazná (spec. hm. $s = 8{\cdot}50$) o poloměru 4 *cm*? $\left(\frac{4\pi}{3} = 4{\cdot}189\right)$. Jaký jest průměr koule olověné ($s = 11{\cdot}3$), která váží 5·2 *kg*? $\left(\frac{\pi}{6} = 0{\cdot}5236\right)$.

12.* Logarithmického pravítka možno dokonce užíti též ke stanovení reálných kořenů **rovnice 3. stupně. Okolnost tato má opět mnohem menší význam než úvahy předchozí a náleží v této příčině *logarithmickým papírům* nepopíratelná přednost před pravítkem, jak v druhé části článku seznáme [17]).

---

[16]) Hammer, cit., str. 63.

[17]) Nejvhodnější methody řešení rovnic podává ovšem obecná nomografie. Viz *Láska*, (*Nomografie*; připravuje se.)

Předpokládejme rovnici 3. stupně ve tvaru bez 2. členu:

$$z^3 - az + b = 0.$$

Pišme ji ve tvaru

$$z^2 + \frac{b}{z} = a$$

a uveďme proti bodu b dolní stupnice ξ pravítka počátek 1 *obrácené* dolní stupnice ξ' posouvátka. Vytkneme-li nyní na stupnici ξ nějaké číslo ξ, leží proti němu na stupnici x číslo $x = \xi^2$. Proti číslu ξ leží však na stupnici ξ' číslo $\xi' = \frac{b}{\xi}$, takže při naší obrácené poloze posouvátka leží na stupnicích x, ξ' proti sobě čísla ξ^2, $\frac{b}{\xi}$, je-li ξ příslušné číslo stupnice ξ. A vyhledáme-li zkusným přesouváním indexu protilehlá čísla x, ξ' tak, že jejich součet resp. rozdíl, dle toho, je-li b kladné resp. záporné, jest roven číslu a, pak protilehlé k nim číslo ξ jest *kladným* kořenem rovnice; vyhledáme-li pak protilehlá ona čísla x, ξ' tak, že jejich rozdíl resp. součet, dle toho, je li b kladné resp. záporné, jest roven číslu a, jest protilehlé k nim číslo ξ *záporným* kořenem rovnice.

(Rovnice 3. stupně má, jak známo, vždy jeden reálný kořen, kdežto druhé dva jsou buď reálné nebo sdruženě imaginárné. Tento druhý případ nastane tehdy, jestliže při spojitém posouvání indexu určitým a stále týmž směrem pozorujeme, že součet (resp. rozdíl, dle hořejšího) obou protilehlých čísel x, ξ' se nejprve k číslu a blíží a pak, čísla toho nedosáhnuv, se od něho vzdaluje.)

Skutečné provádění jest dosti zdlouhavé a vyžaduje v případech nutného prokládáuí posouvátka opatrnosti při určování desetinné tečky; nutno v mysli pracovati s nekonečně dlouhými stupnicemi jak na posouvátku (zvláště při kořenech větších než b) tak i na pravítku (zvláště při kořenech menších než 1 nebo větších než 10).

Příkladem budiž rovnice [18])

$$z^3 - 7{\cdot}23z - 2{\cdot}72 = 0 \text{ čili } z^2 - \frac{2{\cdot}72}{z} = 7{\cdot}23;$$

---

[18]) Sanden, cit., str. 21.

obdržíme kořeny 2·86; — 2·48, — 0·381. (Při prvém a třetím jest nutno proložení; kontrolou jest, že součet jejich musí se rovnati nule, t. j. vzhledem k přesnosti pravítka může se od nuly lišiti jen v příslušných mezích.)

Je-li dána **rovnice 2. stupně**, stanovíme její kořeny ovšem výpočtem. Nastane nám však někdy případ, že jde o celou řadu rovnic kvadratických, jejichž koeficienty se jen málo liší. V tom případě jest výhodno ke stanovení kořenů užiti logarithmického pravítka. Postup jest zcela analogický předchozímu postupu užitému při rovnici 3. stupně. Stanovíme-li takto kořeny jedné z daných rovnic, docílíme malým posunem posouvátka kořenů každé z rovnic ostatních.

*13. Vyjměme posouvátko a obraťme je spodní stranou vzhůru. Na spodní straně vidíme tři stupnice, z nichž prostřední, označená písmenou L, nese na délce 25 *cm*, rovné tedy modulu dolní stupnice svrchní strany, dílky 0, 1, 2 . . 10 ve stejných vzdálenostech ve směru z prava na levo. Každý tento díl rozdělen opět na 10 stejných dílků a každý z těchto na pět dalších. (Čti čísla 301, 477!)

Zasuňme nyní posouvátko v první poloze (tedy svrchní stranou vzhůru tak, že čísla pravítka i posouvátka stojí před námi zpříma) tak, že počátek stupnice posouvátka stojí proti cifře 2 dolní stupnice pravítka; obrátíme-li nyní pravítko, vidíme na spodní straně na obou koncích dva zářezy, z nichž věnujme pozornost zářezu v pravo; index vyznačený na spodním okraji zářezu stanoví nám na stupnici L (zpříma před námi stojící) číslo 301, t. j. mantissu logarithmu čísla 2. Obdobně obdržíme mantissy 477, 602, 699, . . . logarithmů čísel 3, 4, 5 . . . Obráceně stanovíme k logarithmu příslušné číslo. (Dán: $\log N = 1{\cdot}4756$; jest $N = 29{\cdot}9$ — přesněji $29{\cdot}89_5$).

Prakticky má tato okolnost menší důležitost; ukazuje nám však podstatu stupnice logarithmické a jest applikací obecné vlastnosti stupnic funkcionálních, že totiž klademe-li je paralelně se stupnicí metrickou téhož modulu, určují nám protilehlé body obou stupnic ke každé hodnotě argumentu příslušnou hodnotu funkce a naopak.

Jest zřejmo, že toto užití **stupnice L** vede nás k umocňování čísel. Stanovíme-li logarithmus daného čísla, jež máme umocniti číslem n, násobíme jej tímto číslem (je-li n jednoduché číslo racionální, provádíme toto násobení přímo, není-li tomu tak, užijeme k tomu logarithmického pravítka, t. j. stupnic na svrchní straně) a příslušné číslo jest žádaným výsledkem.

Cvičení. Prováděj příklady v obou případech; tak

$a)$ $(0\cdot617)^6 = 0\cdot0553$, přesněji $0\cdot0552$, $\sqrt[6]{0\cdot617} = 0\cdot922$, přesněji $0\cdot9227$, $b)$ $(0\cdot714)^{0\cdot212} = 0\cdot931$, na 5 míst $0\cdot93106$.

— Někdy nastane případ, že dána jest řada čísel $n_1, n_2, \ldots$ nikoli přímo, nýbrž jejich logarithmy $log\ n_1$, $log\ n_2, \ldots$, a máme čísla ta násobiti určitým číslem c. V tom případě pokračujeme stejně jako v předchozím užitím stupnice L, výsledky na dolní stupnici pravítka však čteme nikoli proti počátku posouvátka, nýbrž proti číslu c dolní stupnice posouvátka, jež si vyznačíme jemnou značkou. (Obdobně postupujeme, máme-li číslem c dělit; značkou vyznačíme číslo $\frac{10}{c}$, předem pravítkem stanovené.)

Rovněž stane se někdy, že máme stálým číslem c násobiti nebo děliti kvadráty čísel, daných svými logarithmy; budiž na př. násobiti čísla a_1^2, a_2^2, ... číslem c, dáno-li $log\ a_1$, $log\ a_2$, ... Zde posouváme opět proti řečenému indexu postupně dané mantissy vytčené na stupnici L a výsledky čteme na horní stupnici pravítka proti bodu c vyznačenému na horní stupnici posouvátka.

Příklad [19]): Při trigonometrickém *měření výšek*, je-li a horizontální délka braná za základ a e-li α měřený úhel výškový, jest korrekce, kterou nutno připojiti k výrazu $a\ .\ tg\ x$, dána výrazem $\frac{a^2}{2R}(1 - k)$, kde k jest t. zv. refrakční koefficient (střední hodnota $0\cdot13$) a R značí poloměr země (za nějž klademe, je-li a měřeno v metrech, $6,380.000\ m$). Vzdálenosti a jsou většinou dány logarithmy a výraz $a\ .\ tg\ x$ vypočteme na př. užitím 5-místných logarithmických tabulek; řečenou opravu pro každý jednotlivý případ měření stanovíme nejpohodlněji pravítkem. Jest $2R = 12,760.000\ m$, $1 - k = 0\cdot87$ (béřeme-li $k = 0\cdot13$), tedy

[19]) Hammer, cit., str. 66.

konstanta c, kterou máme násobiti hodnoty a^2, jest

$$c = \frac{0{\cdot}87}{12{,}760.000} = 0{\cdot}0000000682, \text{ atd.}$$

Máme při tom ještě tu výhodu, že pro různé hodnoty k můžeme příslušná čísla c na horní stupnici posouvátka vyznačiti značkami různých barev, čímž na př. pohodlně přehlédneme působení extremních refrakcí. Další úvahy v té příčině náleží do geodesie.

*14. Obraťme opět posouvátko spodní stranou vzhůru a zasuňme je do pravítka tak, že jeho cifry stojí před námi zpříma čili v t zv. **3. poloze**, a to úplně, t. j. aby koncové body stupnic splývaly. Nad stupnicí L vidíme **stupnici** označenou **S**. Znázorňuje funkci *log sin x* pro modul 12·5 *cm*. Čísla na ní zanesená značí tedy úhly ve stupních a minutách. Počátek této stupnice jest koncovým bodem v pravo, neboť tam jest $\alpha = 90^0$, tudíž $\sin \alpha = 1$, $\log \sin \alpha = 0$. Pojímejme zprvu též horní stupnici pravítka tak, že na pravé straně jest počátek 1, takže čteme na ní cifry 0·01, .. 0·9, 1 (dělme tedy, máme-li zanesena čísla 1, .. 90, 100, čísla ta stem). Pak platí mezi protilehlými čísly x, α vztah $\log x = \log \sin \alpha$ čili $x = \sin \alpha$, takže dána jest tím tabulka sinusů.

Věnujme naší stupnici jen kratší zmínku. Povytáhneme-li poněkud posouvátko a jsou-li x, α; x_1, α_1 protilehlé dvojice čísel, platí vztah

$$\log x - \log \sin \alpha = \log x_1 - \log \sin \alpha_1 \text{ čili } \frac{x}{\sin \alpha} = \frac{x_1}{\sin \alpha_1}.$$

Leží-li specielně proti úhlu $\alpha = 90^0$ číslo x_1, plyne odtud rovnice $x = x_1 \sin \alpha_1$, t. j. pravítko dává sinus úhlů násobený určitou konstantou x_1, a odpovídá každému posunu při tom určitá hodnota konstanty.

Pro úhly menší než 35′ možno, vzhledem k přesnosti pravítka, sinus nahraditi úhlem v obloukové míře měřeným[20]).

---

[20]) Jest pak $\sin \varphi \doteq \operatorname{arc} \varphi = \frac{\varphi'}{3438} = \frac{\varphi''}{206265}$.

(Jednotkovým úhlem v míře obloukové jest úhel

$$\varrho = 57{\cdot}3^0 = 3438' = 206265'';$$

číslo předposlední resp. poslední bývají též značena[21]) ϱ', ϱ'').

K trigonometrickým výpočtům *trojúhelníků* užijeme rovněž pravítka s posouvátkem v poloze uvažované. Jsou-li totiž α_1, α_2, α_3 úhly trojúhelníka a x_1, x_2, x_3 strany k nim protilehlé, platí věta sinusová

$$\frac{x_1}{\sin \alpha_1} = \frac{x_2}{\sin \alpha_2} = \frac{x_3}{\sin \alpha_3}.$$

To jest však právě vztah platný mezi protilehlými čísly α, x uvažovaných stupnic. Jest-li na př. trojúhelník dán dvěma stranami x_1, x_2 a úhlem α_1 jedné z nich protilehlým, postavíme proti sobě čísla x_1, α_1 a vyhledáme číslo α_2 proti x_2. Pak stanovíme úhel $\alpha_3 = 180 - (\alpha_1 + \alpha_2)$ a najdeme stranu x_3 proti α_3. Jsou-li dány dvě strany a úhel sevřený, vyhledáme zkusmo takový zásun posouvátka, při němž proti daným stranám leží dva úhly, které s úhlem daným dávají součet 180^0: v této poloze vyčteme hodnotu neznámých prvků trojúhelníka.

Se stupnicí S možno opět také pracovati s posouvátkem v poloze prvé. Povytáhněme v této poloze posouvátko v pravo. Otočíme-li celé pravítko, vidíme na spodu v pravo zářez, jehož hořejší index vytýká nám na stupnici S určité číslo α. Otočíme-li pravítko zase zpět, nalezneme proti pravému koncovému bodu horní stupnice pravítka na horní stupnici posouvátka číslo x'_1, a snadno si vzhledem k předchozímu představíme, že

$$x'_1 = \sin \alpha.$$

(Stanov $\sin 30^0$, $\sin 60^0$ atd.)

Dále jest nám však známo, že při uvedené přímé poloze $\frac{1}{x'_1}$ platí pro každá dvě protilehlá čísla x, x' uvažovaných stupnic vztah $\frac{x}{x'} = \frac{1}{x'_1}$ (číslo x'_1 čteme při tom ovšem 100kráte menší než odpovídá cifrám 1, . . 100 obvykle zaneseným, kdežto

[21]) Na některém pravítku najdeme též značku $\varrho_{11} = 6{\cdot}36\,..$, při čemž $0{\cdot}636\,.. = \frac{2}{\pi}$.

čísla x, x' možno současně násobiti kteroukoli mocninou desíti), tudíž úhrnem máme vztah

$$\frac{x'}{x} = \frac{x'_1}{1} = \sin \alpha.$$

Této methody čtení užíváme, je-li sinus dán jako pravý zlomek a ptáme se na úhel. (Na příklad[22]), je-li

$$\sin \alpha = \frac{3}{4}, \text{ jest } \alpha = 48{\cdot}6^0).$$

Příklady[23]) (Třetí poloha posouvátka):

$$7{\cdot}4 \times \sin 15^0 = ?\,(1{\cdot}917), \quad \frac{20}{\sin 5^0 40'} = ?\,(202{\cdot}6);$$

trojúhelník dán jest úhly $\alpha = 20^0 30'$, $\beta = 45^0$ a stranou $b = 75\ m$ úhlu β protilehlou (obdržíme $a = 37{\cdot}15\ m$ atd.)

Applikuj větu sinusovou na trojúhelník pravoúhlý: Dána-li přepona a, čti užitím pravítka úhel β, jestliže protilehlá odvěsna jest b (jež nechť nabývá řady hodnot).

15.* Třetí stupnice spodní strany posouvátka znázorňuje funkci $\log tg\, \beta$ při modulu rovném 25 *cm*. Při uvažované v předchozím poloze třetí zasuňme opět posouvátko tak, aby koncové body se kryly, načež platí mezi oběma dolními stupnicemi vztah $\log \xi = \log tg\, \beta$ čili $\xi = tg\, \beta$. Při libovolném zásunu platí vztah $\xi = \xi_1\, tg\, \beta$, leží-li číslo ξ_1 proti pravému koncovému bodu (45^0) **stupnice T, jenž jest jejím počátkem, ježto $tg\, 45^0 = 1$.

Při úhlech menších než 6^0, jejichž tangenty již na stupnici nejsou, možno bez podstatné chyby (vzhledem k přesnosti pravítka) nahraditi tangentu sinusem, tedy užíti stupnice *S*.

Tangenty úhlů větších než 45^0 možno vyčísti však přímo na stupnici *T* tímto způsobem[24]): Vyjděme z nekonečně dlouhé stupnice funkce $\log tg\, \beta$. Ježto jest

$$tg\,(45^0 + \varphi) = \frac{1}{tg\,(45^0 - \varphi)},$$

[22]) Sanden, cit., str. 27.
[23]) Anleitung . . A. W. Faber Rechenst., str. 24.
[24]) Sanden, cit., str. 25.

tedy $log\ tg\,(45^0 + \varphi) = -\,log\ tg\,(45^0 - \varphi)$, skládá se stupnice ta ze dvou částí souměrných dle počátku 45^0, takže dva body stupnice souměrně ležící dle počátku označeny jsou úhly souměrně ležícími dle úhlu 45^0. Levá polovina této stupnice, odpovídající úhlům $\beta = 45^0 - \varphi$, jest na posouvátku vyznačena. Vytáhněme nyní posouvátko a zasuňme je v **poloze čtvrté**, t. j. tak, že stupnice T jest před námi s čísly obrácenými, koncové body stupnic kryjte se navzájem. Uvažujeme-li nyní dolní stupnici pravítka a stupnici T, dávají nám dělící body těchto stupnic obraz pravé poloviny uvažované nekonečně dlouhé stupnice. Při tom ovšem čteme obrácená čísla 45^0, 40^0, 35^0, 30^0 atd. jako čísla ($\beta =$) 45^0, 50^0, 55^0, 60^0 atd., berouce levý koncový bod 1 dolní stupnice pravítka za počátek, takže cifry na této stupnici zanesené ($\xi =$) 1, 2, . . 10 čteme tak, jak jsou psány, načež jest pro protilehlá čísla ξ, β opět v platnosti vztah $\xi = tg\ \beta$ a při jiném zásunu vztah $\xi = \xi_1\ tg\ \beta$, pro $\beta > 45^0$, $\xi > 1$.

Jako jsme se stupnicí S mohli pracovati též při přímé poloze posouvátka, jest to možno i se stupnicí T. Zde máme však k disposici pouze dolní index *levého* zářezu, nutno tedy posouvátko vždy povytáhnouti v levo. Čteme-li nyní čísla ξ dolní stupnice pravítka jako 1, 2, . . 10 a čísla ξ' dolní stupnice posouvátka jako 0·1, 0·2, . . 1 a značí-li β úhel na stupnici T, pak jsou-li ξ, ξ' dvě protilehlá čísla, ξ'_1 číslo na dolní stupnici posouvátka proti levému bodu 1 stupnice pravítka a β úhel na T proti zmíněnému levému indexu zářezu, platí vztah

$$\frac{\xi'}{\xi} = \frac{\xi'_1}{1} = tg\ \beta,$$

jejž možno applikovati v různých příkladech, ovšem se zřetelem k přesnosti při tom dosažitelné.[25])

16. Při předchozím ovšem mlčky předpokládáme, že přístroj jest **správný**, t. j. nejen že jeho stupnice jsou správně naneseny, ale též že nenastala deformace jich, jak tomu na př. jest, jestliže seschnutím dřeva posouvátko se zkrátí. Mimo to musí posouvátko míti *dobrý chod*, nesmí jíti ani příliš lehce ani příliš těžce a musí jíti po celé své délce stejnoměrně. Při novějších

[25]) Stupnice L, S, T mají menší význam. Někteří odborníci radí užívati místo nich výhradně tabulek.

přístrojích bývají pravidlem tyto podmínky splněny a případný těžší chod bývá spíše zaviněn znečištěním žlábků, jež jest tudíž třeba občas pečlivě vyčistiti. Užívání oleje se nedoporučuje.

Je-li pak přístroj v dobrém stavu a chceme-li usuzovati o přesnosti výsledku jím poskytnutého, nestačí ovšem jen bráti zřetel k relativní chybě čtení čísel na stupnici (t. j. zejména k tomu, kolik cifer čísla možno na stupnici spolehlivě vytknouti), nýbrž záleží též na tom, kolikrát bylo během počtu nutno posouvátko posouvati resp. prokládati, zejména však též na naší obratnosti a pečlivosti, v kteréžto poslední příčině rozeznávati nutno dva extremní případy: má li při užití pravítka význam buďto co možno největší rychlost nebo naopak co možno největší přesnost počtu. Případ první, kdy výsledek jest ovšem méně přesný, jest častější než druhý, neboť právě rychlost výpočtu zjednává pravítku přední místo ve všech případech, kdy přesnost příslušná postačí.

My ve svých cvičeních máme většinou před sebou případ střední, jejž možno charakterisovati tím, že v čísle vytýkáme zpravidla spolehlivě první 3 cifry. V tomto případě možno udati 0·16% výsledku[26]) jako střední hodnotu chyby jednoduchého násobení a dělení užitím horních stupnic pravítka. — Počtář, jenž chce velmi rychle pracovati, spokojí se mnohdy i s přesností $\frac{1}{500}$ i $\frac{1}{400}$. Budiž však opět připomenuto, že i přesnost i rychlost výpočtu pravítkem prováděného roste každým dnem, kdy pravítko máme v ruce!

***17.** Na některých pravítkách[27]) jsou na vnějších okrajích pravítka naneseny dvě **stupnice log. log.**, jež doplňují se na celou stupnici log. log. od 1·1 do 100.000, která jen pro svoji velikou délku rozdělena jest na dvě části, a to první polovinu od 1·1 do 2·9, druhou polovinu od 2·9 do 100·000. Užitím běhounu a dolní stupnice posouvátka možno touto stupnicí log. log. prováděti umocňování a odmocňování čísel v mezích od 1·1 do

---

[26]) Hammer. cit., str. 77.

[27]) Jest tomu tak při pravítku: A. W. Faber, Rechenstab Ordnungs-Nr. 378 für Elektro- und Maschinen-Ingenieure, jež obsahuje též všecky stupnice ostatní, jest tudíž každému praktikovi nejlépe doporučitelno. Viz Anleitung, cit., str. 39.

100.000 ve tvaru a^x nebo $\sqrt[x]{a}$, při čemž ani a ani x nemusí býti číslem celým. Obě části stupnice log. log. přesahují na obou stranách poněkud logarithmické stupnice obyčejné a na dolní stupnici posouvátka zanesena jest specielní značka W tak, že její vzdálenost od počátku 1 rovná se délce vyznačených polovin stupnice log. log.

Pro umocňování proveďme *příklad* $1{\cdot}124^{2{\cdot}24} = ?$

Základem jest formule:

$$log\ log\ a^x = log\ x + log\ log\ a.$$

Uveďme index na bod 1·124 stupnice log. log. a uveďme pod něho počátek 1 dolní stupnice posouvátka; nyní převeďme index na bod 2·24 této stupnice a čtěme pod indexem na horní stupnici log. log. výsledek 1·2993.

Je-li v tomto případě, kdy $a < 2{\cdot}9$, výsledek větší než 2·9, což způsobem právě předchozím seznáme, užijeme místo počátku 1 stupnice dolní její značky W a výsledek pak čteme na dolní stupnici log. log.

Vypočti takto $1{\cdot}665^{3{\cdot}17} = 5{\cdot}03$. Proveď příklad, kdy $a > 2{\cdot}9$! (Stejně jako příklad prvý).

Postup při odmocňování jest opačný. Stanov $\sqrt[2{\cdot}8]{26{\cdot}5} = 3{\cdot}22$; $\sqrt[7{\cdot}15]{8{\cdot}75} = 1{\cdot}354$. (V druhém příkladě jest mocnina větší než 2·9, kdežto výsledek menší než 2·9; nutno tedy užíti značky W a výsledek čísti nahoře.)

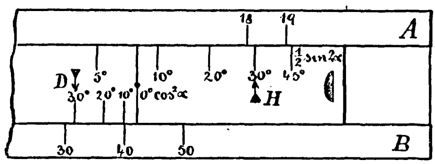
**18*. Logarithmické pravítko bývá hojně přizpůsobováno různým účelům praktickým. Kromě pravítka zmíněného v odstavci 20. — každý fabrikát provázen jest ovšem návodem — uveďme na př. pravítko sloužící k výpočtu trojúhelníků sferických (t. zv. Navigationsrechenschieber), které obsahuje dvě shodné stupnice pro *log sin*, a vede ke vzorci

$$\frac{sin\ \alpha}{sin\ \beta} = \frac{sin\ \alpha_1}{sin\ \beta_1}.$$

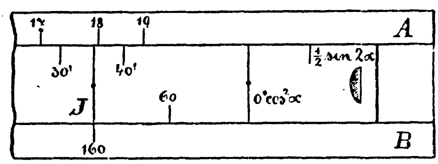
Pravítka pro specielní účely [28]), na př. pro tachymetrii, pro výpočty rozměrů trámů, nosičů, pražců, opěrných zdí atd.,

[28]) Lueger, Lexikon der gesamten Technik (Rechenapparate), kde uvedena též literatura.

pro výpočty výkonů parních strojů, pump, turbin atd. hojně sestrojována hlavně v Anglii, v pozdější době též v Německu. (Viz: **Mehmke**, Numerisches Rechnen v knize Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen. Bd. 1, 2. Teil, Leipzig 1900/04, str 952—978, 1053 až 1073. — **Mehmke** et **d'Ocagne**,, Calculs numériques ve francouzském vydání Encyclopédie des sciences mathématiques, t. I., 4e cahier, str. 226). Pro výpočty turbin sestrojil nejnověji Holl příslušná pravítka. Logometrem (viz Meyers Konservationslexikon) bývá zváno pravítko k řešení úloh trigonometrických.



Obr. 7.



Obr. 7*a*.

Již delší dobu projevována snaha **zvýšiti přesnost** logarithmického pravítka; to dělo se buďto jeho prodlužováním, čímž však manipulace se ztěžovala, nebo tím, že logarithmická stupnice nanášena na kružnici nebo na spirálu, nebo konečně tím, že příliš dlouhé stupnice děleny na části, jež kladeny vedle sebe. Uveďme v této příčině válec Thacherův, Thachers Cylindrical slide rule (cena M 150), jenž obsahuje stupnice nanesené na povrchových přímkách a dává skoro touž přesnost jako tabulky 5místné.

Jako příklad pravítka specielnějšího druhu uveďme *pravítko tachymetrické* (viz obr. 7, 7*a*), Pravítka tohoto druhu obsahují logarithmické stupnice funkcí

$$cos^2 \alpha, \ \frac{1}{2} sin\ 2\alpha$$

za účelem výpočtů vzorců

$$D = E \,.\, cos^2\, \alpha,\ H = E \,.\, \frac{1}{2}\, sin\, 2\alpha$$

stanovících horizontální vzdálenost a rozdíl výšek.

Máme-li na př.[29]) stanoviti

$$42 \,.\, cos^2\, 30^0,\ 42 \,.\, \frac{1}{2}\, sin\, 2 \times 30^0,$$

uveďme počátek stupnice $cos^2\, \alpha$, označený $0^0 cos^2\, \alpha$ (obraz 7.) proti číslu 42 stupnice B, načež čteme proti značce 30^0 stupnice $cos^2\, \alpha$ na stupnici B výsledek $D = 31{\cdot}6$ a proti značce 30^0 stupnice $\frac{1}{2}\, sin\, 2\, \alpha$ na stupnici A výsledek $H = 18{\cdot}2$. — Mimo to vidíme na posouvátku značku J (obr. 7a) uprostřed mezi $30'$ a $40'$ stupnice $\frac{1}{2}\, sin\, 2\alpha$. Značka ta slouží ke stanovení H při úhlech velmi malých. Je-li na př. $E = 160$, $\alpha = 0^0\, 40'$, uveďme značku tu proti 160 stupnice B a čtěme na A proti $40'$ číslo 18·6, načež dělením desíti obdržíme $H = 1{\cdot}86$.

19.* Logarithmické pravítko jest specielním případem **obecného pravítka početního, které možno definovati takto: „Každé početní pravítko znázorňuje funkcionální souvislost několika proměnných.“

Je-li každá z uvažovaných funkcí závislá jen na jedné proměnné, pracujeme s několika známými nám již stupnicemi funkcionálními. Máme-li na př.[30]) stupnicemi znázorněny dvě funkce $y = f(x)$, $\eta = g(\xi)$, při čemž nechť l_x, l_ξ jsou příslušné moduly, pak jsou-li obě stupnice libovolně navzájem posunuty a jsou-li při tom x, ξ resp. x_1, ξ_1 protilehlé body obou stupnic, platí mezi veličinami x, ξ, x_1, ξ_1 vztah

$$l_x \,.\, f(x) - l_\xi \,.\, g(\xi) = l_x \,.\, f(x_1) - l_\xi \,.\, g(\xi_1)$$

nebo vztah

$$l_x \,.\, f(x) + l_\xi \,.\, g(\xi) = l_x \,.\, f(x_1) + l_\xi \,.\, g(\xi_1),$$

dle toho, probíhají-li obě stupnice v témž nebo různém smyslu.

---

[29]) *Láska*, Wyklady Miernictwa (Lwów 1908), Tom II., str. 186.
[30]) *Sanden*, cit., str. 10.

Možno tudíž vhodnou volbou funkcí f, g a obou modulů docíliti pravítek pro velmi rozmanité účely.

Budiž výslovně vytčena okolnost, že početní pravítko při každé vzájemné poloze svých stupnic *znázorňuje* určitou funkci; význam jeho po této stránce jest důležitější než jeho užití k provádění jednotlivých operací početních. (Srovnej na př. proporční tabulku znázorněnou pravítkem logarithmickým.)

Na př. odpovídají-li obě stupnice funkci $y = \frac{1}{x}$, při stejných modulech, vede nás druhý předchozí případ k rovnici

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{\xi} = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{\xi_1},$$

a volíme-li specielně $\xi_1 = \infty$, nabýváme rovnice

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{\xi} = \frac{1}{x_1},$$

ve fysice velmi časté.

Funkcionální vztah daný každou vzájemnou polohou stupnic početního pravítka vede nás v případě potřeby též k *výpočtu* jedné proměnné jako určité funkce proměnných ostatních.

Tak píšeme li na příklad prvou z hořejších rovnic ve tvaru

$$l_x . f(x) = l_\xi . g(\xi) + c,$$

kde konstanta c záleží na vzdálenosti počátků obou stupnic, vidíme, že odpovídá každé hodnotě proměnné ξ jako číslo protilehlé taková hodnota proměnné x, která plyne z funkcionálního vztahu rovnicí daného. (Srovnej na př. násobení řady čísel číslem pevným užitím pravítka logarithmického.)

Ve složitějších případech, kdy jde tedy o výpočet hodnot proměnné, která jest dána jako určitá funkce několika proměnných, jest buďto doporučitelno nebo nutno užíti místo známých nám již unárních funkcionálních stupnic t. zv. stupnic binárních nesoucích místo jedné dělené přímky celou soustavu křivek, takže každému dílku oné stupnice odpovídá zde celá křivka.

V této příčině nutno zde pouze poukázati na článek: P. *Werkmeister*, „Rechenschieber zur Berechnung von Funktionen mit drei, vier und fünf Veränderlichen“ (Zeitschrift für Mathematik und Physik, 62. Bd. 1913, str. 93—106). Jak jest tamtéž uvedeno, upozornili na použití binárních stupnic při početních pravítkách M. d'*Ocagne* (Traité de Nomographie, Paris 1899 str. 362) a R. *Soreau* (Contribution à la théorie et aux applications de la Nomographie, Paris 1901).

Budiž upozorněno k tomu, že v druhé části tohoto článku děje se na příslušném místě zmínka o nejprvnějších základech nomografie, takže pak stane se čtenáři podstata binárních stupnic přístupnější. (Odst. 24.)

Poněvadž při užití binárních stupnic zůstávají některé okraje pravítka nebo posouvátka nezužitkovány, máme zde možnost nanésti na ně dělení vhodná pro specielní úlohy uvažované, pro něž početní pravítko zařizujeme. Tak možno na příklad ponechati základem takového pravítka obyčejné pravítko logarithmické, jak tomu jest zejména při pravítku sestrojeném Werkmeister-em a vyráběném firmou A. Nestler in Lahr za účelem barometrického *měření výšek*, v kteréžto příčině viz článek: P. Werkmeister, „Rechenschiebervorrichtung zur Berechnung von barometrisch gemessenen Höhenunterschieden". (Zeitschrift für Vermessungswesen 1911, str. 972.) — Viz v této příčině referát od *Hammer-a* v „Zeitschrift für Instrumentenkunde" (Berlin, 1915, str. 60): „Eine neue Vorrichtung zur Berechnung barometrisch gemessener Höhenunterschiede mit dem gewöhnlichen Rechenschieber" (von *Hohenner*).

II. Užití logarithmické roviny.

a) Logarithmický obraz funkce.

20. Z analytické geometrie jest známo, že rovnice

$$f(x, y) = 0, \tag{1}$$

interpretována v soustavě pravoúhlých souřadnic x, y, stanoví — za známých předpokladů o vlastnostech funkce f — určitou spojitou křivku k. Rozumí se samo sebou, že souřadnice x, y jednotlivých bodů křivky nanášíme při tom na osách x, resp. y obyčejným způsobem, na základě určitých jednotek délky, ať již stejných nebo různých. Jsou tedy na osách x, y vytčeny pravidelné stupnice a na základě nich nanášíme souřadnice x, y

bodů křivky k. Křivku k můžeme vzhledem k tomu zváti *obyčejným* nebo pravidelným *obrazem funkce f.*

Vytkněme si nyní na osách x resp. y stupnice funkcionální, charakterisované funkcemi

$$x_1 = \varphi(x), \; y_1 = \psi(y) \tag{2}$$

a na základě těchto stupnic nanášejme souřadnice bodů naší roviny. Tak bude každému bodu $A(x, y)$ křivky k odpovídati bod $A_1(x_1, y_1)$, jenž vytvoří novou křivku k_1. Křivka k přešla nám tedy takto v křivku k_1. Pravíme, že jsme provedli *anamorfosu* křivky k; křivka k_1 bude míti při vhodné volbě funkcí φ, ψ jednodušší tvar než křivka k.

Nás bude specielně zajímati **anamorfosa logarithmická.** Tu jest buďto

$$\alpha) \quad x_1 = log\, x, \quad y_1 = log\, y$$

nebo

$$\beta) \quad x_1 = x, \qquad y_1 = log\, y \ldots \beta_1)$$

$$\text{resp.} \quad x_1 = log\, x, \; y_1 = y, \ldots \beta_2)$$

— kde oba případy β se v podstatě neliší — takže použijeme buďto na obou osách stupnic logarithmických nebo na jedné z nich stupnice logarithmické a na druhé stupnice pravidelné.

Tím docílíme t. zv. *logarithmického obrazu* funkce $f(x, y)$ dvou proměnných. Budiž podotčeno, že v dalším budeme při tomto označení míti na mysli vždy případ α), pokud ovšem opak nebude výslovně vyjádřen.

Tak jako při kreslení křivočarých obrazů funkcí užíváme s výhodou t. zv. *papíru millimetrového*, užijeme při kreslení logarithmického obrazu funkce t. zv. *logarithmických papírů*, jež jsou vzhledem k případům α), β) dvojího druhu.

(V Německu zabývá se v nejnovější době výrobou logarithmických papírů firma Carl Schleicher und Schüll in Düren, Rheinland, a uvedla je v přiměřených cenách do obchodu. Modul logarithmických stupnic volen buďto 10 *cm* nebo 25 *cm*. Viz k tomu oddíl *e*).)

Věnujeme-li nyní, jak již řečeno, pozornost výhradně případu α), uvažujme rovnici

$$x^p y^q = C \ldots, \tag{3}$$

kde p, q buďte pro jednoduchost čísla racionálná, a to ať kladná nebo záporná, celá nebo lomená. Logarithmováním (dekadickým) rovnice (3) plyne

$$p \log x + q \log y = \log \varphi$$

čili, vzhledem k transformačním rovnicím α),

$$px_1 + qy_1 = \varphi_1. \tag{3_1}$$

Logarithmickým obrazem funkce (3) jest tedy *přímka*; za uvedeného předpokladu jest její směrnice dána zlomkem, jehož čitatele i jmenovatele lze vyjádřiti čísly celými.

Rovnice (3) znamená pro $p = q = 1$ každou rovnoramennou hyperbolu o asymptotách v osách souřadných, pro $q = 2$, $p = -1$ resp. $p = 2$, $q = -1$ každou parabolu o ose x resp. y, pro $p > 0$, $q > 0$ a obě čísla celá každou t. zv. vyšší hyperbolu, a pro $p > 0$, $q < 0$ nebo $p < 0$, $q > 0$ a opět obě čísla celá každou t. zv. vyšší parabolu, takže logarithmická anamorfosa převádí všecky tyto křivky v přímky. (Vyznač si na logarithmickém papíře odpovídajícím na př. modulu 10 *cm* různé tyto případy a připiš si k příslušným přímkám příslušné tvary rovnic (3).)

21. Abychom vzhledem k předchozímu nabyli co možno jednoduchého způsobu kresliti logarithmický obraz polynomu

$$y = ax^n + a_1x^{n_1} + a_2x^{n_2} + \ldots + a_kx^{n_k} \ldots, \tag{4}$$

řešme nejprve úlohu, stanoviti $\log(a \pm b)$, známe-li $\log a$, $\log b$ a neznáme a, b samo.

Úloha tato přivedla *Leonelli*-ho k myšlence t. zv. **logarithmů addičních** a subtrakčních. Sestavil v té příčině tabulku, jejíž úpravy účastnili se pak mimo jiné zejména *Gauss*, *Zech*, *Wittstein*.

C. Bremiker, jehož 5-místné tabulky máme po ruce (Logarithm.-trigonom. Tafeln mit fünf Dezimalstellen; Berlin 1872. Osmé vydání, obstaral A. Kallius, vyšlo 1899. My máme po ruce 2. vydání z r. 1876), upravil tabulku logarithmů addičních a subtrakčních tímto způsobem: Tabulka dělí se ve dvě části 1, 2, z nichž prvá vede jak k sečítání tak k odčítání (str. 117 až 121); druhá pak (122—126) slouží k odčítání, a to v tom případě, kdy rozdíl logarithmů obou čísel jest větší než 0·42. Část prvá udává ke každé hodnotě $A = log\, x$ příslušnou hodnotu $B = log(x + 1)$. Část druhá pak udává příslušné navzájem hodnoty $B = log\, x$, $C = log\left(1 - \frac{1}{x}\right)$.

Jde-li o součet, předpokládejme, že $a > b$, načež základem jest vzorec

$$log(a + b) = log\, a + log\left(\frac{b}{a} + 1\right).$$

Stanovíme-li tedy $log\, \frac{b}{a} = log\, b - log\, a$, jest další postup zřejmý. V tabulkách máme však uvedeny vesměs kladné hodnoty, t. j. nutno klásti $A = 10 + log\, b - log\, a$, tak že postupujeme takto: Větší logarithmus odečteme od menšího, zvětšeného o 10, tento rozdíl vyhledáme ve sloupci A, vyčteme příslušné číslo B, které přičteme pak k většímu logarithmu, takže

$$log(a + b) = log\, a + B.$$

Příklad. Dané logarithmy buďte 8·75321 — 10, 0·13109. Pak jest $log\, a = 0{\cdot}13109$, $log\, b + 10 = 8{\cdot}75321$, takže

$$A = 8{\cdot}62212.$$

Na str. 119 jest:

A.	B. 0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	P. P.	4	5
8·60	0·0 1695	1699	1703	1707	1711	1715	1719	1722	1726	1730	1 2	0·4 0·8	0·5 1·0
61	1734	1738	1742	1746	1750	1754	1758	1762	1766	1770	3 4	1·2 1·6	1·5 2·0
62	1774	1778	1782	1786	1790	1794	1798	1802	1806	1810	5 6	2·0 2·4	2·5 3·0

Zde dostáváme tedy $B = 0{\cdot}01782$, načež

$$log(a + b) = 0{\cdot}13109 + 0{\cdot}01782 = 0{\cdot}014891.$$

Jde-li dále o $log(a - b)$, pak musí ovšem $log\, a > log\, b$. Jestliže rozdíl $log\, a - log\, b$ nepřekračuje číslo 0·42, pracujeme dle vzorce

$$log\,(a - b) = log\, b + log\left(\frac{a}{b} - 1\right),$$

používajíce opět 1. části tabulek. Užijeme zde tedy tohoto postupu: Odečteme menší logarithmus od většího a tento rozdíl

$$B = log\ a - log\ b \quad (a > b)$$

vyhledáme ve sloupci B, načež stanovíme příslušné číslo A ve sloupci A. Jest pak

$$A = log\left(\frac{a}{b} - 1\right) + 10.$$

$$log(a - b) \equiv log\ b + A - 10.$$

t. j. získané tak číslo A přičteme k menšímu logarithmu a odečteme 10.

Příklad. Je-li $log\ a = 3{\cdot}00175$, $log\ b = 2{\cdot}85417$, máme

$$\begin{array}{rl} log\ a \ldots & 3{\cdot}00175 \\ log\ b \ldots & 2{\cdot}85417 \\ \hline B \ldots & 0{\cdot}14758 \\ A \ldots & 9{\cdot}60711 \quad \text{dle str. 121} \\ \hline log(a - b) \ldots & 2{\cdot}46128 \equiv log\ b + A - 10. \end{array}$$

Je-li však rozdíl $log\ a - log\ b$ větší než 0·42, užijeme druhé části tabulek, při čemž základem jest rovnice

$$log(a - b) = log\ a + log\left(1 - \frac{1}{\frac{a}{b}}\right).$$

Postupujeme zde tedy takto: Stanovíme

$$B = log\ a - log\ b, \quad a > b$$

a vyhledáme toto číslo ve sloupci B druhé části tabulek. K němu přísluší ve sloupci C číslo

$$C = log\left(1 - \frac{1}{\frac{a}{b}}\right) + 10, \text{ takže}$$

$$log(a - b) = log\ a + C - 10.$$

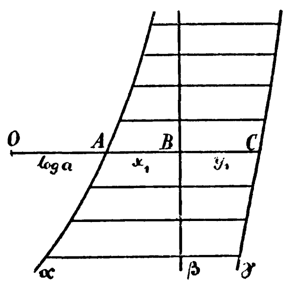
Příklad. Pro $log\ a = 0{\cdot}13109$, $log\ b = 8{\cdot}75321 - 10$ jest

$$\begin{array}{rl} log\ a \ldots & 0{\cdot}13109 \\ log\ b \ldots & 8{\cdot}75321 - 10 \\ \hline B \ldots & 1{\cdot}37788 \\ C \ldots & 9{\cdot}98142 \quad \text{dle str. 124} \\ \hline log(a - b) \ldots & 0{\cdot}11251 = log\ a + C - 10. \end{array}$$

22. Myšlenku logarithmů addičních applikujme nyní graficky. Jsou-li dány logarithmy čísel a, b úsečkami $OA = \log a$, $OB = \log b$, na základě určité jednotky délky na přímku nanesenými (viz obr. 8.), mějme úlohu najíti polohu bodu C tak, aby

$$OC = \log(a + b).$$

Snadno seznáme, že poloha bodu C k bodům A, B záleží toliko na vzájemné poloze bodů A, B a nikoli na jejich vzdálenosti



Obr. 8.

od počátku. Jest totiž

$$BC = OC - OB = \log(a + b) - \log b = \log\left(1 + \frac{a}{b}\right)$$

$$= \log\left(1 + \frac{1}{\frac{b}{a}}\right),$$

závisí tedy BC, a obdobně též AC, pouze na poměru $\frac{b}{a}$, čili na rozdílu $(\log b - \log a)$, čili na vzdálenosti

$$AB = \log b - \log a = \log \frac{b}{a}.$$

Kladme $AB = x_1$, $BC = y_1$. Pohybuje li se pak bod B po přímce β a posouvá-li se přímka ABC rovnoběžně, tu vytvoří-li bod A nějakou křivku α, vytvoří bod C určitou křivku γ, takže pro příslušné navzájem body A, B, C těchto čar platí

$$\left|\begin{array}{l} y_1 = \log\left(1 + \frac{1}{\frac{b}{a}}\right) \\ x_1 = \log \frac{b}{a}. \end{array}\right.$$

Vztah úseček x_1, y_1 materialisován jest *Brauerovým logarithmickým kružidlem* (W. von Dyck, Katalog, Nachtrag, str. 40.), jež má tři hroty I, II, III a jest zařízeno tak, že je-li I II $= x_1$, jest II III $= y_1$.

Chceme-li však použíti papíru logarithmického, klaďme

$$AB = x_1,\ BC = y_1,\ \frac{b}{a} = t, \text{ takže jest}$$

$$x_1 = \log t,\ y_1 = \log\left(1 + \frac{1}{t}\right) \ldots \qquad (5)$$

Značí-li pak x_1, y_1 pravoúhlé souřadnice bodu v rovině, jest rovnicemi (5) dána určitá křivka a, t. zv. *addiční křivka logarithmická*; jest logarithmickým obrazem funkce

$$y = 1 + \frac{1}{x}.$$

(Rovnice (5) jsou jejím parametrickým vyjádřením na základě parametru t, neboť každé hodnotě t odpovídají určité dvě hodnoty x_1, y_1, t. j. určitý bod v rovině jako bod křivky.)

Snadno seznáme průběh addiční křivky a. Roste-li t do nekonečna, platí totéž o x_1, kdežto y_1 blíží se hodnotě $\log 1 = 0$; t. j. křivka má kladnou osu x asymptotou. Uvažujme dále dva body křivky, které přísluší reciprokým hodnotám parametru t. Budiž tedy

$$t' = \frac{1}{t}.$$

Pak jest

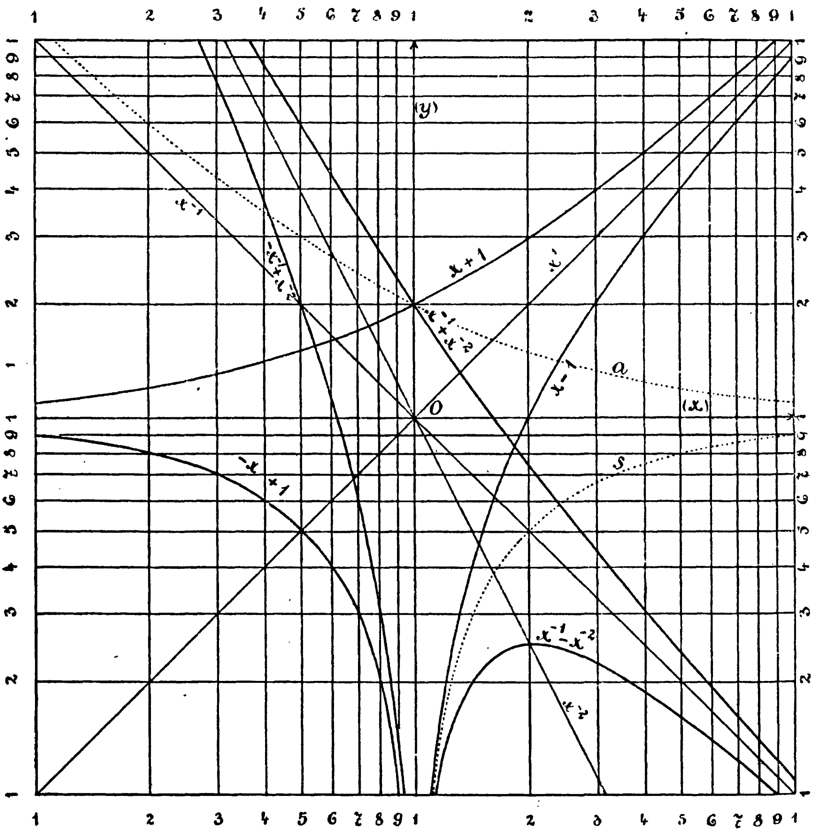
$$y'_1 = \log\left(1 + \frac{1}{t'}\right) = \log(1 + t) = \log t\left(1 + \frac{1}{t}\right)$$
$$= \log t + \log\left(1 + \frac{1}{t}\right)$$

t. j.

$$x'_1 = -x_1,\ y'_1 = x_1 + y_1. \qquad (6)$$

Abychom tedy obdrželi bod křivky o úsečce $-x_1$, naneseme na jeho pořadnici od symetrály obou os jdoucí 2. a 4. kvadrantem délku y_1 rovnou pořadnici bodu o úsečce x_1. Poněvadž pak kladná osa x jest asymptotou křivky, plyne odtud, že ona část řečené symetrály, která směřuje do 2. kvadrantu ($x < 0$, $y > 0$), jest rovněž asymptotou křivky.

Na obr. 9. vyznačena jest křivka *a* tečkovaně. Chceme-li nyní užitím křivky *a* dvě čísla *a*, *b* logarithmicky sečísti, užijme



Obr. 9.

vztahu:

$$log(a+b) = log\ b + log\left(1+\frac{a}{b}\right) = log\ b + log\left(1+\frac{1}{\frac{b}{a}}\right)$$

$$= log\ b + log\left(1+\frac{1}{t}\right),$$

při čemž

$$\frac{b}{a} = t,\ log\ t = log\ b - log\ a.$$

Abychom tedy obdrželi $log(a + b)$, přičteme k délce $log\, b$ (na některé ze stupnic našeho papíru) délku rovnou pořadnici onoho bodu M křivky a, jehož úsečka rovná se (i co do smyslu) rozdílu $log\, b - log\, a$. Dle toho, je-li $b > a$ a resp. $b < a$, jest bod M na kladné resp. záporné větvi křivky a. Tato druhá volba (t. j. $b < a$) se doporučuje tehdy, jsou-li čísla a, b značně různé velikosti, neboť v tomto případě by bod M na kladné větvi měl příliš malou pořadnici, která by se tudíž nesnadno přenášela. (Netřeba dokládati, že délku $log\, b - log\, a$ vezmeme do kružidla na naší log. stupnici, naneseme ji jako úsečku — buď kladnou nebo zápornou dle $b > a$ nebo $b < a$ — na osu x křivky a, vezmeme do kružidla příslušnou pořadnici a naneseme ji v kladném smyslu od čísla b naší log. stupnice, načež její koncový bod udává číslo $a + b$ na naší stupnici, ježto jeho vzdálenost od počátku stupnice jest $log(a + b)$. Při tom jest zřejmo, že naše stupnice musí odpovídati témuž modulu jako křivka a; nejvhodněji volíme ji na některém okraji našeho papíru logarithmického.)

Křivka addiční a vede nás ovšem též ke stanovení $log(a - b)$ známe-li $log\, a$, $log\, b$; třeba pouze psáti $a - b = c$, $b = b$, $a = b + c$ a převrátiti předchozí postup.

Chceme-li však postupovati přímo, užijeme *křivky subtrakční* S, jež jest dána rovnicemi

$$x = log\, t,\ y = \left(1 - \frac{1}{t}\right) \ldots, \tag{7}$$

jest tedy logarithmickým obrazem funkce

$$y = 1 - \frac{1}{x}.$$

Křivka tato má asymptotami osy $+ x$, $- y$, jsouc k jejich symetrále souměrna. V obr. 9. vyznačena křivka s rovněž tečkovaně. Jak s křivkou subtrakční pracujeme. jest patrno ze vztahu:

$$log(a - b) = log\, a\left(1 - \frac{b}{a}\right) = log\, a + log\left(1 - \frac{1}{\frac{a}{b}}\right),$$

tedy

$$log(a - b) = log\, a + log\left(1 - \frac{1}{t}\right),$$

při čemž

$$t = \frac{a}{b}, \text{ tedy } \log t = \log a - \log b.$$

Musí ovšem býti $a > b$, takže $\log a - \log b > 0$, skutečně leží křivka s celá v pravo od osy y.

23. Zvláště důležita jest pro nás **funkce mocninová**. Logarithmickým obrazem funkce

$$y = ax^n$$

jest přímka

$$\log y = \log a + n \log x \quad \text{čili} \quad y_1 = \log a + nx_1,$$

která protíná osu y v bodě a stupnice a má vzhledem k ose x směrnici n. To platí ovšem ať n jest jakéholi číslo reálné.

Je-li nyní dán **polynom**

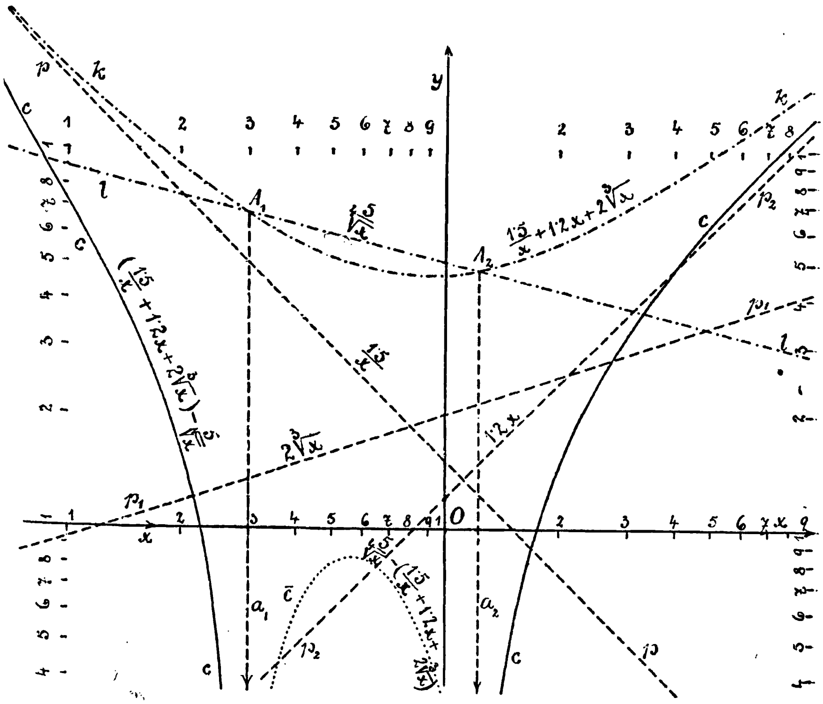
$$y = ax^n + a_1x^{n_1} + a_2x^{n_2} + \ldots + a_kx^{n_k} \ldots \quad (4)$$

nakresleme nejprve přímky, jež jsou logarithmickými obrazy jednotlivých členů jeho. Na jednotlivých pořadnicích provádějme pak postupně logarithmické sečítání délek pořadnic bodů přímek těch. (Zase ovšem kreslíme na papíře téhož modulu, jako má papír, na němž máme nakresleny křivky a, s.) Obsahuje-li mnohočlen členy kladné i záporné, píšeme

$$y = f_1(x) - f_2(x),$$

kde f_1, f_2 obsahují členy kladné, a sestrojme opětovaným užíváním křivky addiční logarithmické obrazy funkcí f_1, f_2, načež z těchto odvodíme logarithmickým odčítáním obraz celé funkce.

Půjde nám o průběh našich křivek. Předpokládejme, že mocnitelé n, n_1, ... n_k jsou uspořádáni dle velikosti, a budiž n nejmenší, n_k největší z nich. Pak má z přímek p, p_1, ... p_k prvá nejmenší spád a poslední největší. Možno pak vždy vésti rovnoběžku k ose y tak daleko, aby z průsečíků jejích s přímkami p poslední ležel nejvýše. Čím dále od osy y pak posouváme tuto rovnoběžku, tím výše bude tento poslední bod vůči bodům ostatním. Z toho možno souditi, že přímka největšího spádu bude asymptotou hledané křivky k v pravo od osy y. Zcela obdobně plyne, že přímka nejmenšího spádu bude asymptotou křivky k v levo od osy y. Jsou-li koefficienty a všecky kladné, jest křivka k stále otevřena nahoru, nemá tedy bodů inflexních. Má-li pak existovati pro křivku k nějaký bod nejnižší, v němž jest tečna rovnoběžna s osou x, musí aspoň jeden z mocnitelů n býti záporný.



Obr. 10.

Příklad. V obr. 10. znázorněna jest křivka k, jež jest logarithmickým obrazem funkce

$$y = \frac{1{\cdot}5}{x} + 2\sqrt[3]{x} + 1{\cdot}2x.$$

Mocnitelé

$$n = -1,\ n_1 = \frac{1}{3},\quad n_2 = 1$$

jsou uspořádáni dle velikosti. Nejmenší z nich jest záporný, kdežto druhé dva jsou kladné. Křivka k jest stále otevřena nahoru, ježto všecky koefficienty 1·5, 2, 1·2 jsou kladné, a má bod nejnižší, ježto mocnitelé — 1, $\frac{1}{8}$, 1 mají různá znaménka. Přímka p_2 resp. p jest její asymptotou v pravo resp. v levo od osy y.

Uvažujeme-li případ, kdy koefficienty mají různá znaménka, tedy $y = f(x) = f_1(x) - f_2(x)$, nechť protínají se oba obrazy funkcí f_1, f_2 v bodě o úsečce $x = \alpha$. Pak jest pro $x = \alpha$ příslušné $f_1(\alpha) = f_2(\alpha)$, tudíž jest zde $y = f(\alpha) = f_1(\alpha) - f_2(\alpha) = 0$, $\log y = -\infty$. Křivka k, jež jest logarithmickým obrazem funkce $y = f(x)$. má tedy v místě $x = \alpha$ asymptotu rovnoběžnou se zápornou osou y. Jsou-li pak α, β dva takové kořeny rovnice $f(x) = 0$, že mezi nimi jest $f(x) < 0$, t. j. $f_1(x) < f_2(x)$, nemá v části roviny mezi pořadnicemi $\log \alpha$, $\log \beta$ křivka k reálných větví. Za to má v těchto částech roviny reálné větve křivka $\overline{k}$ zobrazující funkci $\overline{y} = -f(x) = f_2 - f_1$.

Příklad. V obr. 10. znázorněn obraz c funkce

$$y = \left(\frac{1{\cdot}5}{x} + 2\sqrt[8]{x} + 1{\cdot}2\,x\right) - \frac{5}{\sqrt[4]{x}}.$$

Funkce $f_1(x)$ jest znázorněna křivkou k předchozího příkladu a funkce $f_2(x)$ přímkou l. Tyto protínají se v bodech A_1, A_2. Křivka c má reálné větve na levo od A_1 a na pravo od A_2, blížíc se jak na jedné tak i na druhé straně asymptoticky ke křivce k. Mezi body A_1, A_2 (t. j. jejich pořadnicemi) má reálnou větev křivka $\overline{c}$, jež jest obrazem funkce $\overline{y} = f_2 - f_1$, blížíc se rovněž asymptoticky k pořadnicím bodů A_1, A_2. (Křivka $\overline{c}$ vyznačena tečkovaně.)

b) Abakus multiplikační.

24. Předpokládejme, že několik proměnných vázáno jest navzájem určitým vztahem. Přiřadíme-li každé z proměnných těch soustavu prvků geometrických, bodů nebo křivek, okotovaných příslušnými hodnotami proměnné, a to tak, aby zákon, který váže proměnné, byl vyjádřen jednoduchým způsobem vzájemnou polohou prvků geometrických odpovídajících příslušným navzájem hodnotám jednotlivých proměnných, možno pak, jsou-li dány hodnoty všech proměnných až na jednu, vyčísti z obrazce příslušnou hodnotu této proměnné. Obrazec takový, jenž jest grafickým vyjádřením uvažovaného vztahu, nazýváme **nomogram**[31]) tohoto vztahu. Obrazec ten nahrazuje číselnou tabulku provedených výpočtů hodnot jedné z proměnných, vytčené jako určitá funkce ostatních proměnných; zveme jej proto také početní tabulka čili *abakus*.

Nejjednodušším případem abaku jest grafická tabulka pro nějakou funkci $y = f(x)$ jedné proměnné. Docílímé jí tím, že položíme parallelně vedle sebe stupnici pravidelnou a téhož modulu stupnici funkcionální odpovídající funkci f. Pak každé dva protilehlé body obou stupnic udávají nám dvojici příslušných hodnot proměnné x a funkce y.

Jako příklad uveďme: Tichý, Grafické tabulky logarithmické[32]). Výhoda takovýchto grafických tabulek před tabulkami číselnými spočívá v tom, že následkem jejich názornosti každá chyba, kterou při jich zřizování učiníme, jest na první pohled patrna.

Vlastním oborem nomografie v užším slova smyslu jest grafické vyjadřování vztahů mezi více než dvěma proměnnými. Význačná jest snadnost a rychlost, s jakou tato methoda vede k početním výsledkům; dá se applikovati v nejrůznějších oborech a to i tam, kde číselné tabulky jsou vyloučeny. Rozumí se samo sebou, že kreslíme ve větším nebo menším měřítku dle toho, zdali úloha vyžaduje větší nebo menší přesnosti.

Nomogram vyjadřující funkcionální závislost *tří* proměnných čili, jinak řečeno, nomogram funkce

$$z = f(x, y)$$

dvou proměnných jest nejjednodušším případem nomogramu či abaku v užším slova smyslu. Pokládejme proměnné x, y za pravoúhlé souřadnice bodu v rovině, dejme funkci z jednotlivé hodnoty z_1, z_2, z_3 ... a nakresleme křivky

$$f(x, y) = z_1,\ f(x, y) = z_2,\ f(x, y) = z_3 \ \ldots$$

spojující body v rovině, v nichž z má hodnotu z_1, resp. z_2 resp. z_3, ... Ke každé z křivek z_k připíšeme příslušnou hodnotu z_k;

[31]) Názvy nomogram a nomografie (název této methody) zavedl M. d'Ocagne.

[32]) Anton Tichy, Graph. Log.-Tafeln, Wien 1897. Beilage zur Zeitschrift des Öst. Ingenieur- und Architekten-Vereines. (Cena K. 1·50.).

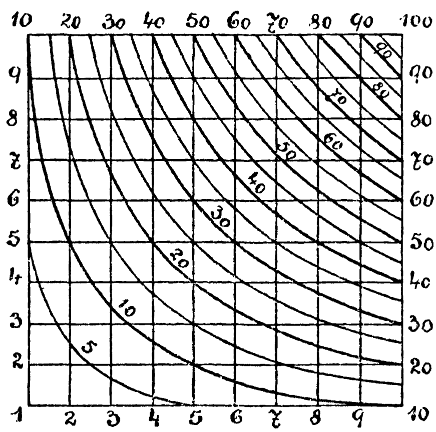
abychom ji nakreslili, nutno vytknouti pro ni dostatečný počet bodů. Křivky tyto nazývá Vogler *isopletami.*

Obrazec takto zřízený možno též pokládati za znázornění plochy $z = f(x, y)$ v rovině xy vrstevnicemi odpovídajícími úrovním o kotách $z_1, z_2, z_3, \ldots$ (tvořících obyčejně řadu arithmetickou), kteréhož způsobu užíváme při promítání kotovaném (plans cotés).

25. Pro příklad uveďme funkci

$$z = x \cdot y.$$

Zde isopletami jsou rovnoosé hyperboly mající souřadné osy asymptotami. Jest to multiplikační *tabulka Pouchetova.*



Obr. 11.

Abychom docílili zjednodušení isoplet, podrobíme abakus vhodné *anamorfose* (název ten pochází od Lalanne-a). Uvažujme specielně *anamorfosu logarithmickou,* nám známou

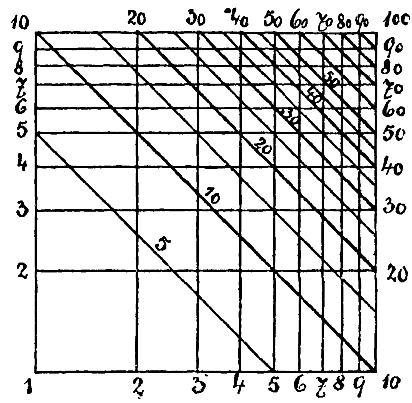
$$\alpha) \quad x_1 = \log x, \quad y_1 = \log y$$

a applikujme ji na náš případ abaku Pouchetova. Transformovaný abakus jest pak charakterisován vztahem

$$z_1 = x_1 + y_1,$$

takže isoplety přecházejí zde v přímky vytínající na kladných osách, x, y stejné úseky. (Oba příslušné obrazce vyznačeny v obr. 11. a v obr. 11a).

Tím nabýváme multiplikačního **abaku Lalanne-ova**, jehož základ máme vyznačen v obr. 12. užitím logarithmického papíru druhu α[33]). Na okraji spodním a levém jsou vyznačeny shodné stupnice logarithmické, z nichž prvá má pokračování na okraji pravém, druhá na okraji horním. Jednotlivými body těchto stupnic procházejí kromě vertikál a horizontál řečené isoplety (pod úhlem 135° k ose $+ x$), a to na vlastním abaku Lalan-

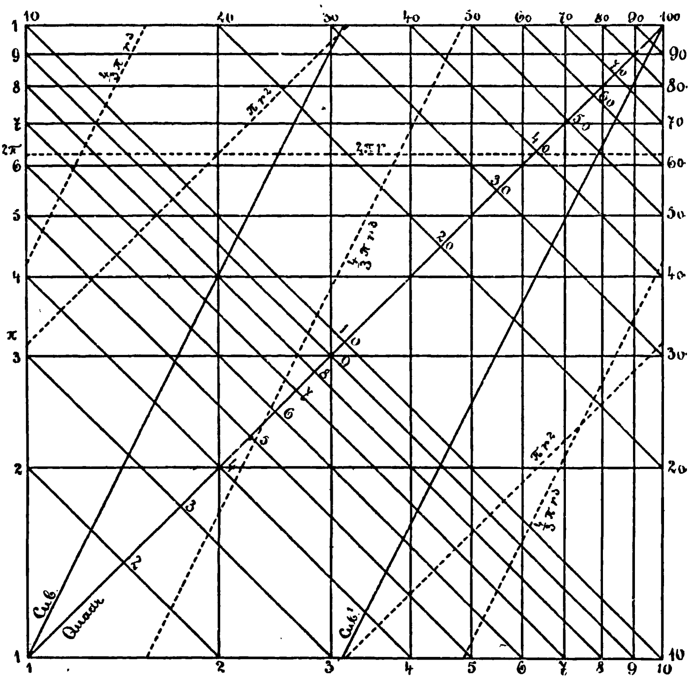


Obr. 11a.

neově, který si každý užitím logarithmického papíru snadno seřídí, ve vzdálenostech 0·1 až do 10 a pak ve vzdálenostech 1 od 10 do 100. Úhlopříčna (označená Quadr.) nese koty jednotlivých isoplet. Vede nás k dvojmocem čísel na krajních stupnicích pomocí jejich vertikál resp. horizontál. (Čti dvojmoci čísel od 1 do 10.) Jak naším abakem počítáme součin, jest zřejmo. (Na př. $2 \times 3 = 6$; vertikála bodu 2 a horizontála bodu 3 protínají se na isopletě 6.) Obráceným postupem provádíme oddvojmocňování a dělení.

[33]) Při skutečném zřizování abaku vyznačíme tolik isoplet, kolik máme na logarithmickém papíře vyznačeno horizontál a vertikál.

Počátkem vedena jest dále přímka Cub. o směrnici $\frac{2}{1}$. Přímka tato vede k trojmocem. Na př. $2^3 = 8$; vertikála bodu 2 protíná přímku Cub. na isopletě 8. Přímka Cub. jest nahoře přerušena a pokračování její vedeno jest pak jako přímka Cub.[1] zdola do pravého horního rohu. Výsledky získané přímkou Cub.[1] nutno násobiti desíti. (Na př. 4^3, 5^3, ... 10^3). Obráceným postupem provádíme odtrojmocňování čísel.



Obr. 12.

Obecně vede nás takto přímka o souměrnici $\frac{n-1}{1}$ k n-tým mocninám čísel. Při jejím 1., 2., ... k.tém pokračování nutno výsledky násobiti 10^1, 10^2, ... 10^k. Obrácený postup dává odmocňování číslem n.

Do abaku vkreslujeme si různé přímky pomocné, které nám nejvyšší měrou urychlí provádění úloh, které se nám často vyskytují. Tak v obrazci nakreslena horizontála 2π (označená $2\pi r$; r vytýkáme na spodním měřítku), dále bodem π vedená přímka (směru 45^0) označená πr^2 (r opět vytýkáme dole; přímka má jedno pokračování, při němž opět výsledky násobíme desíti); konečně vidíme tam přímku $\frac{4}{3}\pi r^3$ (rovnoběžna k přímce *Cub*; má dvojí pokračování, z nichž pro prvé násobíme 10^1, pro druhé 10^2).

Každá isopleta tohoto abaku dává vypočítanou tabulku proporční pro úměru tvaru

$$x : m = n : \lambda, \text{ takže } x = \frac{m \cdot n}{\lambda},$$

kde m, n jsou stálá čísla, nebo čísla stálého součinu.

Vedle uvedených čar pro výpočet obvodu a obsahu kruhu a obsahu koule zaneseny na abaku Lalanne-ově koefficienty ku přeměně měr a vah, přímky vedoucí k obsahu některých pravidelných mnohoúhelníků; jest zařízen též pro základní úlohy z mechaniky a obsahuje též měřítka sinusů, tangent a logarithmů.

Tento abakus vydán v roce 1843; schválen 11. září pařížskou Akademií věd. O jeho rychlém rozšíření svědčí výrok Lalanne-ův v knize Méthodes graphiques .. (1878): „L'Abaque a été recommandé, depuis lors, par la Société pour l'instruction élémentaire (séance du 1er avril 1846); par la Société d'encouragement, qui lui a décerné une médaille de platine (Bulletin, t. 45, p. 658); autorisé par le Conseil de l'Université (14 janvier et 4 avril 1848) *pour les écoles primaires* de différents degrés; recommandé par le Ministre de l'intérieur aux préfets pour le service des agents voyers (circulaire *n*⁰ 5, 28 janvier 1847); adressé par le Ministre des travaux publics *à tous les ingénieurs des Ponts et Chaussés et des Mines* (circulaire *n*⁰ 1, 24 mars 1847) *Un Abaque mural de grandes dimensions* a été établi pour l'enseignement dans les écoles.“

Lalanne doplnil později svůj abakus příčkami směru kolmého k isopletám. Jako pro isopletu z platí vztah $z = x \cdot y$ čili $x_1 + y_1 = z_1$ ($=$ úseku na ose x nebo y), platí pro každou příčku t tohoto druhu vztah

$$t=\frac{y}{x} \text{ čili } y_1-x_1= \quad t_1 \;(= \text{úseku na ose } y),$$

$$\text{nebo } x_1-y_1=-t_1 \;(= \text{úseku na ose } x).$$

Příčka t dává tedy touž proporční tabulku jako příslušný zásun na pravítku logarithm.; pravítko jest značně dražší.

Různou kombinací veličin x, y, z, t nabýváme vztahů:

$z=x\,.\,y,$ $y=t\,.\,x;\ z=tx^2$	$x=\frac{z}{y},\ t=\frac{y}{x}$ $z=\frac{y^2}{t},\ t=\frac{z}{x^2}$	$y=\sqrt{z\,.\,t}$ $x=\sqrt{\frac{z}{t}}.$

Vidíme tedy, že přibráním příček t zvětšuje se značně rozmanitost výpočtů, které možno okamžitě provésti. Současné použití přímek o celistvých nebo racionálních směrnicích, pomocí nichž provádíme umocňování známým způsobem, vede k velikému počtu kombinací výpočtů. Máme-li prováděti v praksi celou řadu výpočtů téhož druhu, upravíme si abakus k tomu cíli, zakreslíme pro větší zřetelnost do něho jen přímky k účelu tomu nutné.

Jest zřejmo, že výsledky, jichž dosáhneme užitím logarithmického papíru modulu 25 *cm*, jsou dány, při dostatečné přesnosti výkresu, se stejnou přesností jako při užití logarithmického pravítka. Vzhledem k větší rozmanitosti operací rychle proveditelných jest v mnohých případech užití papíru více doporučitelno.

26. V nomografii užíváme, jak známo[34]), místo souřadnic pravoúhlých s oblibou souřadnic o dvou rovnoběžných osách u, v, t. zv. *souřadnic nomografických.* Spojnice počátečních bodů obou os může býti k těmto osám libovolně nakloněna; volme ji na př. kolmou k nim. Bod P v rovině jest dán souřadnicemi $O_uA=u$, $O_vB=v$. Vytvořuje-li pak nomografický bod $P(u, v)$ přímku g, platí rovnice

$$(r)\ldots\frac{\alpha}{u}+\frac{\beta}{v}=1,$$

---

[34]) Viz na př.: V. Láska, O sestrojení vzorců empir., Časopis 40., str. 11 dole.

jež jest tedy rovnicí přímky g; při tom značí α, β úseky této přímky na osách u, v.

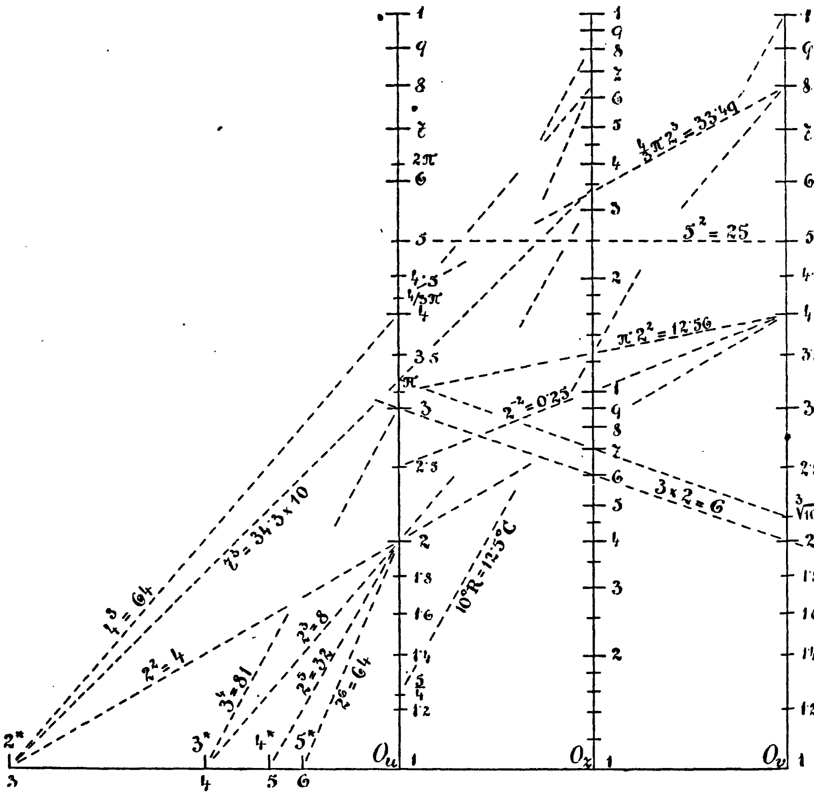
Uvažujme kromě naší nomografické soustavy souřadné soustavu pravoúhlou (Oxy). Sestrojme si zde bod $G(\alpha, \beta)$ o souřadnicích $x = \alpha$, $y = \beta$ rovných úsekům přímky $g(\alpha, \beta)$ soustavy nomografické; dále sestrojme přímku p o úsecích u resp. v, na osách x, y, rovných souřadnicím u, v nomografického bodu P. Přímka p prochází bodem G, jak plyne z rovnice r. Každému bodu P přímky g odpovídá tedy takto určitá přímka p jdoucí bodem G.

Tento vztah obou soustav souřadných jest tedy takového druhu, že každému bodu soustavy jedné odpovídá jedna a jen jedna přímka soustavy druhé a přímce jdoucí bodem jedné soustavy odpovídá v druhé soustavě bod ležící na přímce onomu bodu příslušné. Takovýto vztah dvou soustav rovinných nazýváme *korrelací*.

Touto korrelací transformuje se každý útvar soustavy jedné, složený z bodů a přímek, v určitý útvar soustavy druhé, složený z přímek a bodů. Transformujme tímto způsobem abakus Lalanneův zřízený v soustavě pravoúhlé v *abakus nomografický*. Soustava vertikál resp. horizontál přejde v řadu bodů logarithmické stupnice na ose u resp. v; obě stupnice jsou shodné (viz obr. 13.). Isoplety z přejdou v body ležící na přímce z, která půlí vzdálenost obou os. Naneseme-li na tuto přímka logarithmickou stupnici polovičního modulu, pak přímka protínající osy v bodech a, b logarithmických stupnic vytíná na přímce z bod $a \,.\, b$ stupnice (viz příklad $3 \times 2 = 6$). Každá přímka svazku o středu v pevném bodě přímky z vytíná tedy na stupnicích u, v čísla stálého součinu. Toho užijeme s výhodou, máme-li určité číslo dělit řadou různých čísel.

Příčky t přecházejí zde v body na přímce nekonečně vzdálené. Nevýhodné užití těchto bodů nahradíme si tím, že si příslušný poměr vedoucí k proporční tabulce vytkneme jako násobitel na jedné ze stupnic u, v. (V obr. zanesen koefficient $\frac{5}{4}$ vedoucí k vzájemné přeměně stupňů Celsiových a Réaumurových. Příklad: $10^0\, R = 12{\cdot}5^0\, C$.)

Jak známo, užíváme při nomogramech, při nichž příslušné body jednotlivých stupnic jsou na přímce (n. à points alignés), průsvitného pravítka s přímou rýhou.



Obr. 13.

Je-li $d = \overline{O_u O_v}$, pak bod na spojnici $O_u O_v$ v levo od bodu O_u ve vzdálenosti $\dfrac{d}{n-2}$ vede k n-tým mocninám; čísla vytýkáme na u, mocniny čteme na z. (V obrazci vyznačeny body 3, 4, 5, 6 pro mocniny 3., 4., 5., 6.; bod 2 jest v nekonečnu. Viz příklady 5^2, 4^3, 3^4, 2^5, 2^6).

Chceme-li číslo vytýkati opět na u, mocninu však čísti na v, vede k n-té mocnině bod ve vzdálenosti $\dfrac{d}{n-1}$. (Vyznačeny body 2*, 3*, 4*, 5*; provedeny příklady 2^2, 3^3). Tohoto způsobu užijeme na př., jde-li o mocninu zápornou. (Příklad

$$2^{-2} = 0{\cdot}25\,;$$

výsledek jest totiž nutno děliti desíti.)

Pro užití v praksi vytýkáme si ovšem na stupnicích též čísla často přicházející. Tak v obr. vidíme na u čísla π, 2π, $\frac{4}{3}\pi$. (Provedeny příklady $\pi \,.\, 2^2$, $\frac{4}{3}\pi 2^3$.)

Jestliže by konečný výsledek výrazu nevyšel na vyznačenou část stupnice, nutno během počtu příslušné částečné výsledky násobiti vhodnou mocninou čísla 10.

Jistá obtíž objevuje se, jde-li o n-tou mocninu větší než 100 čísla menšího než 10. Jde-li na př. o 3. mocninu takového čísla a (na př. 7^3; uváděno jen pro jednoduchost; známe ji z paměti), možno postupovati tak, že si na v vytkneme číslo $\sqrt[3]{10}$ (stanovíme je na u a přeneseme na v); pomocí tohoto čísla najdeme na u číslo $\frac{a}{\sqrt[3]{10}}$, načež

$$\left(\frac{a}{\sqrt[3]{10}}\right)^3 = \frac{a^3}{10}. \quad (7^3 = 34{\cdot}3 \times 10 = 343).$$

Větší než 3. mocninu čísla pak stanovíme součinem mocnin třetích, druhých a prvních, při čemž jednotlivé činitele násobíme vhodnou mocninou čísla 10. V tomto případě jest zde tedy postup dosti zdlouhavý.

Čtení čísel na stupnicích při tomto abaku jest pohodlnější a méně namáhá zrak než při Lalanneově abaku, kde nutno každou přímku sledovati až k průsečíku s příslušnou stupnicí. Při zřizování tohoto abaku nutno vzdálenost d voliti přiměřeně velkou.

c) Řešení rovnic.

27. Logarithmického obrazu funkce možno užíti s výhodou k řešení rovnic. Při tom budiž podotčeno, že postup jest zde týž, — na rozdíl od jiných způsobů řešení — ať jest stupeň rovnice jakékoli číslo; jest lhostejno, zdali mocnitelé členů rovnice jsou čísla celá nebo lomená. Postup stává se zde zdlouhavějším jen tehdy, stoupá-li počet členů rovnice.

Máme-li řešiti rovnici $f(x) = 0$, rozložme vhodným způsobem funkci $f(x)$ v rozdíl dvou funkcí

$$f(x) = \varphi(x) - \psi(x),$$

a sestrojme logarithmické obrazy φ, ψ funkcí

$$y = \varphi(x), \; y = \psi(x).$$

Souřadnice x průsečíků obou křivek stanoví *reálné* kladné kořeny dané rovnice. Záporné kořeny této rovnice obdržíme jako kladné kořeny rovnice $f(-x) = 0$, jež plynou jako souřadnice x průsečíků křivek φ_1, ψ_1, jež jsou logarithmickými obrazy funkcí $y = \varphi(-x)$, $y = \psi(-x)$; tyto obrazy jest tedy rovněž nutno vyznačiti.

Zmíněné rozložení funkce $f(x)$ provedeme často nejjednodušeji tím, že spojíme jednak členy o kladných koefficientech, jednak členy o záporných koefficientech.

Ježto však, jak jsme seznali, jsou-li mocnitelé členů rovnice dány velikými čísly, stoupaly by křivky φ, ψ příliš příkře, tudíž jejich průsečíky by byly nepřesné, doporučuje se v takovém případě děliti celou rovnici vhodnou mocninou čísla x.

28. Značného zjednodušení nabývá nomografie zavedením **pohyblivých soustav**. (Sem patří též logarithmické pravítko. Užití soustav pohyblivých ve dvou směrech jest základem grafícko-mechanických zařízení k řešení rovnic, jak zavedl je Reuschle. Viz na př. Encyclopédie des sc. mathém., Gauthiers-Villars, Teubner, 1909, Tome I, volume 4., str. 400; následující postup jest výhodnější a má širší význam.)

Užitím pohyblivých logarithmických obrazů funkcí nabýváme mechanického řešení velikého množství rovnic; na př. rovnic 7. stupně, jimž chybí pouze dva členy. Tímto způsobem se také poprvé zdařilo řešiti soustavu 2 rovnic o 2 neznámých.

Snadno seznáme, že logarithmický obraz funkce

$$y = \pm ax^l \pm bx^m \; \ldots \; (\gamma)$$

obdržíme translací (rovnoběžným posunutím) log. obrazu funkce

$$y = \pm x^l \pm x^m \ldots (\delta).$$

Přesuneme-li totiž obraz (δ) tak, že počátek soustavy souřadné, s křivkou δ nehybně spojené, přejde do polohy ($log\ \alpha$, $log\ \beta$), nabudou souřadnice (x_1, y_1) bodu této křivky k původní nehybné soustavě takových hodnot $\overline{x_1}$, $\overline{y_1}$, že

$$\overline{x_1} = x_1 + log\ \alpha, \quad \overline{y_1} = y_1 + log\ \beta,$$

čili

$$x_1 = \overline{x_1} - log\ \alpha, \quad y_1 = \overline{y_1} - log\ \beta,$$

t. j., že

$$x = \frac{\overline{x}}{\alpha}, \quad y = \frac{\overline{y}}{\beta}.$$

Abychom tudíž přesunutím obrazu δ obdrželi obraz γ, stačí α, β zvoliti tak, aby

$$a = \frac{\beta}{\alpha^l}, \quad b = \frac{\beta}{\alpha^m},$$

čili aby

$$log\ \beta = log\ a + l\ log\ \alpha$$
$$log\ \beta = log\ b + m\ log\ \alpha.$$

Nutno tedy posunouti počátek soustavy souřadné obrazu δ do průsečíka přímek, jež jsou logarithmickými obrazy členů ax^l, bx^m.

Křivku δ s osami s ní spojenými přeneseme si za tím účelem na průsvitný papír a tento posuneme na spodním log. papíře tak, že počátek její soustavy padne do stanoveného právě bodu spodního nehybného papíru logarithmického (a seřídíme ovšem směr os přesně dle směru horizontál a vertikál papíru log.), načež křivka δ jeví se nám vzhledem ke spodnímu papíru jako žádaná křivka γ.

Vzhledem k tomu obdržíme logarithmický obraz funkce

$$y = \pm ax^l \pm bx^m \pm cx^n,$$

kde a, b, c jsou libovolné konstanty, translací jedné ze soustavy ∞^1 křivek, jež jsou obrazy funkce

$$y = \pm x^l \pm x^m \pm \lambda x^n,$$

kde λ jest proměnlivý parametr; k zahrnutí všech funkcí tvaru toho jest tedy třeba nanésti na průsvitný papír celou soustavu

∞^1 křivek, jež odpovídají jednotlivým hodnotám parametru λ. (Není-li křivka potřebná pro náš případ mezi těmito křivkami obsažena, obdržíme ji interpolací mezi sousedními dvěma křivkami; parametr λ jest na základě koefficientů a, b, c a exponentů l, m, n dán výrazem

$$\lambda = \frac{c}{a}\left(\frac{a}{b}\right)^{\left(\frac{(l-m)2+ln}{l(m-l)}\right)}.$$

29. Z toho plyne možnost řešiti veliké množství rovnic. Jde-li [35]) na př. o *obecnou rovnici trinomickou*

$$x'^m = \pm bx'^n \pm c, \tag{1}$$

převeďme ji substitucí $x'^n = x$ na tvar

$$x^{\frac{m}{n}} = \pm bx \pm c. \tag{1_1}$$

V této poslední rovnici uvažujme zvláště část na levé straně a na pravé straně. Obrazu této části docílíme posunem logarithmického obrazu funkce

$$y = \pm x \pm 1,$$

t. j. funkcí $y = x + 1$ nebo $y = -x + 1$ nebo $y = x - 1$, kteréžto křivky jsou vyznačeny v obr. 9. (Prvá jest souměrna dle osy y k addiční křivce a, druhá k subtrakční křivce s.) Křivky tyto přeneseme si na průsvitný papír, kdežto na spodním logarithmickém papíře si vyznačíme svazek přímek o středu v počátku jako obrazy levé strany rovnice (podíl $\frac{m}{n}$ udává směrnici příslušné přímky). Tím máme provedeno zařízení pro mechanické řešení všech rovnic tvaru (1_1); stanovíme tím všecky reálné kořeny těchto rovnic (a sice, vzhledem k odst. 27., vždy jedna křivka dává kořeny kladné, druhá záporné) a na základě nich pak příslušné kořeny rovnic daných.

Obecnou rovnici 3. stupně

$$ax^3 \pm bx^2 \pm cx \pm d = 0 \tag{2}$$

uveďme (vzhledem k odst. 30. na konci) na tvar

$$ax \pm b \pm cx^{-1} \pm dx^{-2} = 0, \tag{2_1}$$

---

[35]) *Mehmke*, Civilingenieur 1889.

načež řešíme ji užitím log. obrazů funkcí

(*a*) $$y = ax \pm b$$

(*b*) $$y = \mp cx^{-1} \mp dx^{-2}.$$

K tomu jest tudíž třeba dvou papírů průsvitných, jež posouváme na spodním pevném papíru logarithmickém. Na první papír naneseme známé nám již obrazy funkcí

(μ) $$y = \pm x \pm 1,$$

na druhý obrazy funkcí

(ν) $$y = \pm x^{-1} \pm x^{-2},$$

t. j. funkcí $y = x^{-1} + x^{-2}$, $y = -x^{-1} + x^{-2}$, $y = x^{-1} - x^{-2}$. Křivky tyto vyznačeny jsou rovněž v obr. 9. (Při jejich konstruování možno s výhodou užíti té okolnosti, že

$$\pm x^{-1} \pm x^{-2} = \frac{1}{x^2}(\pm x \pm 1),$$

takže na pořadnici bodu křivky (μ) obdržíme bod křivky (ν) odečtením dvojnásobné úsečky.)

Příklad. Jednodušší případ nastane, jestliže v rovnici 3. stupně chybí jeden člen. Tak na obr. 14. provedeno jest řešení rovnice

$$x^3 - 7{\cdot}23x - 2{\cdot}72 = 0.$$

Pišme ji ve tvaru

$$x^3 = 7{\cdot}23x + 2{\cdot}72,$$

jenž vede nás ke kořenům kladným, kdežto tvar

$$x^3 = 7{\cdot}23x - 2{\cdot}72$$

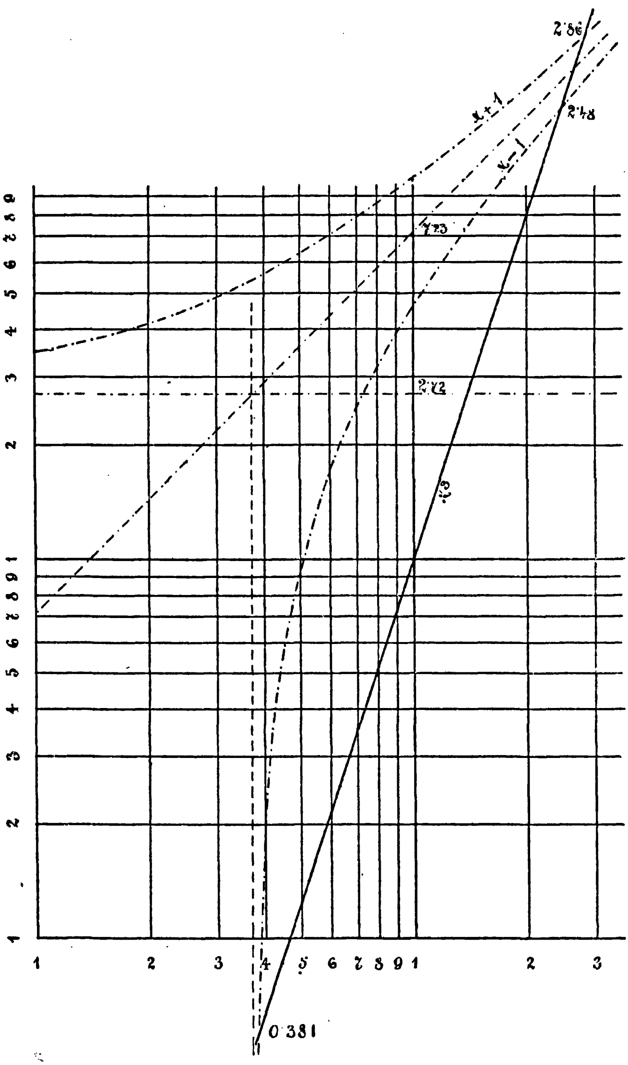
vede nás ke kořenům záporným dané rovnice (viz odst. 30.). Na spodním papíře logarithmickém uvažujeme přímku x^3, kdežto průsvitný papír posuneme tak, aby počátek přišel do průsečíka přímek $7{\cdot}23\,x$, $2{\cdot}72$. Posunuté křivky $x + 1$ resp. $x - 1$ protnou pevnou přímku x^3 v bodech 2·86 resp. 2·48, 0·381, takže daná rovnice má kořeny

$$+2{\cdot}86,\ -2{\cdot}48,\ -0{\cdot}381.$$

(Ježto druhý koefficient, při x^2, v dané rovnici rovná se 0, musí součet získaných hodnot kořenů býti roven 0, až na možnou odchylku vzhledem k přesnosti postupu). Způsob určení případných kořenů imaginárních seznáme v dalším.

Obecnou rovnici 4. stupně

$$ax^4 \pm bx^3 \pm cx^2 \pm dx \pm e = 0 \tag{3}$$



Obr. 14.

pišme ve tvaru

$$ax^2 \pm bx \pm c \pm dx^{-1} \pm ex^{-2} = 0. \tag{3_4}$$

a řešme užitím funkcí

$$y = ax^2 \pm bx \pm c,$$
$$y = \pm dx^{-1} \pm ex^{-2},$$

takže jest třeba dvou průsvitných papírů, z nichž jeden nese známý nám již log. obraz funkce

$$(\nu) \qquad y = \pm x^{-1} \pm x^{-2}$$

a druhý čtyři soustavy α^1 křivek, obrazů funkce

$$(\varrho) \qquad y = x^2 \pm x \pm \lambda,$$

kde λ jest proměnlivý parametr.

Obecná rovnice 5. stupně

$$ax^5 \pm bx^4 \pm cx^3 \pm dx^2 \pm ex \pm f = 0 \qquad (4)$$

pak obdobně vyžaduje dvou soustav α^1 křivek, totiž obrazů funcí

$$(\varrho) \qquad y = x^2 \pm x \pm \lambda$$
$$(\sigma) \qquad y = \pm \mu x^{-1} \pm x^{-2} \pm x^{-3},$$

kde λ, μ jsou proměnlivé parametry.

Seznáváme tudíž, že použití cesty logarithmicko-grafické umožní nám mechanické řešení algebraických rovnic jakéhokoliv stupně, jichž počet členů jest nejvýše *šest* (při methodě Reuschle-ho jest tento největší počet členů dán číslem *pět*); možno zde tedy řešiti rovnici 6. stupně, v níž schází aspoň jeden člen, rovnici 7. stupně, v níž chybějí aspoň dva členy, atd.

(Dokončení.)

O rázu těles.

Žákům středních škol píše prof. Dr. **Boh. Kučera.**

Základní poznatky o rázu těles obsahuje Jeništa-Maškova učebnice fysiky pro vyšší třídy středních škol. Úkolem tohoto článku jest tyto poznatky poněkud prohloubiti, do té míry, aby čtenáři bylo umožněno řešiti některé sem spadající jednoduché úlohy.

Počneme jednoduchým případem: Dvě tělesa m_1 a m_2 pohybují se svými těžišti po téže přímce s různými rychlostmi u_1 a u_2, počítanými v témž směru, na př. z leva v pravo za kladné.