Josef Štěpánek

Příspěvek k theorii integrace diff. rovnic lin. obyčejných omezenými integrály

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 45 (1916), No. 2-3, 204--208

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/108956

kde zase bude

$$ {}^0a_n = x_1, \qquad {}^0b_n = y_1, \qquad {}^0a'_n = x_2, \qquad {}^0b'_n = y_2. $$

Ze vzorců těchto vidíme, že ku reálným dvojinám A_1, B_1 příslušejí vždy imaginární dvojiny ${}^0A_n$, ${}^0B_n$; ${}^0A'_n$, ${}^0B'_n$, jak též z dřívějších našich úvah konstruktivních bylo patrno.

Příspěvek k theorii integrace diff. rovnic lin. obyčejných omezenými integrály.

Napsal Dr. **Josef Štěpánek** v Táboře.

I. Petzwal *), pojednávaje o rovnicích, které lze převésti na rovnici Laplaceovu a tím je řešiti omezenými integrály, uvádí též rovnici:

$$ x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + (a_1 + b_1 x^m) x \frac{dy}{dx} + (a_0 + b_0 x^m + c_0 x^{2m}) y = 0, \quad (1) $$

která po substitucích

$$ x^m = t, \quad y = t^k z $$

přejde v Laplaceovu za podmínky:

$$ k(k-1)m^2 + k\{m(m-1) + ma_1\} + a_0 = 0, $$

kterou jest k stanoveno.

Rovněž tak rovnice:

$$ x^3 \frac{d^3y}{dx^3} + x^2 \frac{d^2y}{dx^2}(a_2 + b_2 x^m) + x \frac{dy}{dx}(a_1 + b_1 x^m + c_1 x^{2m}) \quad (2) $$
$$ + (a_0 + b_0 x^m + c_0 x^{2m} + d_0 x^{3m}) y = 0 $$

přejde substitucí $x^m = t$ v Laplaceovu, platí-li:

$$ (m-1)(m-2) + (m-1)a_2 + a_1 = 0, \quad a_0 = b_0 = 0. $$

Petzwal tedy dospívá k Laplaceově rovnici za jistých podmínek jednak pro exponent k, jednak pro koefficienty rovnice. Uvažoval jenom tyto speciální rovnice. Lze však ukázati, že i obecná rovnice:

$$ x^n \frac{d^ny}{dx^n} + P_1(x^m) \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} \cdot x^{n-1} + P_2(x)^m \frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} \cdot x^{n-2} + \dots $$
$$ + P_k(x^m) \frac{d^{n-k}y}{dx^{n-k}} \cdot x^{n-k} + \dots + P_{n-1}(x^m) \cdot \frac{dy}{dx} \cdot x \quad (3) $$
$$ + P_n(x^m) y = 0, $$

---

*) Petzwal: Integration der Differentialgleichungen I. Wien 1853.

kde $P_i(x^m)$ jest polynom i-tého stupně v x^m, se dá převésti na rovnici řešitelnou omezenými integrály, jenže tu nepřijdeme ku rovnici Laplaceově, nýbrž k rovnici differenciální, jež má za koefficienty polynomy stejného stupně, a která se dá, jak ukázal Poincaré*), řešit omezenými integrály.

Transformujme za tím účelem rovnici (3) substitucí:

$$x^m = t. \tag{4}$$

Snadno najdeme:

$$\frac{d^k y}{dx^k} = a_0^{(k)} \frac{d^k y}{dt^k} x^{km-k} + a_1^{(k)} \frac{d^{k-1} y}{dt^{k-1}} x^{(k-1)m-k} + \dots$$
$$+ a_r^{(k)} \frac{d^{k-r} y}{dt^{k-r}} x^{(k-r)m-k} + \dots + a_{k-2}^{(k)} \frac{d^2 y}{dt^2} . x^{2m-k}$$
$$+ a_{k-1}^{(k)} \frac{dy}{dt} . x^{m-k},$$

kde koefficienty $a_r^{(k)}$ jsou pouze numerické koefficienty.

Z této rovnice dosaďme do (3) za všechny derivace. I bude:

$$a_0^{(n)} \frac{d^n y}{dt^n} t^n + a_1^{(n)} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} t^{n-1} + \dots + a_r^{(n)} \frac{d^{n-r} y}{dt^{n-r}} t^{n-r} + \dots$$
$$+ a_{n-2}^{(n)} \frac{d^2 y}{dt^2} t^2 + a_{n-1}^{(n)} \frac{dy}{dt} t$$
$$+ P_1(t) \Big[a_0^{(n-1)} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} t^{n-1} + a_1^{(n-1)} . \frac{d^{n-2} y}{dt^{n-2}} . t^{n-2} + \dots$$
$$+ a_r^{(n-1)} \frac{d^{n-r-1} y}{dt^{n-r-1}} . t^{n-r-1} + \dots + a_{n-3}^{(n-1)} \frac{d^2 y}{dt^2} . t^2$$
$$+ a_{n-2}^{(n-1)} \frac{dy}{dt} . t \Big]$$
$$+ P_2(t) \Big[a_0^{(n-2)} \frac{d^{n-2} y}{dt^{n-2}} . t^{n-2} + a_1^{(n-2)} \frac{d^{n-3} y}{dt^{n-3}} . t^{n-3}$$
$$+ \dots + a_r^{(n-2)} \frac{d^{n-r-2} y}{dt^{n-r-2}} t^{n-r-2} + \dots + a_{n-4}^{(n-2)} \frac{d^2 y}{dt^2} t^2$$
$$+ a_{n-3}^{(n-2)} . \frac{dy}{dt} . t . \Big]$$
$$+ \dots\dots\dots\dots\dots$$
$$+ P_{n-2}(t) . \Big[a_0^{(2)} . \frac{d^2 y}{dt^2} . t^2 + a_1^{(2)} \frac{dy}{dt} . t \Big]$$
$$+ P_{n-1}(t) . a_0^{(1)} \frac{dy}{dt} . t$$
$$+ P_n(t) y = 0.$$

*) American Journal VII. 213.

Uspořádám-li, bude:

$$a_0^{(1)} t^n \frac{d^n y}{dt^n} + t^{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} \left[a_1^{(n)} + a_0^{(n-1)} . P_1(t)\right]$$
$$+ t^{n-2} \frac{d^{n-2} y}{dt^{n-2}} \left[a_2^{(n)} + a_1^{(n-1)} P_1(t) + a_0^{(n-2)} P_2(t)\right]$$
$$+ \dots\dots\dots\dots\dots +$$
$$+ t^2 \frac{d^2 y}{dt^2} \left[a_{n-2}^{(n)} + a_{n-3}^{(n-1)} P_1(t) + a_{n-4}^{(n-2)} P_2(t) + \dots + a_0^{(2)} P_{n-2}(t)\right]$$
$$+ t . \frac{dy}{dt} \left[a_{n-1}^{(n)} + a_{n-2}^{(n-1)} P_1(t) + a_{n-3}^{(n-2)} . P_2(t) + \dots + a_0^{(1)} . P_{n-1}(t)\right]$$
$$+ P_n(t)\, y = 0.$$

Tuto rovnici lze psáti ve tvaru:

$$\overline{P}_0(t) \frac{d^n y}{dt^n} + \overline{P}_1(t) . \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \overline{P}_2(t) \frac{d^{n-2} y}{dt^{n-2}} + \dots + \overline{P}_{n-2}(t) \frac{d^2 y}{dt^2}$$
$$+ \overline{P}_{n-1}(t) \frac{dy}{dt} + \overline{P}_n(t)\, y = 0, \tag{5}$$

kde $\overline{P_i}(t)$ jsou polynomy vesměs téhož stupně n.

Dělíme-li ještě faktorem $a_0^{(n)}$, dospějeme k rovnici, o které Poincaré ukázal, že ji lze integrovati omezenými integrály tvaru

$$y = \int_L e^{ut}\, U\, du, \tag{6}$$

užije-li se analogického postupu, kterým se integruje rovnice Laplaceova, a který se také někdy zve methodou Laplaceovou. Lze tedy i obecnou rovnici (3) integrovati omezenými integrály.

II. Omezenými integrály lze také řešiti tuto rovnici:

$$x^{2n} \frac{d^n y}{dy^n} + A_1\, x^{2(n-1)} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + A_2\, x^{2(n-2)} \frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} + \dots$$
$$+ A_r\, x^{2(n-r)} \frac{d^{n-r} y}{dx^{n-r}} + \dots + A_{n-2} x^4 \frac{d^2 y}{dx^2} + A_{n-1} \frac{x^2 dy}{dx} + A_n y = 0,$$

kde A_i jsou numerické koefficienty.

Položme: $x = \frac{1}{t}$, což jest substituce nahoře užitá pro případ $m = -1$. I bude:

$$\frac{d^k y}{dx^k} = b_0^{(k)} t^{2k} \frac{d^x y}{dt^k} + b_1^{(k)} t^{2k-1} \frac{d^{k-1} y}{dt^{k-1}} + b_2^{(k)} . t^{2k-2} \frac{d^{k-2} y}{dt^{k-2}} + \dots$$
$$+ b_r\, t^{2-kr} . \frac{d^{k-r} y}{dt^{k-r}} + \dots + b_{k-2}^{(k)} t^{k+2} \frac{d^2 y}{dt^2} + . b_{k-1}^{(k)} . t^{k+1} \frac{dy}{dt}.$$

Dosadím-li, dostanu:

$$\frac{1}{t^{2n}}\left[b_0^{(n)} t^{2n} \cdot \frac{d^n y}{dt^n} + b_1^{(n)} t^{2n-1} \frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} + \ldots + b_r^{(n)} t^{2n-r} \cdot \frac{d^{n-r}y}{dt^{n-r}} \right.$$
$$\left. + \ldots + b_{n-2}^{(n)} \cdot t^{n+2} \frac{d^2y}{dt^2} + b_{n-1}^{(n)} t^{n+1} \frac{dy}{dt}\right]$$
$$+ \frac{A_1}{t^{2(n-1)}}\left[b_0^{(n-1)} \cdot t^{2(n-1)} \frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} + b_1^{(n-1)} \cdot t^{2(n-1)-1} \frac{d^{n-2}y}{dt^{n-2}} + \ldots \right.$$
$$+ b_r^{(n-1)} \cdot t^{2(n-1)-r} \cdot \frac{d^{n-1-r}y}{dt^{n-1-r}} + \ldots$$
$$\left. + b_{n-3}^{(n-1)} \cdot t^{n+1} \frac{d^2y}{dt^2} + b_{n-2}^{(n-1)} \cdot t^n \frac{dy}{dt}\right]$$
$$+ \frac{A_2}{t^{2(n-2)}}\left[b_0^{(n-2)} \cdot t^{2(n-2)} \cdot \frac{d^{n-2}y}{dt^{n-2}} + b_1^{(n-2)} \cdot t^{2(n-2)-1} \frac{d^{n-3}y}{dt^{n-3}} \right.$$
$$+ \ldots + b_r^{(n-2)} \cdot t^{2(n-2)-r} \cdot \frac{d^{n-2-r}y}{dt^{n-2-r}}$$
$$\left. + \ldots + b_{n-4}^{(n-2)} \cdot t^n \frac{d^2y}{dt^2} + b_{n-3}^{(n-2)} \cdot t^{n-1} \frac{dy}{dt}\right]$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots +$$
$$+ \frac{A_{n-2}}{t^4}\left[b_0^{(2)} t^4 \frac{d^2y}{dt^2} + b_1^{(2)} t^3 \frac{dy}{dt}\right]$$
$$+ \frac{A_{n-1}}{t^2} b_0^{(1)} t^2 \frac{dy}{dt}$$
$$+ A_n y = 0.$$

Násobím t^{2n} a srovnám:

$$b^{(n)} \cdot t^{2n} \frac{d^n y}{dt^n} + \left[A_1 b_0^{(n-1)} \cdot t^{2n} + b_1^{(n)} t^{2n-1}\right] \frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}$$
$$+ \left[A_2 b_0^{(n-2)} t^{2n} + A_1 b_1^{(n-1)} t^{2n-1} + b_2^{(n)} \cdot t^{2n-2}\right] \frac{d^{n-2}y}{dt^{n-2}}$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots +$$
$$+ \left[A_{n-2} b_0^{(2)} t^{2n} + A_{n-3} \cdot b_0^{(n)} \cdot t^{2n-1} + \ldots + A_1 b_{n-3}^{(n-1)} \cdot t^{n+3} \right.$$
$$\left. + b_{n-2}^{(n)} \cdot t^{n+2}\right] \frac{d^2y}{dt^2}$$
$$+ [A_{n-1} b_0^{(1)} \cdot t^{2n} + A_{n-2} \cdot b_1^{(2)} t^{2n-1} + \ldots + A_2 b_{n-3}^{(n-2)} \cdot t^{n+3}$$
$$+ A_1 b_{n-2}^{(n-1)} \cdot t^{n+2} + b_{n-1}^{(n)} \cdot t^{n+1}\Big] \frac{dy}{dt}$$
$$+ A_n y\, t^{2n} = 0.$$

Krátím-li t^{n+1}, dostávám rovnici:

$$P'_0(t)\frac{d^n y}{dt^n} + P'_1(t)\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} + \ldots + P'_k(t)\frac{d^{n-k}y}{dt^{n-k}} + \ldots$$
$$+ P'_{n-1}(t)\frac{dy}{dt} + P'_n(t)\,y = 0,$$

kde $P'_i(t)$ jsou polynomy téhož stupně n—1-ho. Tím tedy důkaz proveden.

Za příklad mějme rovnice 2-ho řádu:

$$x^4\frac{d^2y}{dx^2} + ax^2\frac{dy}{dx} + by = 0;$$

hořejší substitucí přejde v tuto:

$$t\frac{d^2y}{dt^2} + (2-at)\frac{dy}{dt} + byt = 0,$$

což jest rovnice Laplaceova.

Rovnice 3-ho řádu:

$$x^6\frac{d^3y}{dx^3} + a_1x^4\frac{d^2y}{dx^2} + b_1x^2\frac{dy}{dx} + c_1y = 0$$

přejde v tuto:

$$t^2\frac{d^3y}{dt^3} + \left[-a_1t^2 + 6t\right]\frac{d^2y}{dt^2} + [b_1t^2 - 2a_1t + 6]\frac{dy}{dt} - c_1yt^2 = 0.$$

Tuto rovnici lze pak integrovati methodou Poincaréovou, svrchu zmíněnou.

Thermodynamika statického pole gravitačního na povrchu země.

Prof. Dr. **Arnošt Dittrich** v Třeboni.

Každá větev fysiky má svůj jasně vyhraněný poměr k thermice. Jen jedna činí dosud výjimku: zjevy gravitační. Ohledejme nejprve příčiny, proč objevy thermodynamiky, pojem vniterné energie a entropie, dosud pro nauku o tíži významu neměly, proč thermodynamika, jež ve všech větvích fysiky tak hluboko zaorala, jen právě nauku o tíži pominula.

Kombinace klasické nauky o tíži s thermodynamikou. Koule, jež má hmotu m, specifické teplo c, jest nad povrchem země o poloměru R. Takovou hmotu lze pokládati za thermo-