Miloslav Hampl
Poznámka k těžné křivce

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 56 (1927), No. 3, 172--174

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/109050

Poznámka k těžné řetězovce.

Dr. *Miloslav Hampl.*

Dány dva body A, B ve vertikální rovině symetricky položené vůči vertikální ose Y. Jich souřadnice X-ové buďte $-b$, resp. $+b$. Polohu osy X neznáme. Ohebné vlákno ony body spojující nabude tvaru těžné řetězovky o rovnici:

$$y = a \operatorname{Cos} \frac{x}{a} + k, \tag{1}$$

při čemž integrační konstanta k určuje polohu osy X. Ze všech řetězovek o různých délkách mezi body A, B proložených body A, B hledejme tu, pro kterou má bod M, v němž ona řetězovka protíná přímku $x = x_1$, nejmenší napětí. Napětí v bodě $x = x_1$ — je-li q měrné obtížení — je dáno vztahem:

$$S = q\sqrt{a^2 + s^2} = qa \operatorname{Cos} \frac{x_1}{a}. \tag{2}$$

Máme tedy určiti takové $a = a_1$, pro něž S nabývá minima pro $x = x_1$. Tím bude současně pomocí (1) stanovena poloha osy X a příslušné y_1 bodu M.

Půjde o řešení transcendentní rovnice

$$\frac{dS}{da} = q\left(\operatorname{Cos} \frac{x_1}{a} - \frac{x_1}{a} \operatorname{Sin} \frac{x_1}{a}\right) = 0, \tag{3}$$

při čemž budeme pokládati x_1 za konstantní.

Existuje vůbec minimum S?

Všimněme si tvaru křivky $S = f(a)$.

$$\lim_{a=+\varepsilon} S = q \lim_{a=+\varepsilon} a \operatorname{Cos} \frac{x_1}{a} = q \lim_{a=+\varepsilon} \frac{\operatorname{Cos} \frac{x_1}{a}}{\frac{1}{a}} = q x_1 \lim_{a=+\varepsilon} \operatorname{Sin} \frac{x_1}{a} = \infty.$$

Funkce $f(a)$ bude míti v bodě $a = 0$ patrně asymptotu-osu S. Pro $a = \infty$, je $S = \infty$, neboť $\lim\limits_{a=\infty} \operatorname{Cos}\,(x_1/a) = 1$.

Hledejme asymptotu v tomto druhém úběžném bodě:

Rovnice tečny obecně v bodě (a_1, S_1) jest:

$$S - S_1 = S_1'\,(a - a_1).$$

Pro $a = \infty$ bude směrnice

$$\lim_{a=\infty} S' = q \lim_{a=\infty} \left(\operatorname{Cos} \frac{x_1}{a} - \frac{x_1}{a} \operatorname{Sin} \frac{x_1}{a}\right) = q.$$

Úsek na ose S bude

$$\lim_{a=\infty} (S - aS') = q \lim_{a=\infty} x_1 \operatorname{Sin} \frac{x_1}{a} = 0.$$

Tato asymptota půjde tedy počátkem a bude s osou a svírati úhel, jehož tangenta $= q$.

Mezi těmito hraničnými maximy musí ležeti nějaké minimum funkce $f(a)$.

Z rovnice (3)
$$\operatorname{Cos} \frac{x_1}{a} - \frac{x_1}{a} \operatorname{Sin} \frac{x_1}{a} = 0 \tag{4}$$
pomocí metody Newtonovy, při čemž za první přibližnou hodnotu beru $a = x_1$, obdržím

$$a_1 \doteq 0{\cdot}83355\, x_1 = \alpha x_1 . \tag{5}$$

Že to je jistě minimum plyne také z toho, že $d^2 S/da^2 > 0$ pro všechny hodnoty a.

Příslušné minimální napětí v bodě M pak jest:

$$S_M = q a_1 \operatorname{Cos} \frac{x_1}{a_1} . \tag{6}$$

S použitím rovnice (3) obdržíme:

$$e^{\frac{x_1}{a_1}}\left(1 - \frac{x_1}{a_1}\right) + e^{-\frac{x_1}{a_1}}\left(1 + \frac{x_1}{a_1}\right) = 0, \tag{7}$$

$$e^{\frac{x_1}{a_1}} = \sqrt{\frac{x_1 + a_1}{x_1 - a_1}}\,, \quad e^{-\frac{x_1}{a_1}} = \sqrt{\frac{x_1 - a_1}{x_1 + a_1}} . \tag{8}$$

Takže lze psáti

$$S_M = \frac{q}{2}\, a_1 \left(\sqrt{\frac{x_1 + a_1}{x_1 - a_1}} + \sqrt{\frac{x_1 - a_1}{x_1 + a_1}}\right), \tag{9}$$

což po úpravě (t. j. uvedení závorky pod společnou odmocninu) přejde ve tvar:

$$S_M = q \frac{a_1 x_1}{\sqrt{x_1^2 - a_1^2}} = A q x_1, \tag{10}$$

kde

$$A = \frac{\alpha}{\sqrt{1 - \alpha^2}} \doteq 1{\cdot}50884. \tag{11}$$

Směrnice řetězovky je dána: $\dfrac{dy}{dx} = \operatorname{Sin} \dfrac{x}{a}$. (12)

V bodě $x = x_1$, v případě, že $a = a_1$, bude

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_M = \operatorname{Sin} \frac{1}{\alpha} . \tag{13}$$

To lze psáti pomocí (4)

$$\operatorname{Sin} \frac{1}{\alpha} = \alpha \operatorname{Cos} \frac{1}{\alpha} . \tag{14}$$

Ale vzhledem k (6) a (10)

$$\operatorname{Cos}\frac{1}{\alpha}=\frac{1}{qa_1}\cdot S_M=\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2-a_1^2}}=\frac{1}{\sqrt{1-\alpha^2}}, \tag{15}$$

tedy

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_M=\frac{a_1}{\sqrt{x_1^2-a_1^2}}=A. \tag{16}$$

Tedy ze všech řetězovek jdoucích body A, B bude míti v průsečíku přímky $x=x_1$ s hledanou řetězovkou ona nejmenší napětí, která bude v tomto bodě M svírati s horizontálou úhel

$$\operatorname{arc\,tg} A \doteq 56^\circ 28'.$$

Tečna k oné řetězovce v bodě M půjde počátkem, ježto pro úsek na ose Y dostáváme výraz

$$y_1-x_1y_1'=a_1\operatorname{Cos}\frac{1}{\alpha}-x_1\operatorname{Sin}\frac{1}{\alpha},$$

který vzhledem ke (14) jest nulový.

*

Remarque concernant la chaînette.

(Extrait de l'article précédent.)

Soient donnés deux points A, B dans le plan vertical, symétriques par rapport à l'axe vertical Y, dont les abscisses sont, respectivement, $-b$, $+b$. Un fil suspendu en ces deux points a la forme d'une chaînette dont l'équation est

$$y=a\operatorname{Cos}\frac{x}{a}+k,$$

où la constante d'intégration k détermine la position de l'axe des x. Parmi toutes les chaînettes, joignant les points A, B, cherchons celle pour laquelle la tension S au point d'intersection M avec la droite $x=x_1$ atteint son minimum. Si l'on désigne par q le poids constant par unité de longueur, la tension S au point $x=x_1$ est donnée par la formule:

$$S=q\sqrt{a^2+s^2}=qa\operatorname{Cos}\frac{x_1}{a}.$$

Cette tension est minima, lorsque $a=a_1$, où

$$a_1\doteq 0{\cdot}83355\,x_1=\alpha x$$

$$S_M=Aqx_1,\ \text{où}\ A=\frac{\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}}\doteq 1{\cdot}50884.$$

L'angle que fait la tangente à la chaînette au point M avec l'axe horizontal, est égal à arc tg $A=56^\circ 28'$. Cette tangente passe par l'origine.