Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

Václav Petržílka

O singularitách řady mocninné, ležících na kružnici konvergenční

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 56 (1927), No. 3, 154--171

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/109048`

O singularitách řady mocninné, ležících na kružnici konvergenční.

Napsal *Václav Petržilka.*

1. Z prací Abelových[1]) vysvítá, že pro každou funkci

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n + \ldots, \tag{1}$$

definovanou potenční řadou existuje konvergenční kružnice, t. j. obor, pro jehož vnitřní body řada (1) konverguje. Jak se chová daná řada na obvodu této kružnice, jejíž poloměr konvergence souvisí s koeficienty řady (1) vztahem

$$R = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n=\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}}, ^{2)} \tag{2}$$

jest předmětem vyšetřování řady specielních prací, počínaje prací Vivantiho.[3]) Účelem této práce jest, jednak odvoditi některé důležité věty starší, zvláště pak dospěti k nejnovějším výsledkům badání v tomto oboru, které jsou obsaženy v pracích pana profesora dra M. Kösslera[4]), užitím substituce

$$z = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\zeta. \tag{3}$$

Tato substituce není sice podstatná (Pringsheim užívá transformace Eulerovy, pan profesor Kössler substituce $z = x + \frac{3}{4}x^2$), dovoluje však provésti mnohé důkazy jednodušeji, jak po stránce věcné, tak

[1]) Abel: Recherches sur la série

$$1 + \frac{m}{1}x + \frac{m(m-1)}{1.2}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}x^3 + \ldots$$

Journal für Math. 1 (1826). Théorèmes et problèmes. Journal für Math. 2 (1827).

[2]) Petr: Diferenciální počet str. 216.

[3]) Souhrn těchto prací jest obsažen v Hadamardově knize: La série de Taylor et son prolongement analytique. Paris (1901) a v Encyklopaedie der Math. Wiss. II. (3) str. 460. a násl.

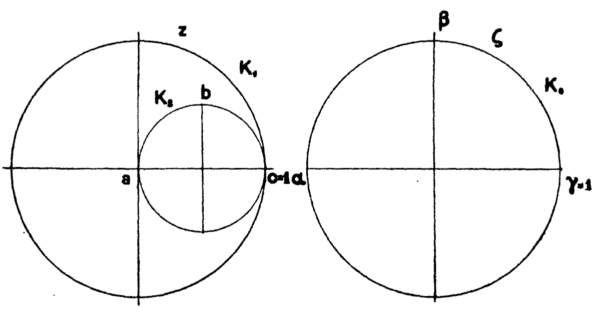
[4]) Kössler: Sur les singularités des séries entières. Rendiconti Reale Accad. naz. dei Lincei vol. XXXII. (5), 1° sem. fasc. 1°. Nouveaux théorèmes sur les singularités des séries entières (ibidem fasc. 2°). Sur les singularités des séries entières (ibidem fasc. 10°). O singularitách řady mocninné, ležících na kružnici konvergenční. Rozpravy Akad. Roč. XXXII. Tř. II. č. 35.

formální, shrnouti výsledky starší a získati konečně znovu věty, uvedené v citovaných pracích pana profesora Kösslera.

Substituce (3) zobrazuje konformně jednotkovou kružnici K_3 v rovině ζ na kružnici K_2 s poloměrem $R = \frac{1}{2}$, ležící uvnitř jednotkové kružnice K_1 v rovině z tak, že se jí dotýká v bodě $z = 1$.

Transformujme substitucí (3) řadu (1), která nechť konverguje v jednotkové kružnici K_1, takže $\overline{\lim\limits_{n=\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$ (vztah (2)). Obdržíme tak řadu

$$f(z) = A_0 + A_1\zeta + \ldots + A_n\zeta^n + \ldots,$$



při čemž

$$A_n = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k}{n} \frac{a_{n+k}}{2^{n+k}} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} \frac{a_{n+k}}{2^{n+k}} = \sum_{p=n}^{\infty} \binom{p}{p-n} \frac{a_p}{2^p}. \quad (4)$$

Nabývá-li ζ hodnot uvnitř a na obvodu kružnice K_3, $|\zeta| \leqq 1$, pak hodnoty z získané z rovnice $z = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\zeta$ vyplní právě jedenkrát kružnici K_2 a její obvod. Při tom řada

$$f(z) = A_0 + A_1\zeta + \ldots + A_n\zeta^n + \ldots$$

konverguje pro tyto hodnoty uvnitř a na obvodu kružnice K_2 (jelikož jest uvnitř K_1) s možnou výjimkou jediného bodu $z = 1$ (kterému odpovídá $\zeta = 1$). Je-li bod $z = 1$ bodem regulárním, jest poloměr konvergence dané řady větší než 1 čili roven $1 + \eta$, kde η jest kladné, pevné číslo; je-li $z = 1$ singulárním, jest poloměr konvergence právě roven 1. Vzhledem k tomu, že poloměr konvergence souvisí s koeficienty řady A_n vztahem (2), jest v případě, že bod $z = 1$ jest bod $\left\{ \begin{matrix} \text{regulární} \\ \text{singulární} \end{matrix} \right\}$,

$$\left\{ \overline{\lim_{n=\infty}} \sqrt[n]{|A_n|} \right\} \begin{matrix} < 1 \\ = 1 \end{matrix}$$

Z tohoto faktu plyne základní věta:

Věta 1.: *Nutná a dostačující podmínka pro to, aby bod $z = 1$ byl pro řadu (1) bodem* $\left\{ \begin{array}{l} \textit{regulárním} \\ \textit{singulárním} \end{array} \right\}$, *jest dána vztahem*

$$\left\{ \overline{\lim_{n=\infty}} \sqrt[n]{|A_n|} \right\} \begin{array}{l} < 1 \\ = 1 \end{array}.$$

Tato věta jest však příliš obecná, než aby se jí dalo užíti ve specielních případech. Abychom mohli především zjednodušiti výraz A_n a dokázati větu Vivanti-Dienesovu a Hadamardovu, jest třeba vyšetřiti, jak se chovají koeficienty

$$p(k, n) = \frac{1}{2^{n+k}} \binom{n+k}{k} = \frac{1}{2^{n+k}} \frac{(n+k) \dots (n+1)}{1 \,.\, 2 \dots k}.$$

Utvoříme-li podíl členu následujícího ($(n+k)$-tého) a členu předcházejícího ($(n+k-1)$-ho), získáme

$$\frac{n+k}{2k}. \tag{5}$$

Z toho, jak se chová tento podíl od $k = 1$ až do ∞, usoudíme, jak se chovají koeficienty $p(k, n)$ v témž intervalu. Podíl (5) (zprvu větší než 1) stále klesá (pokud $k < n$), pro $k = n$ jest roven 1 a pro $k > n$ jest stále menší než 1. Jest tedy pro $k < n$ člen $p(k, n) > p((k-1), n)$, pro $k = n$ rovná se člen předcházející členu následujícímu, čili $p(n, n) = p((n-1), n)$, při čemž tyto členy nabývají své maximální hodnoty, pro $k > n$ platí stále $p((k-1), n) > p(k, n)$. K vyšetření, jakých hodnot nabývají tyto koeficienty $p(k, n)$ pro veliké hodnoty n, slouží nám formule Stirlingova pro faktoriály[5])

$$n! = \sqrt{2\pi n} \,.\, n^n \,.\, e^{-n + \frac{\Theta_n}{12n}}, \quad 0 < \Theta_n < 1.$$

Tím obdržíme

$$p(k, n) = \frac{1}{2^{n+k}} \binom{n+k}{k} = \frac{1}{2^{n+k}} \frac{(n+k)^{n+k}}{n^n \, k^k} \left(\frac{n+k}{2\pi n \,.\, k} \right)^{\frac{1}{2}} (1 + \eta_{k,n})$$

$$= \left\{ \frac{(1+\varrho)^{1+\varrho}}{2^{(1+\varrho)} \varrho^\varrho} \right\}^n \left(\frac{1+\varrho}{2\pi n \varrho} \right)^{\frac{1}{2}} (1 + \eta_{k,n}), \tag{6}$$

klademe-li $\frac{k}{n} = \varrho$, při čemž ϱ jest v intervalu $0 < \varrho < 2$, $\lim_{k,n=\infty} \eta_{k,n} = 0$. n-tá odmocnina výrazu (6) má tvar

$$(p(k, n))^{\frac{1}{n}} = \frac{(1+\varrho)^{1+\varrho}}{2^{(1+\varrho)} \varrho^\varrho} \left(\frac{1+\varrho}{2\pi \varrho n} \right)^{\frac{1}{2n}} (1 + \vartheta_{k,n}) = \frac{(1+\varrho)^{1+\varrho}}{2^{(1+\varrho)} \varrho^\varrho} (1 + \vartheta'_{k,n}),$$

---

[5]) Petr: Počet integrální str. 408.

$$\lim_{k, n = \infty} \vartheta'_{k, n} = 0. \tag{7}$$

Tento výraz nabývá svého maxima rovného 1 pro $\varrho = 1$. Dosadíme-li v (7)

$$\varrho = 1 \pm \frac{h}{n}, \text{ čili } k = \left[n\left(1 \pm \frac{h}{n}\right)\right],$$ [6])

kde h jest číslo celé na n nezávislé, pak jest

$$[p((n \pm h), n)]^{\frac{1}{n}} = 1 + \Theta_n, \lim_{n = \infty} \Theta_n = 0. \tag{8}$$

Klademe-li

$$k = [n(1 \pm h)], \ 0 < h < 1,$$

kde h jest číslo na n nezávislé, jest $\lim\limits_{n = \infty} \varrho = 1 \pm h$ a pro $p(k, n)$ obdržíme

$$[p(n(1 \pm h), n)]^{\frac{1}{n}} = \sigma(1 + \Theta'_n), \tag{9}$$

kde

$$\sigma < 1, \ 0 < h < 1, \lim_{n = \infty} \Theta'_n = 0.$$

2. Získané výsledky stačí nyní k důkazu věty Vivanti-ho, týkající se řady s reálnými koeficienty, kterou rozšířil později Dienes[7]) i na řady s koeficienty komplexními za omezujících předpokladů.

Věta II. *Jestliže potenční řada konvergující uvnitř jednotkové kružnice*

$$f(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n + \ldots, \ \overline{\lim_{n = \infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = 1,$$

má všechny koeficienty reálné, kladné, pak bod $z = 1$ jest pro tuto řadu bodem singulárním.

Ve výraze A_n (4), který nás orientuje o singularitách potenční řady, zavedeme vybranou posloupnost $r_{n_\nu} = |a_{n_\nu}|$, kladouce

$$n = \left[\frac{n_\nu}{2}\right] = m_\nu, \ (n_\nu = 2n, \text{ nebo } 2n - 1). \tag{10}$$

Jelikož ve výrazu A_n jsou všechny členy kladné, jest vzniklý výraz A_{m_ν} větší, nebo roven největšímu členu ze součtu, tedy

$$|A_{m_\nu}| \geqq \frac{r_{n_\nu}}{2^{n_\nu}} \binom{n_\nu}{m_\nu}, \tag{11}$$

[6]) Hranatá závorka značí, že za k bereme největší celé číslo obsažené v daném výrazu. Závorku tu v dalším vynechávám, aby se výrazy zbytečně nekomplikovaly.

[7]) Vivanti: Sulle série di potenze. Rivista di Matematica 3 (1893).
Dienes: Essai sur les singularités des fonctions analytiques. Journal de math. (6) 5 (1909).

jak plyne z uvedených vlastností koeficientů $p(k, n)$ (rovnice (5)). Utvoříme-li m_ν-tou odmocninu tohoto výrazu, získáme vztah

$$|A_{m_\nu}|^{\frac{1}{m_\nu}} \geqq (1-\varepsilon)^{\frac{n_\nu}{m_\nu}} \left(\frac{\binom{n_\nu}{m_\nu}}{2^{n_\nu}}\right)^{\frac{1}{m_\nu}},$$

neboť pro všechna $\nu > \nu_0(\varepsilon)$ platí nerovnina

$$r_{n_\nu} > (1-\varepsilon)^{n_\nu}.$$

Přejdeme-li k limitě, jest

$$\overline{\lim_{n=\infty}} |A_n|^{\frac{1}{n}} \geqq \overline{\lim_{\nu=\infty}} |A_{m_\nu}|^{\frac{1}{m_\nu}} \geqq \lim_{\nu=\infty} (1-\varepsilon)^{\frac{n_\nu}{m_\nu}} \cdot \lim_{\nu=\infty} \left(\frac{\binom{n_\nu}{m_\nu}}{2^{n_\nu}}\right)^{\frac{1}{m_\nu}}.$$

Limita pravé strany uvedené nerovniny jest rovna 1, neboť

$$\lim_{\nu=\infty} (1-\varepsilon)^{\frac{n_\nu}{m_\nu}} = 1,$$

a podle (8) také

$$\lim_{\nu=\infty} \left(\frac{\binom{n_\nu}{m_\nu}}{2^{n_\nu}}\right)^{\frac{1}{m_\nu}} = 1.$$

Jest tedy

$$\overline{\lim_{n=\infty}} |A_n|^{\frac{1}{n}} \geqq \overline{\lim_{\nu=\infty}} |A_{m_\nu}|^{\frac{1}{m_\nu}} \geqq 1, \tag{12}$$

při čemž znaménko $>$ nutno vypustiti, jelikož by poloměr konvergence byl proti předpokladu < 1, jak plyne ze vztahu (2). Jest tedy uvedená limita rovna 1 a bod $z = 1$ bodem singulárním (podle věty I.).

Zobecnění této věty provedl Dienes následujícím způsobem:

Věta III. *Jestliže od určitého indexu počínaje všechny koeficienty řady*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad a_n = r_n e^{i\alpha_n}, \quad r_n \geqq 0, \quad \overline{\lim_{n=\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$$

jsou uvnitř úhlu $\alpha < \pi$ (vrchol v počátku), pak $z = 1$ jest bodem singulárním.

Stačí dokázati, že i za těchto podmínek

$$\overline{\lim_{n=\infty}} |A_n|^{\frac{1}{n}} = 1.$$

Pišme výraz A_n ve tvaru

$$|A_n| = \left| \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} \frac{a_{n+k}}{2^{n+k}} \right| = \left| \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} \frac{r_{n+k}}{2^{n+k}} \cos \alpha_{n+k} + \right.$$

$$+\, i \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} \frac{r_{n+k}}{2^{n+k}} \sin \alpha_{n+k} \Bigg| = (A^2 + B^2)^{\frac{1}{2}},$$

označíme-li A reálnou, B imaginárnou část výrazu A_n. Ježto platí

$$(A^2 + B^2)^{\frac{1}{2}} \geqq |A|,$$

je také, vzhledem k tomu, že $r_n \geqq 0$, $\cos \alpha_n > \cos \frac{\alpha}{2} =$ kladná konstanta,

$$|A_n| \geqq \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} \frac{r_{n+k}}{2^{n+k}} \cos \alpha_{n+k} \geqq \cos \frac{\alpha}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} \frac{r_{n+k}}{2^{n+k}}.$$

Jest tedy také

$$|A_n|^{\frac{1}{n}} \geqq \left(\cos \frac{\alpha}{2}\right)^{\frac{1}{n}} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} \frac{r_{n+k}}{2^{n+k}}\right)^{\frac{1}{n}}.$$

Přejdeme-li nyní k limitě pro $n = \infty$, obdržíme

$$\overline{\lim_{n=\infty}} |A_n|^{\frac{1}{n}} = 1;$$

neboť

$$\lim_{n=\infty} \left(\cos \frac{\alpha}{2}\right)^{\frac{1}{n}} = 1$$

$$\overline{\lim} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} \frac{r_{n+k}}{2^{n+k}}\right)^{\frac{1}{n}} = \overline{\lim_{\nu=\infty}} |A_{m_\nu}|^{\frac{1}{m_\nu}} = 1,$$

jak plyne z výrazu (12) a tedy bod $z = 1$ jest bodem singulárním.

K těmto větám lze připojiti větu, kterou po prvé dokázal Hadamard[8]) a znovu Lindelöf[9]) a která zní:

Věta IV.: *Jestliže o koeficientech a_n funkce*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad a_n = r_n e^{i\alpha_n}, \quad \overline{\lim_{n=\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = 1,$$

platí pro všechny hodnoty p, q dostatečně veliké $|\alpha_q - \alpha_p| \leqq \psi < \frac{\pi}{2}$, pak jest bod $z = 1$ bodem singulárním.

Absolutní hodnotu výrazu A_n povýšíme na druhou, čímž získáváme

$$|A_n|^2 = \frac{r_n^2}{2^{2n}} + 2\binom{n+1}{1} \frac{r_n r_{n+1}}{2^{2n+1}} \cos(\alpha_{n+1} - \alpha_n) + \ldots +$$

$$+ \sum_{k=0}^{h} \binom{n+k}{k} \binom{n+h-k}{h-k} \frac{r_{n+k} \cdot r_{n+h-k}}{2^{n+k}\, 2^{n+k-h}} \cos(\alpha_{n+h-k} - \alpha_{n+k}). \quad (13)$$

---

[8]) Hadamard: Essai sur l'étude des fonctions données par leur dévellop-pements de Taylor; Journal de Math. (4) 8 (1892).

[9]) Lindelöf: Sur la transformation d'Euler et la détermination des points singuliers d'une fonction définie par son dévelloppement de Taylor. Comptes Rendus 126 (1898).

Zavedeme opět vybranou posloupnost jako v odstavci předcházejícím rovnicí (10) tím, že klademe $n = \left[\frac{n_\nu}{2}\right] = m_\nu$. Pravá strana výrazu (13) jest vzhledem k tomu, že $\cos(\alpha_q - \alpha_p) \geqq \cos\psi > 0$, větší než největší člen tohoto výrazu, který získáme, klademe-li $k = \frac{h}{2} = m_\nu$. Jest tedy

$$|A_{m_\nu}|^2 \geqq \left[\binom{n_\nu}{m_\nu}\left(\frac{r_{n_\nu}}{2^{n_\nu}}\right)\right]^2$$

$$|A_{m_\nu}|^{\frac{1}{2m_\nu}} \geqq \left[\binom{n_\nu}{m_\nu}\cdot\left(\frac{r_{n_\nu}}{2^{n_\nu}}\right)\right]^{\frac{1}{2m_\nu}}.$$

Limita tohoto výrazu jest totožná s limitou (12) a jest tedy rovna 1. Bod $z = 1$ jest tudíž bodem singulárním, jak bylo dokázati.

3. Výsledků získaných v odst. 1 lze užíti dále k zjednodušení výrazu A_n následujícím způsobem. Klademe

$$n_1 = n(1 - h), \quad n_2 = n(1 + h)$$

a píšeme A_n ve tvaru

$$A_n = \sum_{k=0}^{n_1-1} \binom{n+k}{k} \frac{a_{n+k}}{2^{n+k}} + \sum_{k=n_1}^{n_2} \binom{n+k}{k} \frac{a_{n+k}}{2^{n+k}} + \sum_{k=n_2+1}^{\infty} \binom{n+k}{k} \frac{a_{n+k}}{2^{n+k}}.$$

Prostřední člen označíme B_n, první C_n a třetí D_n, takže

$$A_n = B_n + C_n + D_n.$$

Ježto platí

$$|C_n + D_n| \leqq |C_n| + |D_n|,$$

jest také

$$|C_n + D_n|^{\frac{1}{n}} \leqq (|C_n| + |D_n|)^{\frac{1}{n}}$$

a chceme dokázati, že jest

$$\overline{\lim_{n=\infty}} |C_n + D_n|^{\frac{1}{n}} < 1,$$

je-li h pevně zvolená konstanta v intervalu $0 < h < 1$; neboť pak jest možno použíti na výraz A_n Pringsheimovy pomocné věty,[10]) která zní:

Jsou-li dány dvě posloupnosti komplexních čísel P_n, p_n, $n = 1, 2, 3, \ldots$ a je-li při tom

$$\overline{\lim_{n=\infty}} |P_n|^{\frac{1}{n}} = P, \quad \overline{\lim_{n=\infty}} |p_n|^{\frac{1}{n}} = p < P,$$

pak jest

$$\overline{\lim_{n=\infty}} |P_n + p_n|^{\frac{1}{n}} = P.$$

---

[10]) Pringsheim: Über einige funktionentheoretische Anwendungen der Eulerschen Reihentransformation. Münch. Berichte 1912 p. 80. Větu tuto však uvádí již Leau ve své práci: Recherche des singularités d'une fonction définie par un dévelloppement de Taylor. Journal de Math. (5), vol. 5. (1899).

Za tím účelem jest třeba všimnouti si blíže vlastností koeficientů $p(k, n)$

$$p(k, n) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+k} \binom{n+k}{k} = \frac{(n+k)(n+k-1)\ldots(n+1)}{2^{n+k}.\,k(k-1)\ldots 1}.$$

Položme $k = n_1 - 1,\ n_1 - 2,\ n_1 - 3, \ldots$ pak

$$p((n_1-1), n) = \frac{1}{2^{n+n_1-1}} \frac{(n+(n_1-1))\ldots(n+1)}{(n_1-1)\ldots 1} = p((n_1-1), n)$$

$$p((n_1-2), n) = \frac{1}{2^{n+n_1-2}} \frac{(n+(n_1-2))\ldots(n+1)}{(n_1-2)\ldots 1} =$$

$$= 2p((n_1-1), n) \frac{(n_1-1)}{(n+(n_1-1))}$$

$$p((n_1-3), n) = \frac{1}{2^{n+n_1-3}} \frac{(n+(n_1-3))\ldots(n+1)}{(n_1-3)\ldots 1} =$$

$$= 2^2 p((n_1-1), n) \frac{(n_1-1)(n_1-2)}{(n+(n_1-1))(n+(n_1-2))}.$$

a t. d.

Odtud plyne pro C_n, je-li g'_n maximum absolutních hodno koeficientů a_k obsažených v C_n

$$|C_n| < g'_n p((n_1-1), n) \left(1 + 2\frac{(n_1-1)}{(n+(n_1-1))} + \right.$$
$$\left. + 2^2 \frac{(n_1-1)(n_1-2)}{(n+(n_1-1))(n+(n_1-2))} + \ldots \right);$$

čili

$$|C_n| < g'_n p((n_1-1), n) \left(1 + 2\frac{(n_1-1)}{n+(n_1-1)} + 2^2 \left(\frac{n_1-1}{n+(n_1-1)}\right)^2 + \ldots \right), \quad (14)$$

neboť

$$\frac{n_1}{n+n_1} > \frac{n_1-1}{n+(n_1-1)} > \frac{n_1-2}{n+(n_1-2)} > \frac{n_1-3}{n+(n_1-3)} > \ldots$$

Jelikož však platí

$$\frac{n_1-1}{n+n_1-1} < \frac{1-h}{2-h} < \frac{1}{2},$$

jest kvocient geometrické řady ve výrazu (14) menší než $\frac{2-2h}{2-h} < 1$, je-li jenom $h > 0$, což jest vždy splněno; jest tudíž tato řada konvergentní a její součet konečný a roven s_1.

S druhé strany platí o koeficientech $p(k, n)$, klademe-li $k = n_2 + 1,\ n_2 + 2,\ n_2 + 3, \ldots$

$$p((n_2+1), n) = \frac{1}{2^{n+n_2+1}} \frac{(n+(n_2+1))\ldots(n+1)}{(n_2+1)\ldots 1} = p((n_2+1), n)$$

$$p((n_2+2),n)=\frac{1}{2^{n+n_2+2}}\frac{(n+(n_2+2))\dots(n+1)}{(n_2+2)\dots 1}=$$
$$=\frac{1}{2}p((n_2+1),n)\frac{(n+(n_2+2))}{n_2+2}$$

a t. d.

Jest tedy

$$|D_n|<g''_n\,p((n_2+1),n)\left(1+\frac{1}{2}\frac{n+(n_2+2)}{n_2+2}(1+\varepsilon_n)+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2^2}\left(\frac{n+(n_2+2)}{(n_2+2)}\right)^2(1+\varepsilon_n)^2+\dots\right),\tag{15}$$

neboť

$$\frac{n+n_2}{n_2}>\frac{n+(n_2+1)}{n_2+1}>\frac{n+(n_2+2)}{n_2+2}>\frac{n+(n_2+3)}{n_2+3}>\dots;$$

při tom klademe

$$g''_n=(1+\varepsilon_n)^{n+n(1+h)+1},$$

neboť vzhledem ke vztahu $\overline{\lim\limits_{n=\infty}}|a_n|^{\frac{1}{n}}=1$, platí

$$|a_k|<(1+\varepsilon_n)^k,\ \lim_{n=\infty}\varepsilon_n=0 \text{ pro } k=n+1,\ n+2,\dots$$

Pak jest kvocient dvou členů po sobě následujících

$$\frac{1}{2}\frac{n+(n_2+2)}{n_2+2}(1+\varepsilon_n)<\frac{1}{2}\frac{n+n_2}{n_2}(1+\varepsilon_n)=\frac{2+h}{2+2h}(1+\varepsilon_n)<1,$$

zvolíme-li jenom n tak, aby $0<\frac{2\varepsilon_n}{1-\varepsilon_n}<h<1$, a má tudíž řada konečný součet s_2. Je-li g_n větší z obou čísel g'_n, g''_n, f'_n z hodnot $(p(n,(n_1-1)),\ p(n,(n_2+1))$ a s větší než součet s_1+s_2, pak jest

$$|C_n+D_n|^{\frac{1}{n}}\leqq(|C_n|+|D_n|)^{\frac{1}{n}}\leqq g_n^{\frac{1}{n}}f_n^{\frac{1}{n}}\,.\,s^{\frac{1}{n}}.\tag{16}$$

Je-li h konstantní a n vzrůstá nade všecky meze, pak jest

$$p^{\frac{1}{n}}((n_1-1),n)=\sigma_1(1+\vartheta'_n),\ p^{\frac{1}{n}}((n_2+1),n)=\sigma_2(1+\vartheta''_n)$$

podle rovnice (9) a tedy

$$\overline{\lim_{n=\infty}}f_n^{\frac{1}{n}}=\text{většímu z čísel }(\sigma_1,\sigma_2)<1.\tag{17}$$

Pro g_n platí

$$\overline{\lim_{n=\infty}}g_n\leqq 1\tag{18}$$

a vzhledem k tomu, že s lze voliti nezávisle od n

$$\lim_{n=\infty} s^{\frac{1}{n}} = 1. \tag{19}$$

Užijeme-li vztahů (17), (18), (19) na nerovninu (14), získáme

$$\overline{\lim_{n=\infty}} |C_n + D_n|^{\frac{1}{n}} \leqq \text{většímu z čísel } (\sigma_1, \sigma_2) < 1$$

čili

$$\overline{\lim_{n=\infty}} |C_n + D_n|^{\frac{1}{n}} < 1,$$

jak bylo dokázati. Na výraz $A_n = B_n + C_n + D_n$ můžeme nyní užíti Pringsheimovy pomocné věty, klademe-li

$$P_n = A_n,\ p_n = -(C_n + D_n)$$

a předpokládáme-li, že

$$\overline{\lim_{n=\infty}} |A_n|^{\frac{1}{n}} = 1.$$

Neboť pak

$$\overline{\lim_{n=\infty}} |A_n - C_n - D_n|^{\frac{1}{n}} = \overline{\lim_{n=\infty}} |B_n|^{\frac{1}{n}} = 1.$$

Je-li obráceně $\overline{\lim\limits_{n=\infty}} | B_n |^{\frac{1}{n}} = 1$ a klademe-li $P_n = B_n$, $p_n = C_n + D_n$, jest také $\overline{\lim\limits_{n=\infty}} |A_n|^{\frac{1}{n}} = 1$. Neboť nerovnina $\overline{\lim\limits_{n=\infty}} |B_n|^{\frac{1}{n}} > 1$ jest nemožná, jelikož má za následek nerovninu $\overline{\lim\limits_{n=\infty}} |A_n| > 1$, která odporuje vztahu (4). Můžeme tedy ve větě I. nahraditi čísla A_n jednoduššími součty B_n a obdržíme tím větu:

Věta V.[11]) *Nutná a dostačující podmínka pro to, aby bod $z = 1$ byl $\begin{Bmatrix} \text{regulární} \\ \text{singulární} \end{Bmatrix}$, jest dána vztahem*

$$\overline{\lim_{n=\infty}} |B_n|^{\frac{1}{n}} = \overline{\lim_{n=\infty}} \left| \sum_{k=n(1-h)}^{n(1+h)} \binom{n+k}{k} \frac{a_{n+k}}{2^{n+k}} \right|^{\frac{1}{n}} \begin{cases} < 1 \\ = 1 \end{cases},$$

kdež h jest kladná konstanta $0 < h < 1$ na n nezávislá.

Věta pro libovolný bod $z = e^{i\varphi}$ liší se od věty V. jen tím, že čísla a_{n+k} jsou násobena $e^{i\varphi(n+k)}$, takže zní:

[11]) Tato věta jest shodná s kriteriem (B) v práci pana prof. Kösslera: O singularitách řady mocninné, ležících na kružnici konvergenční. Rozpravy Akad. roč. XXXII. tř. II. č. 35 (1923) a s větou I. v pojednání, Sur les singularités des séries entières. Reale Ak. dei Lincei vol. XXXII., série 5e, 1° sem., fasc 10°. (1923).

Věta VI. *Nutná a dostačující podmínka proto, aby bod* $z = e^{i\varphi}$ *byl* $\left\{\begin{matrix}\textit{regulární}\\ \textit{singulární}\end{matrix}\right\}$ *jest dána vztahem*

$$\left\{\overline{\lim_{n=\infty}}\,|B_n|^{\frac{1}{n}} = \overline{\lim_{n=\infty}}\left|\sum_{k=n(1-h)}^{n(1+h)}\binom{n+k}{k}\frac{a_{n+k}}{2^{n+k}}e^{i\varphi(n+k)}\right|^{\frac{1}{n}}\right\} \begin{matrix}<1\\ =1\end{matrix}.$$

Tato změna neznamená nic jiného než otočení bodu $z = 1$ o úhel φ a je dána substitucí $z' = z\,.\,e^{i\varphi}$, kterou získáme uvedený tvar výrazu B_n.

Koeficient a_{2n} (resp. a_{2n-1}) ve výraze B_n sluje střední, ostatní koeficienty řady (1) obsažené v intervalu $n(2+h)$ a $n(2-h)$ jeho družinou. Utvoříme-li vybranou posloupnost koeficientů a_{n_ν} dané potenční řady, pak lze dokázati, že každý koeficient a_{n_ν} jest středním koeficientem jistého výrazu B_{m_ν}, při čemž n_ν souvisí s m_ν vztahy

$$n_\nu \equiv \lambda \text{ (mod 2)}, \quad m_\nu = \frac{n_\nu + \lambda}{2}, \text{ kde } \lambda = 0 \text{ nebo } 1.\text{[12]}$$

4. Z této věty vyplývá přímo věta Hadamardova,[13]) která zní:

Věta VII. *Jestliže pro potenční řadu*

$$f(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_{m_\nu} z^{m_\nu} \; (0 \leqq m_1 < m_2 < \ldots)$$

platí

$$\frac{m_\nu - m_{\nu-1}}{m_{\nu-1}} > \alpha, \tag{20}$$

pak má tato řada jednotkovou kružnici za přirozenou hranici.

Je-li podmínka (20) splněna, lze vždy kladnou konstantu $h < 1$ nezávisle od n tak voliti, že ve výraze B_{m_ν} jest nejvýš jeden člen od nuly různý. Neboť nejmenší index koeficientů a_{n_ν} ve výrazu B_{m_ν} jest $n + n(1-h)$, největší $n + n(1+h)$.

Jestliže tedy jest

$$\frac{n + n(1+h) - (n - n(1-h))}{n + n(1-h)} < \alpha, \tag{21}$$

nemohou býti ve výraze B_{m_ν} dva členy od nuly různé (v důsledku (20)) a jest tam tudíž nejvýše jediný takový člen. Avšak limita levé strany nerovniny (21) pro $n = \infty$ jest $\frac{2h}{2-h}$ a lze tedy h tak zvoliti, aby oběma nerovninám

[12]) Kössler: O singularitách a t. d., str. 10.

[13]) Hadamard: Essai sur l'étude des fonctions données par leur développements de Taylor. Journal de Math. (4) vol. 8. (1892). Zobecnění této věty podal pan profesor Kössler v citovaných pracích (viz větu XIV.).

$$0 < h < 1,\ h < \frac{2\alpha}{2+\alpha} \tag{22}$$

bylo současně vyhověno. V důsledku toho jest ve výrazu B_{m_ν} jediný člen, který jest zároveň středním členem v B_{m_ν}, zvolíme-li jenom vybranou posloupnost a_{n_ν} tak, aby $n_\nu \equiv \lambda \pmod 2$, $m_\nu = \frac{n_\nu + \lambda}{2}$. Zbývá tedy dokázati, že

$$\overline{\lim_{\nu=\infty}} |B_{m_\nu}|^{\frac{1}{m_\nu}} = \left| \frac{a_{n_\nu}}{2^{n_\nu}} \binom{n_\nu}{m_\nu} e^{i\varphi n_\nu} \right|^{\frac{1}{m_\nu}} = 1, \tag{23}$$

což se provede stejným způsobem jako v odstavci 2 (rovnice (12)), ať jest φ jakékoliv; jsou tedy všechny body jednotkové kružnice pro danou řadu singulárními.

Tohoto postupu důkazu však nelze užíti při dalších dvou větách mezerových, totiž větě Fabryově a zobecněné větě Hadamardově, neboť vyžadují voliti $h = 0$, zatím co věta V. (resp. VI.) byla dokázána pouze pro $h > 0$. Lze však užíti k důkazu některých vlastností celistvých funkcí transcendentních, jak to učinil Pringsheim pro větu Fabryovu a Faber pro zobecněnou větu Hadamardovu; výsledky této práce stačí k tomu, aby bylo možno oba tyto důkazy náležitě upravené reprodukovati.

Věta VIII. *Jestliže pro potenční řadu*

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{m_\nu} z^{m_\nu},\quad \overline{\lim_{\nu=\infty}} \sqrt[m_\nu]{|a_{m_\nu}|} = 1$$

platí

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{m_\nu}{\nu} = \infty,$$

pak má tato řada jednotkovou kružnici za přirozenou hranici. (Věta Fabryova.)[14])

Z řady čísel $m_1, m_2, m_3, \ldots, m_\nu$ vybereme řadu čísel $p_1, p_2, \ldots p_\nu$ tak, aby $\overline{\lim_{\nu=\infty}} \sqrt[p_\nu]{|a_{p_\nu}|} = 1$, $\lim_{\nu=\infty} \frac{p_{\nu+1} - p_\nu}{p_\nu} \geq \alpha > 0$. Zbývající posloupnost čísel označme $q_1, q_2, \ldots, q_\nu, \ldots$ Ježto také pro tato čísla $\lim_{\nu=\alpha} \frac{q_\nu}{\nu} = \infty$, jest řada $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{q_\nu^2}$ konvergentní a nekonečný součin

$$g(y) = \prod_{\nu=1}^{\infty} \left(1 - \frac{y^2}{q_\nu^2}\right)$$

[14]) Fabry: Sur les points singuliers d'une fonction donnée par son dévellop-pement en série et sur l'imposibilité du prolongement analytique dans des cas très généraux, Annales de l'Ecole Norm. (3) vol. 13 (1896).
Pringsheim: Über einige funktionentheoretische Anwendungen a t. d. Münch. Ber. (1912).

celistvou transcendentní funkcí, která se stává nulou pro $y = \pm q_\nu$ ($\nu = 1, 2, 3, \ldots$), a zároveň jenom pro tyto body. Tato funkce $g(y)$ splňuje nerovniny

$$e^{-\varepsilon|y|} < |g(y)| < e^{\varepsilon|y|} \text{ pokud } y > R_\varepsilon.$$

Dosadíme-li tedy do této rovnice $|y| = |p_\nu| > R_\varepsilon$ jest

$$e^{-\varepsilon} < |g(p_\nu)|^{\frac{1}{p_\nu}} < e^\varepsilon.$$

V důsledku toho jest

$$\lim_{\nu=\infty} |g(p_\nu)|^{\frac{1}{p_\nu}} = 1$$

a tedy také

$$\overline{\lim_{\nu=\infty}} |g(p_\nu)\, a_{p_\nu}|^{\frac{1}{p_\nu}} = 1. \tag{24}$$

Čísla p_ν splňují podmínky věty Hadamardovy a má tedy řada

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} g(p_\nu)\, a_{p_\nu} z^{p_\nu}$$

jednotkovou kružnici za přirozenou hranici. Ježto platí rovnice

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} g(p_\nu) \,.\, a_{p_\nu} z^{p_\nu} = \sum_{\nu=1}^{\infty} g(p_\nu)\, a_{p_\nu} z^{p_\nu} + \sum_{\nu=1}^{\infty} g(q_\nu)\, a_{q_\nu} z^{q_\nu} =$$
$$= \sum_{\nu=1}^{\infty} g(m_\nu)\, a_{m_\nu} z^{m_\nu},$$

má také řada

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} g(m_\nu)\, a_{m_\nu} z^{m_\nu} \tag{25}$$

jednotkovou kružnici za přirozenou hranici. Řada $\sum_{\nu=1}^{\infty} g(\nu) z^\nu$ splňuje podmínky věty Wigertovy[15]) a má tedy jediný singulární bod $z=1$. V důsledku toho vyplývá z multiplikativní věty Hadamardovy,[16])

---

[15]) Věta Wigertova: Nutná a dostačující podmínka pro to, aby řada $f(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu z^\nu$ byla celistvou funkcí argumentu $\frac{1}{1-z}$, jest existence funkce $\varphi(z)$ nejvýše minimálního typu řádu prvního, pro kterou platí $c_\nu = \varphi(\nu)$. Bieberbach: Lehrbuch der Funktionentheorie Bd. II. str. 288, Berlin 1927.

[16]) Věta ta zní: Mějme funkci $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ se singularitami v bodech α_ν a funkci $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ se singularitami v bodech β_ν, pak singularity funkce $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n z^n$ jsou obsaženy mezi body $\alpha_\nu \beta_\nu$. Hadamard: Un théorème sur les séries entières. Acta math. 22 (1898). Pringsheim v pojednání citovaném sub 14).

že řada

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} g(\nu)\, a_\nu z^\nu \equiv \sum_{\nu=1}^{\infty} g(m_\nu)\, a_{m_\nu} z^{m_\nu}$$

nemá žádné jiné singularity než řada $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_{m_\nu} z^{m_\nu}$. Avšak o řadě (25) jsme dokázali, že pro ni jest jednotková kružnice singulární čarou a tím spíše to tedy musí platiti pro řadu

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} a_{m_\nu} z^{m_\nu}$$

Věta IX. *Jestliže pro potenční řadu*

$$f(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_{m_\nu} z^{m_\nu} \quad (0 \leqq m_1 < m_2 < \ldots)$$

platí $\dfrac{m_\nu - m_{\nu-1}}{m_{\nu-1}^{\sigma}} > \alpha$, *kde* σ *jest kladná konstanta menší než 1, pak má tato řada jednotkovou kružnici za přirozenou hranici* (zobecněná věta Hadamardova).[17])

Důkaz lze provésti úplně týmž obratem, kterého bylo užito u věty Fabryovy. Z čísel m_ν vybereme opět posloupnost $p_1, p_2, \ldots, p_\nu, \ldots$, která splňuje podmínku $\dfrac{p_{\nu+1} - p_\nu}{p_\nu} \geqq \alpha > 0$, ostatní čísla označíme $q_1, q_2, \ldots, q_\nu \ldots$ a dokážeme, že řada $\sum_{\nu=1}^{\infty} \dfrac{1}{q_\nu^{\varrho}}$ jest konvergentní. Platí totiž

$$\begin{aligned} q_1 - q_0 &> \alpha q_0^{\sigma} \\ q_2 - q_1 &> \alpha q_1^{\sigma} \\ &\vdots \\ q_{\nu+1} - q_\nu &> \alpha q_\nu^{\sigma}, \end{aligned}$$

čili

$$q_{\nu+1} > \alpha (q_0^{\sigma} + q_1^{\sigma} + \ldots + q_\nu^{\sigma}).$$

Poněvadž jest $m_\nu > \nu$, jest také

$$q_{\nu+1} > \alpha (1^{\sigma} + 2^{\sigma} + 3^{\sigma} + \ldots + \nu^{\sigma}) > \alpha \int_0^{\nu} x^{\sigma} dx = \frac{\alpha}{\sigma+1} \nu^{\sigma+1}$$

$$q_{\nu+1}^{\varrho} > \left(\frac{\alpha}{\sigma+1}\right)^{\varrho} \nu^{(1+\delta)}, \text{ klademe-li } \varrho(\sigma+1) = 1 + \delta. \tag{26}$$

Jest tedy uvedená řada vskutku konvergentní. V důsledku toho existuje celistvá funkce $g(y)$, která má q_ν za nulové body, nejvýš řádu

[17]) Borel: Sur les séries de Taylor qui admettent leur cercle de convergence comme coupure. Journal de Math. (5) 2 (1896) dokázal tuto větu pro $\sigma = \frac{1}{2}$. Faber: Über die Nichtfortsetzbarkeit gewisser Potenzreihen. Münch. Berichte 34 (1904).

ϱ, při čemž ϱ volíme tak, aby $\frac{1}{1+\sigma} < \varrho < 1$. Pro funkci $g(y)$ platí pak nerovniny

$$e^{-\varepsilon|y|} < e^{-\varepsilon|y|^\varrho} < g(y) < e^{\varepsilon|y|^\varrho} < e^{\varepsilon|y|},$$

při čemž $|y| > R_\varepsilon$, ε jest číslo libovolně malé. Z těchto nerovnin tedy plyne

$$\overline{\lim_{\nu=\infty}} |g(p_\nu)|^{\frac{1}{p_\nu}} = 1$$

a tedy také

$$\overline{\lim_{\nu=\infty}} |a_{p_\nu} g(p_\nu)|^{\frac{1}{p_\nu}} = 1. \tag{27}$$

Další postup důkazu se úplně shoduje z důkazem předešlé věty a vede k tomu, že všechny body jednotkové kružnice jsou za dané podmínky singulárními.

5. Z věty VI. pro libovolný bod $z = e^{i\varphi}$ lze odvoditi dostačující podmínku pro to, aby bod $z = e^{i\varphi}$ byl bodem singulárním následujícím způsobem. Zavedeme opět vybranou posloupnost čísel a_{n_ν} takovou, aby $\overline{\lim_{n=\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{\nu=\infty} \sqrt[n_\nu]{|a_{n_\nu}|} = 1$, a aby $m_\nu = \left[\frac{n_\nu}{2}\right] = n$ (při čemž $n_\nu = 2n$, neb $2n-1$). Neboť potom koeficient a_{n_ν} jest středním koeficientem v jistém čísle B_{m_ν}, které možno psáti ve tvaru

$$B_{m_\nu} = \sum_{s=-m_\nu h}^{m_\nu h} q(s)\, a_{n_\nu+s} e^{i\varphi(n_\nu+s)}, \tag{28}$$

klademe-li $n = m_\nu$, $k = m_\nu + s$ a

$$p(k, n) = q(s) = \binom{2m_\nu + s}{m_\nu + s}\left(\frac{1}{2}\right)^{2m_\nu+s},$$

$$p(m_\nu, m_\nu) = \left(\frac{1}{2}\right)^{2m_\nu}\binom{2m_\nu}{m_\nu} = q(0),$$

$$s = -[m_\nu h],\ -[m_\nu h - 1], \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots, [m_\nu h - 1], [m_\nu h].$$

Mimo to platí pro výraz $q(s)$

$$\ldots < q(-2) < q(-1) = q(0) > q(1) > q(2) > \ldots$$

(neboť $p(k, n)$, jak plyne z rovnice (5) nabývají svého maxima pro $k = m_\nu$, čili $s = -1, 0$).

Můžeme tedy psáti B_{m_ν} ve tvaru

$$B_{m_\nu} = e^{i(n_\nu\varphi - \psi_\nu)} q(0) \sum_{s=-m_\nu h}^{+m_\nu h} \varepsilon_s a_{n_\nu+s} e^{i(\varphi s + \psi_\nu)}, \tag{29}$$

$$\ldots < \varepsilon_{-2} < \varepsilon_{-1} = \varepsilon_0 > \varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \ldots;$$

úhel ψ_ν jest libovolný a mohu jej tudíž zvoliti tak, aby součet v mezích $(-m_\nu h, +m_\nu h)$ se stal číslem reálným kladným, takže

$$B_{m_\nu} = q(0) \sum_{s=-m_\nu h}^{+m_\nu h} \varepsilon_s |a_{n_\nu+s}| \cos(\varphi s + \varphi_{n_\nu+s} + \psi_\nu);$$

při libovolné volbě ψ_ν platí tedy

$$|B_{m_\nu}|^{\frac{1}{m_\nu}} \geqq (q(0))^{\frac{1}{m_\nu}} \left\{\sum_{s=-m_\nu h}^{m_\nu h} \varepsilon_s |a_{n_\nu+s}| \cos(\varphi s + \varphi_{n_\nu+s} + \psi_\nu)\right\}^{\frac{1}{m_\nu}}. \quad (30)$$

Z rovnice (30) plyne postačující podmínka pro singularitu bodu $z = e^{i\varphi}$. Neboť podle rovnice (8) jest

$$\lim_{n=\infty} (q(0))^{\frac{1}{n}} = 1$$

a jest tedy

$$\overline{\lim_{\nu=\infty}} \left|\sum_{s=-m_\nu h}^{m_\nu h} \varepsilon_s |a_{n_\nu+s}| \cos(\varphi s + \varphi_{n_\nu+s} + \psi_\nu)\right|^{\frac{1}{m_\nu}} = 1 \quad (31)$$

podle věty VI. postačující podmínkou pro to, aby bod $z = e^{i\varphi}$ byl bodem singulárním. Platí tedy věta

Věta X. *Postačující podmínka pro to, aby bod $z = e^{i\varphi}$ byl bodem singulárním, jest dána vztahem*

$$\overline{\lim_{\nu=\infty}} \left|\sum_{s=-m_\nu h}^{+m_\nu h} \varepsilon_s |a_{n_\nu+s}| \cos(s\varphi + \varphi_{n_\nu+s} + \psi_\nu)\right|^{\frac{1}{m_\nu}} = 1.$$

6. Tuto větu možno specialisovati a upraviti k vhodnému užití ve zvláštních případech. Jelikož důkazy těchto vět by byly dále pouze opakováním důkazů pana profesora Kösslera,[18]) uvedu zde pouze znění těchto vět.

Věta XI. *Dají-li se najíti úhly ψ_ν tak, že platí*

$$\overline{\lim} (\cos(\varphi_{n_\nu} + \psi_\nu))^{\frac{1}{m_\nu}} = 1$$

$$\cos(\varphi_{n_\nu+s} + s\varphi + \psi_\nu) \geqq 0$$

pro všechna s v intervalu $(-m_\nu h, +m_\nu h)$, pak jest bod $z = e^{i\varphi}$ pro danou potenční řadu bodem singulárním.

Klademe-li v této větě $\psi_\nu = 0$, $\varphi = 0$, získáme tak větu Vivanti-Dienesovou (věta III.), kterou lze vysloviti takto:

Věta XII. *Jestliže pro posloupnost koeficientů $a_{n_\nu} = |a_{n_\nu}| e^{i\alpha_{n_\nu}}$ potenční řady*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad \overline{\lim_{n=\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$$

[18]) Viz jeho citovanou práci: O singularitách řady mocninné a t. d. str. 12 a následující.

jest splněna podmínka cos $\alpha_{n_\nu} > k > 0$, *pro ostatní cos* $\alpha_n \geqq 0$, *pak jest bod* $z = 1$ *pro danou funkci bodem singulárním.*

Z věty XI. plyne také věta Fatou-Polyova,[19]) která zní:

Věta XIII. *Ke každé potenční řadě*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

lze najíti posloupnost čísel $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$, *kde každé* $\varepsilon_n = \pm 1$, *tak, že řada*

$$a_0\varepsilon_0 + a_1\varepsilon_1 z + a_2\varepsilon_2 z^2 + \ldots + a_n\varepsilon_n z^n + \ldots$$

má jednotkovou kružnici za přirozenou hranici.

Tuto větu lze také dokázati obratem, kterého bylo užito při důkazu věty Vivanti-Dienesovy; důkaz jest však obdobný se zmíněným důkazem pana profesora Kösslera, pouze v tom rozdílný, že vyplývá přímo z věty VI.

Z věty X. získáváme konečně také poslední větu, která jest zobecněním věty Hadamardovy, a která zní:

Věta XIV. *Jestliže vybereme mezi koeficienty řady posloupnost* $a_{n_1}, \ldots, a_{n_\nu}$ *a jestliže o družině každého z čísel* a_{n_ν} *bude platiti*

$$\sum_{s=-m_\nu h}^{-1(-2)} |a_{n_\nu+s}| + \sum_{s=1(0)}^{m_\nu h} |a_{n_\nu+s}| = |a_{n_\nu}|\, r_\nu,$$

při čemž $0 \leqq r_\nu < 1$, $\overline{\lim_{\nu=\infty}} |1 - r_\nu|^{\frac{1}{m_\nu}} = 1$, *pak jest pro funkci* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ *konvergenční kružnice přirozenou hranicí.*

*

Sur les points singuliers d'une série entière, situés sur le cercle de convergence.

(Extrait de l'article précédent.)

Dans l'étude de la question, si un point déterminé du cercle de convergence est régulier ou singulier pour une fonction définie par une série entière, on peut se servir de la substitution $z = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\zeta$. Il est vrai que cette substitution n'a rien d'essentiel pour le problème en question (ainsi M. Pringsheim emploie la substitution d'Euler, M. Kössler la substitution $z = x + \frac{3}{4}x^2$), mais elle permet

---

[19]) Pólya und Hurwitz: Zwei Beweise eines von Herrn Fatou vermuteten Satzes. Acta mathem. 40 (1916).

de déduire d'une manière tout à fait simple tous les théoremes de date plus ancienne comme ceux de MM. Vivanti-Dienes et de M. Fabry, celui de M. Hadamard et aussi sa généralisation, trouvée par M. Borel et M. Kössler, mais on peut parvenir aussi aux résultats tout récents sur le prolongement analytique, contenus dans les travaux de M. Kössler. On obtient les théoremes de MM. Fatou-Polya et celui de MM. Vivanti-Dienes, comme simples corollaires de ces résultats.