Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Antonín Sucharda

Kterak lze dokázati větu o osách podobnosti tří kružnic užitím deskriptivní geometrie

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 30 (1901), No. 5, 361--363

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/109007

tak že hledaný integrál

$$\int \frac{x\,dx}{(x^3+8)\sqrt[3]{x^3-1}} = \frac{1}{6\sqrt[3]{3}} \left\{ \int \frac{dz}{1-z^3} - \int \frac{dy}{1-y^3} \right\}$$

vyjádřen jest integrály racionálních differenciálů.

Kterak lze dokázati větu o osách podobnosti tří kružnic užitím deskriptivní geometrie.

Napsal

Dr. **Ant. Sucharda** v Brně.

1. Ve čtvrtém vydání Mongeovy deskriptivní geometrie, jež pořídil r. 1820 žák jeho Brisson, dokazuje se na str. 56., že šest bodů podobnosti tří kružnic leží po třech na čtyřech přímkách (osách podobnosti). K výsledku tomu dospívá Monge, hledaje společné tečné roviny tří ploch kulových, sestrojených nad kružnicemi těmi jako hlavními, kterouž úlohu řeší užitím kuželových ploch, opsaných každým dvěma z těchto ploch kulových.

Důkaz Mongeův vyžaduje, aby žádné dvě z daných kružnic vespolek se neprotínaly, ježto sic vnitřní jejich tečny, tedy i příslušné plochy kuželové a proto i některé z tečných rovin jim společných stávají se pomyslnými. *)

V následujících řádcích pokusím se o důkaz také na deskriptivní geometrii založený, ale nezávislý na vzájemné poloze daných kružnic.

Za tou příčinou volím ono znění věty, které uvádí Salmon-Fiedler (Analytische Geometrie der Kegelschnitte, 4. vyd., p. 193.) a z něhož jsoucnost čtyr os podobnosti snadně vyplývá.

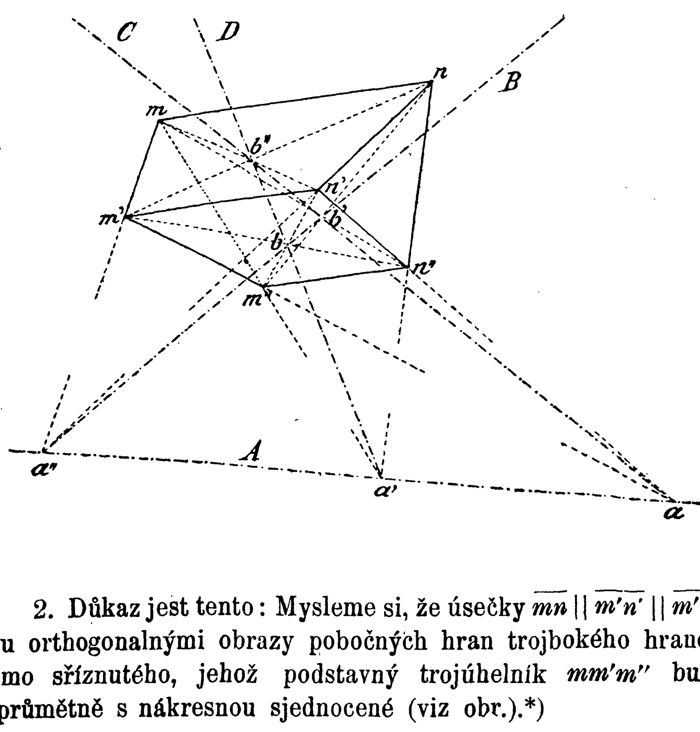
Dány-li v rovině tři libovolné kružnice $K K' K''$, prochází

---

*) Bez řečené výhrady dokazuje se věta planimetricky z obrácené věty Menelaovy (sr. Spieker, Lehrbuch der ebenen Geometrie 21. vyd. p. 20., a j.).

spojnice jednoho bodu podobnosti kružnic $K K'$ s jedním bodem podobnosti kružnic $K K''$ také bodem podobnosti kružnic $K' K''$.

Jsou-li $\overline{mn} \parallel \overline{m'n'} \parallel \overline{m''n''}$ stejnolehlé průměry řečených tří kružnic, a značí-li podle podmínky a'' vnější, b'' vnitřní bod podobnosti kružnic $K K'$, a', b' vnější, resp. vnitřní bod podobnosti kružnic $K K''$, konečně a, b vnější, resp. vnitřní bod podobnosti kružnic $K' K''$, potřebí ukázati, že bodové trojiny $aa'a''$ $ab'b''$, $a'bb''$, $a''bb'$ jsou každá na jedné přímce.



2. Důkaz jest tento: Mysleme si, že úsečky $\overline{mn} \parallel \overline{m'n'} \parallel \overline{m''n''}$ jsou orthogonalnými obrazy pobočných hran trojbokého hranolu šikmo sříznutého, jehož podstavný trojúhelník $mm'm''$ budiž v průmětně s nákresnou sjednocené (viz obr.).*)

Poněvadž jsou podle podmínky body a', a vnějšími body podobnosti resp. úseček $\overline{mn}$, $\overline{m''n''}$; $\overline{m'n'}$, $\overline{m''n''}$, vznikají užitím příslušných spojnic lichoběžníky $mnm''n''$, $m'n'm''n''$, pobočné to stěny řečeného hranolu, jehož horní podstavou jest troj-

*) Za zjednodušením vynechány jsou v obraze indexy, připomínající, že jest pořízen na základě orthogonalného promítání.

úhelník $nn'n''$. Roviny podstavné protínají se v přímce A určené body aa', v níž tedy protínají se i homologické strany, $\overline{mm''}$ $\overline{nn''}$ obou podstavných trojúhelníků a to v bodě a''.

3. Rovina $nn'm''$ s rovinou $mm'n''$ protíná se v přímce B, určené body b, b', obsaženými ve dvou pobočných stěnách hranolu. Přímka B seče přímku $\overline{nn'}$ jakož i přímku $\overline{mm'}$, jsouc s každou z nich v jedné rovině, poněvadž však nenáleží rovině, určené oběma těmi přímkami, protíná je v jejich společném bodě a''. Obdobně možná poznati, že také bodové trojiny $ab'b''$ $a'bb''$ leží na přímkách C, resp. D, zaměni-li se dvojice rovin právě užitá dvojicemi $n'n''m$, $m'm''n$; $n''nm'$, $mm''n'$.

4. Vrátíme-li se od prostorového významu obrazce, který byl podkladem úvah dosavadních, k příslušným průmětům, při čemž ve shodě s poslední poznámkou pod čarou značí A, B, C, D průměty stejnojmenných přímek, nabudeme v průmětně útvaru, z něhož vzhledem k 2. odstavci patrno: jsou-li dva body podobnosti (a, a'') body vnějšími, jest třetí (a') také bodem vnějším a s nimi v ose podobnosti A; vzhledem pak k odst. 3.: jsou-li dva body podobnosti (b, b'), resp. (b, b''), (b', b'') body vnitřními, jest třetí (a'') bodem vnějším a s nimi v ose podobnosti B, resp. C nebo D. Tím podán jest důkaz horní věty a zjištěna existence čtyř os podobnosti kružnic $K\,K'\,K''$.

Připomenutí. Že tři kružnice mají *čtyři* osy podobnosti, jest následkem toho, že každým dvěma z nich náležejí *dva* body podobnosti. Dva libovolné jiné útvary homothetické mají však jen *jediný* bod podobnosti. Z té příčiny mají tři takové útvary $U\,U'\,U''$, z nichž dva jsou třetímu podobny dle dvou různých bodů podobnosti, jen jedinou osu podobnosti.*)

---

*) Větu tuto i jednoduchý její důkaz planimetrický uvádí Strnad ve své Geometrii (2. vyd. pg. 88.); pro případ kružnic možná z ní dospěti ku větě, která jest předmětem přítomného článku.