Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Vincenc Jarolímek

Kterak sestrojit reálnou plochu kulovou z prvků imaginárných

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 32 (1903), No. 3, 209--218

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/109060

Kterak strojiti reálnou plochu kulovou z prvků imaginárných.

Podává

Vincenc Jarolímek,
ředitel vyšší české realné školy v Praze.

Strojení obecné plochy druhého stupně z devíti bodů reálných jest obecně známo;*) ano methoda ta i pro případ bodův imaginárných podvojně sdružených jest upravena.**) Leč příslušné konstrukce jsou tak velice složité, že sotva který konstruktér se pokusil, prakticky (ovšem s použitím deskriptivní geometrie) jich skutečně vykonati. Ve zvláštních však případech lze užiti method speciálních, jež vedou k úvahám zajímavým a konstrukcím snadným, nepřesahujíce úloh stupně druhého. Úkolem naší stati budiž řešiti úlohu *s plochou kulovou* **K**, při čemž k reálným a imaginárným bodům přičiníme určovací prvek ještě druhý, totiž reálnou nebo imaginárnou rovinu tečnou.

Ježto pak, jak povědomo, prochází-li reálná plocha kulová určitým bodem imaginárným, musí nezbytně obsahovati také sdružený s ním bod imaginárný, a dotýká-li se určité roviny imaginárné, musí dotýkati se i sdružené roviny imaginárné, naskytá se celkem *devět* úloh různých. Značí-li *a*, *b*, *c*, *d* body

*) Chasles, Comptes rendus, díl 41, 1855, pag. 1097. — Dr. Schröter, Theorie der Oberflächen II. Ordnung, § 53. — Heger (Schlömilch, Zeitschrift für Mathematik und Physik, XXV, pag. 98) — Rohn — Papperitz, Darstellende Geometrie, II., pag. 186—189. — Reye, Geometrie der Lage, II. — Wiener, Darst. Geom. a j. První řešení nalezl již Steiner r. 1836, ale uveřejněno teprve Geiserem r. 1867 v Borchardts Journal f. r. u. ang. Math., díl 68., pag. 191.

**) Cardinal, „Zur Construction einer Fläche II. Ordnung“ (Schlömilch, Zeitschrift etc., XXVII, 1882, pag. 119.)

reálné, $\underbrace{a^i b^i}$, $\underbrace{c^i d^i}$, body imaginárné (značka $\smile$ spojuj elementy imaginárně sdružené), jimiž kulová plocha má procházeti, ϱ, σ, τ, φ roviny reálné, $\underbrace{\varrho^i \sigma^i}$, $\underbrace{\tau^i \varphi^i}$ roviny imaginárné (podvojně sdružené), jichž plocha kulová má se dotýkati, budou data jednotlivých úloh tato:

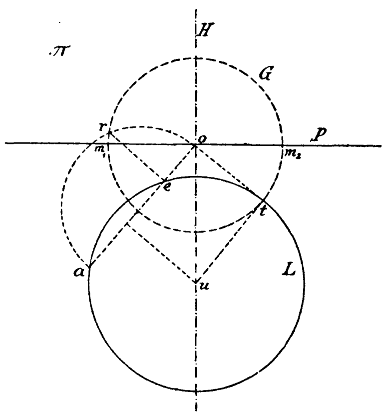
1. a, b, $\underbrace{c^i d^i}$;
2. $\underbrace{a^i b^i}$, $\underbrace{c^i d^i}$;
3. a, ϱ, $\underbrace{c^i d^i}$;
4. ϱ, σ, $\underbrace{c^i d^i}$;
5. a, b, $\underbrace{\tau^i \varphi^i}$;
6. a, ϱ, $\underbrace{\tau^i \varphi^i}$;
7. ϱ, σ, $\underbrace{\tau^i \varphi^i}$;
8. $\underbrace{a^i b^i}$, $\underbrace{\tau^i \varphi^i}$;
9. $\underbrace{\varrho^i \sigma^i}$, $\underbrace{\tau^i \varphi^i}$.

Body $\underbrace{c^i d^i}$ určeny buďtež pokaždé jakožto samodružné body elliptické involuce bodové na reálné přímce P, dané družinou $m_1 m_2$ symmetrickou k středu involuce o, tak že potence její $= \overline{om}_1^2 = \overline{om}_2^2 = -k^2$. Střed plochy kulové procházející body $\underbrace{c^i d^i}$ bude na *reálné* rovině souměrnosti ψ obou bodů, tudíž na rovině $\psi \perp P$ procházející středem involuce o. Tečné roviny $\underbrace{\tau^i \varphi^i}$ dány budou obdobně samodružnými rovinami elliptické involuce rovinové o určité ose Q, jež dána buď nejlépe družinou symmetrickou $\mu_1 \mu_2$ (t. j. symmetrickou k rovinám $\xi \perp \eta$ pravoúhlé družiny involuce). Střed reálné plochy kulové dotýkající se rovin $\underbrace{\tau^i \varphi^i}$ bude v rovině ξ, která půlí *tupý* úhel rovin μ_1, μ_2, ježto, jak se ukáže, ve vedlejším ostrém úhlu není žádných tečných kulových ploch *reálných*.

1. Případ. Dány jsou dva body reálné a, b, dva body imaginárně sdružené $\underbrace{c^i d^i}$ jakožto samodružné body elliptické involuce na dané přímce P (čili imaginárné průsečíky přímky P s plochou kulovou). Rovina $(aP) \doteq \pi$ (obr. 1.) seče plochu **K** v reálné kružnici L; její prostorová osa O protne rovinu souměrnosti ψ úsečky $\overline{ab}$ v středu s plochy **K**, jejíž poloměr $= \overline{sa}$. Jde tedy jen o sestrojení reálné kružnice L určené body a, c^i, d^i, ježto ostatek jsou elementárné úlohy deskriptivní geometrie.

Involuce na přímce P buď dána symmetrickou družinou $m_1 m_2$ ke středu o, potence involuce tedy $= -\overline{om}_1^2$. Veškeré kružnice jdoucí body c^i, d^i tvoří svazek, jehož osa jest $oH \perp P$. Svazek ten vytíná z H involuci o středu o a potencí $= +\overline{om}_1^2$. Spojme tedy $\overline{ao}$ a ustanovme na $\overline{ao}$ bod e tak, aby $\overline{eo}\,.\,\overline{ao} = \overline{om}_1^2$. Na př. polokružnice nad $\overline{ao}$ seče G (kružnici o poloměru $\overline{om_1}$) v bodě r; $\overline{re} \perp \overline{ao}$ dá e. Bod e je další bod kružnice L; symmetrála tětivy $\overline{ae}$ dá tedy její střed u na H, $\overline{ua}$ poloměr.

Dodatky. Kružnice svazku, procházející body c^i, d^i, jsou orthogonálné ke kružnici G. — Kružnice L je společná všem plochám kulovým, které procházejíce imaginárnými body c^i, d^i, mají své středy na ose O kružnice L; tvoří tedy svazek kulový.



Obr. 1.

2. *Případ.* Dány jsou dvě dvojiny imaginárně sdružených bodů $\underbrace{a^i\, b^i}$, $\underbrace{c^i\, d^i}$, elliptickými involucemi na přímkách P, R spolu mimoběžných.

Středy obou involucí proložme roviny $\varrho \perp P$, $\sigma \perp R$. Na průsečnici $(\varrho\sigma) \equiv S$ bude střed s plochy kulové **K**. Rovina $\pi \perp S$ proložená přímkou P protínati bude **K** v kružnici L, která procházejíc body a^i, b^i, má střed svůj v průsečíku $(\pi S) \equiv u$. Obdobně rovina $\psi \perp S$ proložená přímkou R seče **K** v kružnici M, která jdouc body c^i, d^i, má střed svůj v průsečíku $(\psi S) \equiv v$. Reálné kružnice L, M ležíce v rovinách $\pi \parallel \psi$, stanoví kulovou plochu **K**.

Jde tedy zase o sestrojení kružnice L v rovině $\pi \perp S$ proložené přímkou $\overline{a^i b^i} \equiv P$. Střed její u jest v průsečíku $(\pi S) \equiv u$. Kružnice probíhající body $\underbrace{c^i\, d^i}$ tvoří jako prvé svazek, jehož osa jest H (obr. 1.), na níž se vytíná involuce o středu o a potencí $= + \overline{om_1}^2$. Veškeré kružnice tohoto svazku jsou tedy orthogonálné ke kružnici G. Tudíž tečna $\overline{ut}$ ze středu u ku G vedená dá poloměr kružnice L. Obdobně sestrojí se kružnice M v rovině ψ. Připadne-li střed u do vnitř kruhu G, jest úloha nemožná, t. j. plocha **K** jest imaginárná.

3. Případ. Dán jest bod reálný a, reálná rovina tečná ϱ a dva body imaginárné $\underbrace{c^i\, d^i}$ na přímce P.

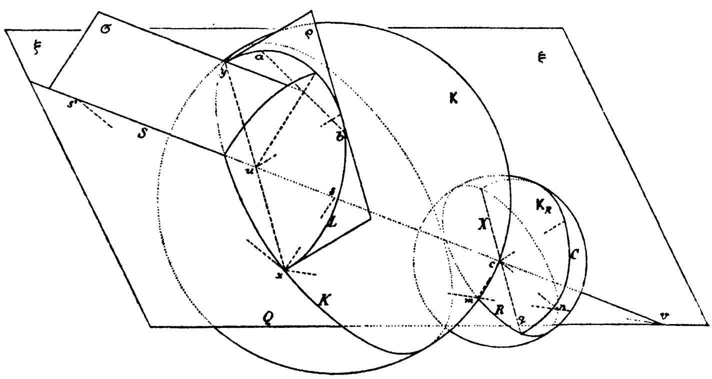
V rovině $(aP) \equiv \pi$ sestrojí se body a, $\underbrace{c^i\, d^i}$ reálná kružnice L jako v případě 1., načež kružnicí L proloží se způsobem známým plocha kulová **K** tečná k rovině ϱ. Je-li průsečnice $(\pi\varrho) \equiv S$, středem u kružnice L proložená rovina $\psi \perp S$, a seče-li průsečnice $(\varrho\psi) \equiv R$ přímku S v bodě v, obdržíme na R dotyčný bod t tečné roviny ϱ, vedeme-li z bodu v tečnu $\overline{vm}$ ke kružnici L a učiníme-li na přímce R $\overline{vt} = \overline{vm}$. To však učiniti lze směrem dvojím, pročež výsledky budou dva.

4. Případ. Dány jsou dvě reálné roviny tečné ϱ, σ a dva sdružené body imaginárné $\underbrace{c^i\, d^i}$.

Střed s kulové plochy **K** bude v rovině φ, která půlí odchylku rovin ϱ, σ. Proložme přímkou $\overline{c^i d^i} \equiv P$ rovinu $\psi \perp \varrho$. Rovina ψ protne plochu **K** v kružnici L, která procházejíc body c^i, d^i, má střed svůj u na průsečnici $S \equiv (\psi\varphi)$. Střed u obdržíme v průsečíku přímky S se symmetrálou H bodů c^i, d^i v rovině φ (obr. 1.), načež ze středu u opíšeme kružnici L orthogonálnou ke kružnici G (případ 2.). Kružnicí L posléze proložíme plochu **K** tečnou k rovině ϱ dle případu 3.

5. Případ. Dány jsou dva reálné body a, b, dvě imaginárně sdružené tečné roviny $\underbrace{\tau^i\, \varphi^i}$.

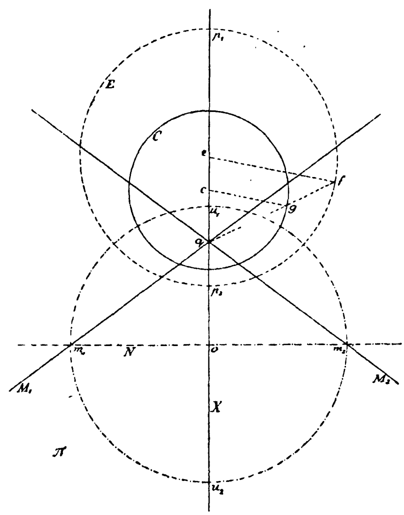
Rozpolme reálnou rovinou ξ *tupý* úhel rovin μ_1, μ_2, jimiž jest dána symmetrická družina involuce rovinové $(\tau^i \varphi^i)$ o reálné ose Q. Střed s plochy kulové **K** bude na průsečnici S roviny ξ s rovinou souměrnosti σ bodů a, b (obr. 2.). Rovina ϱ, která jde body a, $b \perp S$, seče S v středu u reálné kružnice L jdoucí body a, b, kterou plocha kulová bude obsahovati. L seče rovinu ξ v bodech x, y, jimiž procházeti bude hlavní kružnice K plochy, ležící v rovině ξ. Veškeré pak plochy kulové, jež dotýkajíce se rovin $\underbrace{\tau^i\ \varphi^i}$, mají středy své na přímce S, vyplňují soustavu ploch $\Sigma\mathbf{K}$ podobně položených dle středu v, v němž S seče osu Q. V této soustavě jest žádaná plocha obsažena. Rovina ξ seče soustavu $\Sigma\mathbf{K}$ v soustavě kružnic ΣR podobně položených dle středu v, jichž středy leží na S; této soustavě náleží kružnice K. Podaří-li se nám sestrojiti libovolnou kružnici R soustavy ΣR, zbude pak úloha známá, reálným bodem x proložiti kružnici K podobně položenou dle bodu podobnosti v



Obr. 2.

ke kružnici R, jejíž střed c můžeme si vytknouti kdekoli na přímce S; R jest pak hlavní kružnice plochy $\mathbf{K}_R$ náležející soustavě $\Sigma\mathbf{K}$.

Kulovou soustavu $\Sigma\mathbf{K}$ obaluje rotační plocha kuželová; dotyčné přímky její na rovinách $\underbrace{\tau^i\ \varphi^i}$ jsouce imaginárně sdruženy, leží v rovině reálné sice $(\perp \xi)$, ale neznámé. Snazší bude, plochu $\mathbf{K}_R$ vyhledati v soustavě $\Sigma'\mathbf{K}$ ploch kulových dotýkajících se τ^i, φ^i, jichž středy leží na přímce $\overline{cq} \perp Q$. Plochy tyto jsou podobně položeny dle středu q a jsou obaleny imaginárnou rotační plochou kuželovou o středu q a ose $\overline{cq} \equiv X$, avšak imaginárné dotyčné přímky její T_1, T_2 na rovinách τ^i, φ^i leží v *reálné* rovině $\pi \perp Q$, položené osou X. Soustava $\Sigma' \mathbf{K}$ seče pak rovinu π v soustavě kružnic $\Sigma' K$ podobně položených dle středu q, specielně plochu $\mathbf{K}_R$ v kružnici C o středu c. Rovina π seče dále daný svazek rovinový $(\tau^i \varphi^i)$ v involučním svazku paprskovém, jehož pravoúhlou družinu dají průsečnice $(\pi\xi) \equiv X$, $(\pi\eta) \equiv Y$, paprsky samodružné průsečnice $(\tau^i \xi) \equiv T_1$, $(\varphi^i \xi) \equiv T_2$, jichž kružnice C se bude dotýkati, a paprsky symmetrické družiny průsečnice $(\mu_1 \xi) \equiv M_1$, $(\mu_2 \xi) \equiv M_2$. Nyní jest v rovině π (obr. 3.) řešiti úlohu: ze středu c opsati reálnou kružnici C



Obr. 3.

tečnou k imaginárným samodružným paprskům T_1, T_2 involuce paprskové, určené družinou symmetrickou $M_1 M_2$. Protněme involuci přímkou $N \perp X$*) v involuci bodové I, jejíž střed jest o, $m_1 m_2$ družina symmetrická. Sestrojme kružnici E (která soustavě $\Sigma' K$ bude přináležeti), jež dotýká se T_1, T_2 v samodružných bodech $c^i d^i$ involuce I; q jest pól a N příslušná polára kruž-

*) Dle předpokladu X půlí *tupý* úhel paprsků M_1, M_2; příslušnou konstrukcí snadno lze se přesvědčiti, že Y nevede k výsledkům reálným, t. j. že v ostrém úhlu $M_1 M_2$ není reálné kružnice dotýkající se imag. přímek T_1, T_2.

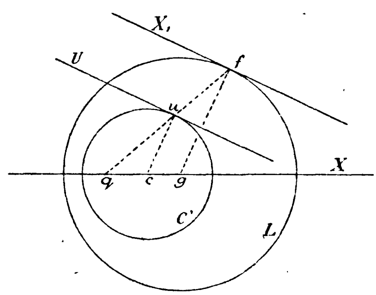
nice E. Svazek kružnic jdoucích body c^i, d^i vytíná na X involuci J o reálných samodružných bodech u_1, u_2 ($\overline{ou_1} = \overline{ou_2} = \overline{om_1} = \overline{om_2}$), jíž přísluší družina $p_1 p_2$ na E. Průměr $\overline{p_1 p_2}$ kružnice E musí tedy býti rozdělen harmonicky body u_1, u_2, ale i body q, o (pólem a polárou). Sestrojíme tedy p_1, p_2 jakožto samodružné body hyperbolické involuce U, dané dvojinami $u_1 u_2$, qo; průměr $\overline{p_1 p_2}$ dá kružnici E. Nyní sestrojíme již kružnici C ze středu c jakožto podobně položenou ku E dle bodu podobnosti q: veďme kterýkoli poloměr $\overline{ef}$, $\overline{cg} \parallel \overline{ef}$, poloměrem $\overline{cg}$ opišme C.

Plocha kulová $\mathbf{K}_R$ opsaná ze středu c poloměrem $\overline{cg}$ seče rovinu π v hlavní kružnici C, rovinu ξ pak v hlavní kružnici R, náležející soustavě ΣR (obr. 2.). Pozůstává ještě v rovině ξ proložiti bodem x kružnici K podobně položenou ku R dle středu podobnosti v. Paprsek $\overline{vx}$ seče R v bodech m, n; spojme $\overline{cm}$, $\overline{cn}$, veďme $\overline{xs} \parallel \overline{mc}$, $\overline{xs'} \parallel \overline{nc}$, a opišme z s, s' poloměry $\overline{sx}$, $\overline{s'x}$ kružnice K, K' a zároveň plochy kulové úloze vyhovující.

Dodatek. Plochy kulové soustavy $\Sigma' \mathbf{K}$, jejíž osa jest $\overline{cq} \perp Q$, mají obalovou plochu kuželovou, jak patrno, imaginárnou, veškeré plochy soustavy mají střed podobnosti q uvnitř. Soustava však $\Sigma \mathbf{K}$, jejíž osa S jest ku Q *nakloněna*, může míti obalovou plochu *reálnou*, když totiž střed podobnosti $v \equiv (SQ)$ připadne *vně* plochy $\mathbf{K}_R$ (jak z obr. 2. patrno), kterou jsme nahoře sestrojili. Všecky plochy obou soustav jsou přímkou Q protaty v bodech reálných, tudíž Q leží *uvnitř* prostoru omezeného plochou kuželovou jednou i druhou, a proto tečné roviny její τ^i, φ^i z přímky Q jsou pomyslné.

6. *Případ.* Dán jest reálný bod a, reálná tečná rovina ϱ a dvě imaginárně sdružené tečné roviny $\tau^i \smile \varphi^i$ (o reálné ose Q). Tři tečné roviny určují soustavu ploch kulových $\Sigma \mathbf{K}$ podobně položených, jichž středy vyplňují přímku, osu O trojhranu ($\varrho \tau^i \varphi^i$) bod a obsahujícího. Obalová plocha soustavy jest rotační kuželová, jejíž osa jest O a vrchol v průsečíku $(\varrho Q) \equiv v$. Plocha kulová $\mathbf{K}$ v této soustavě, procházející bodem a, snadno se sestrojí, jakmile známa bude jedna plocha $\mathbf{K}_L$ soustavy. Ustanovme tuto zase pomocí jiné soustavy $\Sigma' \mathbf{K}$ ploch kulových, jež dotýkajíce se rovin τ^i, φ^i, mají středy své v libovolné rovině

$\pi \perp Q$, tedy na průsečnici $(\xi\pi) \equiv X$, rozpoluje-li ξ tupý úhel rovin τ^i, φ^i. Jednu plochu této soustavy $\mathbf{K}_R$, jejíž střed c na X zvolíme, sestrojíme jako v úloze 5. V této soustavě $\Sigma' \mathbf{K}$ ploch podobně položených (osa X) dle středu $(QX) \equiv q$ jest nyní vyhledati plochu $\mathbf{K}_L$, která současně náleží soustavě $\Sigma \mathbf{K}$, t. j. která se dotýká také reálné roviny ϱ. Dotyčný její bod ležeti bude na orthogonálném průmětě X_1 osy X na rovinu ϱ; rovina $(XX_1) \perp \varrho$ seče soustavu $\Sigma' \mathbf{K}$ v soustavě kružnic podobně položených dle q, v níž najíti jest kružnici L dotýkající se přímky X_1. K této soustavě náleží také kružnice C', ve které reálná plocha prve sestrojená $\mathbf{K}_R$ (o středu c) seče rovinu (XX_1). V této rovině (obr. 4.) sestrojíme kružnici L takto: Veďme ke kružnici C'

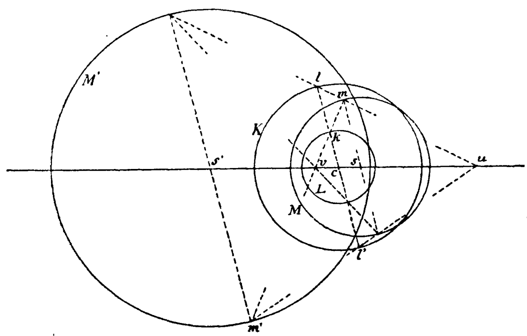


Obr. 4.

tečnu $U \parallel X_1$; paprsek $\overline{qu}$ protne X_1 v homologickém bodě f, načež poloměr $\overline{fg} \parallel \overline{uc}$ dá střed g kružnice L. Plocha kulová $\mathbf{K}_L$ o středu g a poloměru $\overline{gf}$ náleží soustavě $\Sigma \mathbf{K}$ a spojnice $\overline{gv} \equiv O$ jest osou soustavy i trojhranu $(\varrho \tau^i \varphi^i)$. Pozůstává ještě vyhledati v $\Sigma \mathbf{K}$ plochu kulovou, která prochází bodem a. Spojnice $\overline{va}$ seče plochu $\mathbf{K}_L$ v bodech α, α'; učiníme-li v rovině (aO) $\overline{as} \parallel \overline{\alpha g}$, bude s na O střed, $\overline{sa}$ poloměr plochy žádané. Bod α' dá výsledek druhý; je-li však bod a vnitř ostrého úhlu rovin μ_1, μ_2, jimiž dána jest symmetrická družina involuce τ^i, φ^i, jsou výsledky pomyslné. K dalším dvěma výsledkům vede event. druhá tečna $\parallel X_1$ ke kružnici C'.

7. *Případ.* Dány jsou dvě reálné ϱ, σ a dvě imaginárně sdružené $\tau^i \smile \varphi^i$ roviny tečné.

Nechať jeden úhel rovin ϱ, σ půlí rovina φ, tupý úhel rovin τ^i, φ^i rovina ψ. Průsečnice $(\varphi\psi) \equiv S$ obsahovati bude střed plochy **K**. Průsečík přímek S a $(\varrho, \sigma) \equiv A$ buď u, průsečík přímek S a $(\tau^i \varphi^i) \equiv Q$ buď v. — S jest osou soustavy $\begin{Bmatrix} \Sigma \mathbf{K} \\ \Sigma \mathbf{L} \end{Bmatrix}$ ploch kulových dotýkajících se rovin $\begin{Bmatrix} \varrho, & \sigma \\ \tau^i, & \varphi^i \end{Bmatrix}$, podobně položených dle středu $\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix}$. Jde tedy o sestrojení plochy **K** společné



Obr. 5.

oběma soustavám. Rovina ψ seče soustavy $\Sigma\mathbf{K}$, $\Sigma\mathbf{L}$ v soustavách kružnic ΣK a ΣL podobně položených dle středů u, resp. v. Kružnice M společná oběma soustavám bude hlavní kružnicí žádané plochy **K**. Vytkněme na S bod c vnitř úsečky $\overline{uv}$, sestrojme ze středu c plochu kulovou tečnou ku τ^i, φ^i jako v úloze 5., a její hlavní kružnici L v rovině ψ; po té opišme z téhož středu c plochu kulovou tečnou k reálné rovině ϱ a její hlavní kružnici K v rovině ψ. Jest nyní úlohou, v rovině ψ sestrojiti kružnici M (obr. 5.), která jest ku L podobně položená dle v (připadá do vnitř L) a současně podobně položená ku K dle u (vně K). Veďme libovolným směrem ckl, spojme $\overline{vk}$, $\overline{ul}$; průsečík těchto paprsků m dá bod žádané kružnice M, $\overline{ms} \parallel \overline{lc}$

její střed a poloměr. Plocha kulová o středu s a poloměru $\overline{sm}$ řeší úlohu. $\overline{kv}$ a $\overline{ul'}$ protínají se v bodě m', $\overline{m's'} \parallel l'c$; kružnice M' ze středu s' poloměrem $\overline{s'm'}$ dá výsledek druhý, rovina půlící druhý úhel rovin ϱ, σ výsledky třetí a čtvrtý. Jsou-li všecky čtyři roviny reálné, lze k nim sestrojiti, jak povědomo, osm tečných ploch kulových; pomyslností dvou rovin redukuje se počet výsledků na čtyři, ježto, jak již dotčeno, v ostrém úhlu těchto rovin není reálných kulových ploch tečných.

8. Případ. Dány jsou dva imaginárně sdružené body $\underbrace{a^i\, b^i}$ a dvě imaginárně sdružené tečné roviny $\underbrace{\tau^i\, \varphi^i}$ (osa Q). Nechať rovina ξ půlí tupý úhel symmetrické družiny $\mu_1\, \mu_2$ rovinové involuce τ^i, ϱ^i. Reálná rovina souměrnosti σ bodů a^i, b^i seče rovinu ξ v přímce S, na níž bude střed plochy **K**. Reálná rovina ϱ proložená přímkou $\overline{a^i b^i} \equiv P$ kolmo ku S seče S v středu u reálné kružnice L jdoucí body a^i, b^i, kterou plocha kulová bude obsahovati. Konstrukci kružnice L obsahuje úloha 4. Další pak řešení shoduje se úplně s případem 5. Výsledky budou dva.

9. Případ. Dány jsou dvě dvojiny imaginárně sdružených rovin tečných $\underbrace{\varrho^i\, \sigma^i}$, $\underbrace{\tau^i\, \varphi^i}$. Osy involuční buďtež P, Q, roviny půlící *tupé* úhly družin symmetrických, jimiž involuce jsou dány, buďtež ψ, ξ. Průsečnice $(\psi\xi) \equiv S$, protínajíc P, Q v bodech u, v, jest společnou osou soustav reálných ploch kulových $\Sigma\mathbf{K}$, $\Sigma\mathbf{L}$ podobně položených dle u, v, které dotýkají se jednak $\underbrace{\varrho^i\, \sigma^i}$, jednak $\underbrace{\tau^i\, \varphi^i}$. Vytkněme na přímce S bod c a sestrojme dle úlohy 5. ze středu c reálné plochy kulové **K**, **L**, z nichž **K** dotýká se rovin ϱ^i, σ^i, **L** pak rovin τ^i, φ^i. Rovina ψ seče pak soustavy $\Sigma\mathbf{K}$, $\Sigma\mathbf{L}$ v soustavách kružnic podobně položených jednak dle u, jednak dle v: k nim náležejí i hlavní kružnice $(\mathbf{K}\psi) \equiv K$, $(\mathbf{L}\psi) \equiv L$, soustředné. Kružnice posléze M, M', z nichž každá jest podobně položena ke K dle u a k L dle v (konstrukce v případě 7.), jsou hlavní kružnice ploch žádaných. Výsledky jsou dva.