Eduard Čech

Petrova elementární metoda vyšetřování Fourierových řad

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 59 (1930), No. 3, 145--150

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/109073

Petrova elementární metoda vyšetřování Fourierových řad.

Eduard Čech.

V listopadu 1929 konal prof. Petr na pozvání Masarykovy university v Brně tři přednášky, z nichž jednu věnoval Fourierovým řadám. V ní vyložil prof. Petr mimo jiné velmi zajímavou metodu elementárního vyšetřování Fourierových řad funkcí tvaru $\int_a^x F(t)\,dt$ (a funkcí poněkud obecnějších). Tuto metodu vyložil prof. Petr také v připravovaném novém vydání svého Integrálního počtu. Nalezl jsem, že metodu prof. Petra lze bez obtíží upraviti tak, že se aplikuje na libovolné funkce s konečnou variací.

1. Metoda prof. Petra opírá se podstatně o studium řady

$$\varphi(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\sin \nu x}{\nu}. \tag{A}$$

Odkazuje čtenáře na cit. Integrální počet (odst. 136b), uvedu zde bez důkazu věty, kterých je v dalších potřeba. Řada $\varphi(x)$ konverguje pro všecka reálná x. Mohu tedy klásti pro $n = 1, 2, \ldots$

$$\varphi(x) = s_n(x) + r_n(x), \tag{1}$$

kde

$$s_n(x) = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\sin \nu x}{\nu}. \tag{2}$$

Zřejmě

$$\varphi(x) = s_n(x) = r_n(x) = 0 \text{ pro } x = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \ldots; n = 1, 2, \ldots \tag{3}$$

Dále jest

$$\varphi(x) = \frac{\pm \pi - x}{2} \text{ pro } -2\pi < x < 2\pi,\ x \neq 0, \tag{4}$$

při čemž znamení $\pm \pi$ souhlasí se znamením čísla x. Je-li $0 < \eta < \pi$, pak pro $n = 1, 2, \ldots$ jest

$$| r_n(x) | \leqq \frac{2}{(2n+1)\sin\frac{\eta}{2}} \tag{5}$$

pro všecka x, která se od nejbližšího násobku 2π liší alespoň o η. Konečně jest pro $n = 1, 2, \ldots$ a pro všecka reálná x

$$| r_n(x) | \leqq \frac{\pi}{2}. \tag{6}$$

2. Má-li funkce $f(x)$ v intervalu $\langle 0, 2\pi \rangle$ Riemannův integrál buďto vlastní nebo aspoň absolutně konvergentní, pak Fourierovou řadou funkce $f(x)$ nazýváme řadu

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} (a_\nu \cos \nu x + b_\nu \sin \nu x),$$

kde

$$a_\nu = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos \nu x \, dx, \quad b_\nu = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin \nu x \, dx.$$

Tedy Fourierova řada funkce $f_1(x) - f_2(x)$ vznikne formálním odečtením z Fourierových řad funkcí $f_1(x)$, $f_2(x)$. Součet prvých $n + 1$ členů Fourierovy řady funkce $f(x)$ v čísle u jest podle (2)

$$\sigma_n(u) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \, dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \, . \, s'_n (x - u) \, dx. \tag{7}$$

3. Má-li funkce $f(x)$ konečnou variaci v $\langle a, b \rangle$, lze, jak známo, položiti $f(x) = f_1(x) - f_2(x)$, při čemž $f_1(x)$, $f_2(x)$ jsou neklesající funkce v $\langle a, b \rangle$, jež jsou všude tam spojité, kde $f(x)$ je spojitá. Z toho důvodu mohu se omeziti na neklesající funkce. Ostatně čtenář snadno shledá, že užitím elementárních vět o totální variaci bylo by lze zcela obdobně studovati přímo libovolnou funkci s konečnou variací.

4. Nechť tedy $f(x)$ neklesá v $\langle 0, 2\pi \rangle$ a nechť u je dané číslo z $\langle 0, 2\pi \rangle$. Pro $p = 2, 3, 4, \ldots$ nechť $\langle x_0, x_1, \ldots x_p \rangle$ je dělení intervalu $\langle 0, 2\pi \rangle$, jehož norma Max. $(x_k - x_{k-1}) = \delta$ pro $p \to \infty$ konverguje k nule. Mimo to nechť pro každé p bod u splyne s některým z bodů $x_k = x_k(p)$, třeba s bodem x_q.

Při daných n, p podle věty o přírůstku[1]) existují čísla $y_k = y_k (n, p, u)$ $(1 \leqq k \leqq p)$ taková, že

[1]) Tento název zdá se mi vhodnější než název věta o střední hodnotě diferenciálního počtu.

$$x_{k-1} < y_k < x_k, \tag{8}$$

$$s_n(x_k - u) - s_n(x_{k-1} - u) = s'_n(y_k - u)\,(x_k - x_{k-1}). \tag{9}$$

Zvolme ještě y_0 tak, aby bylo

$$a = x_0 < y_0 < y_1. \tag{10}$$

5. Dokážeme nyní (za předpokladu, že $f(x)$ neklesá v $\langle 0, 2\pi\rangle$), že součet Fourierovy řady funkce $f(x)$ v každém vnitřním bodě u intervalu $\langle 0, 2\pi\rangle$ jest roven $\frac{1}{2}\,[f(u + 0) + f(u - 0)]$.[2]) Při důkaze vyjde nám následující odhad zbytku: Nechť $|\,f(x)\,| \leqq M$ v intervalu $\langle 0, 2\pi\rangle$. Při daném $\varepsilon > 0$ nechť kladné $\eta < u$, $\eta < 2\pi - u$ je tak malé, aby

$$f(u + \eta + 0) - f(u + 0) < \frac{\varepsilon}{2}, \quad f(u - 0) - f(u - \eta - 0) < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{11}$$

Pak pro všecka n tak veliká, že

$$\frac{8M}{(2n+1)\sin\dfrac{\eta}{2}} < \frac{\pi}{2}\,\varepsilon, \tag{12}$$

jest

$$|\,\sigma_n(u) - \tfrac{1}{2}\,[f(u + 0) + f(u - 0)]\,| \leqq \varepsilon. \tag{13}$$

Při důkaze vyjdeme od zřejmé identity

$$\begin{aligned} -\sum_{k=1}^{p}\,[r_n(x_k - u) - r_n(x_{k-1} - u)]\,f(y_k) = \\ = \sum_{k=1}^{p}[f(y_k) - f(y_{k-1})]\,r_n(x_{k-1} - u) - r_n(x_p - u)\,f(y_p) + r_n(x_0 - u)\,f(y_0), \end{aligned} \tag{14}$$

kterou budeme studovati při pevném n pro $p \to \infty$. Ježto $x_0 = 0$, $x_p = 2\pi$, $0 < \eta < u$, $\eta < 2\pi - \eta$, podle (5) poslední dva členy napravo jsou absolutně

$$\leqq \frac{4M}{(2n+1)\sin\dfrac{\eta}{2}}.$$

V součtu na pravé straně člen $k = q + 1$ podle (3) je roven nule, neboť $x_q = u$. Ostatní členy rozdělíme ve tři skupiny

I: $u < x_{k-1} < u + \eta$; II: $u > x_{k-1} > u - \eta$; III: $|\,u - x_{k-1}\,| \geqq \eta$.

V I každý člen podle (6) jest absolutně $\leqq \dfrac{\pi}{2}\,[f(y_k) - f(y_{k-1})]$.

Mimo to v I jest v každém členu podle (8)

$$u = x_q \leqq x_{k-2} < y_{k-1} < y_k < x_k < x_{k-1} + \delta < u + \eta + \delta,$$

[2]) Existence těchto limit plyne, jak známo, z monotonnosti funkce $f(x)$.

takže

$$\Big|\sum_{I}[f(y_k)-f(y_{k-1})]\,r_n(x_{k-1}-u)\Big|\leqq\frac{\pi}{2}\sum_{I}[f(y_k)-f(y_{k-1})]\leqq$$
$$\leqq\frac{\pi}{2}[f(u+\eta+\delta)-f(u+0)].$$

Stejně vychází

$$\Big|\sum_{II}[f(y_k)-f(y_{k-1})]\,r_n(x_{k-1}-u)\Big|\leqq\frac{\pi}{2}[f(u-0)-f(u-\eta-\delta)].$$

Konečně v III mohu užíti (5), takže

$$\Big|\sum_{III}[f(y_k)-f(y_{k-1})]\,r_n(x_{k-1}-u)\Big|\leqq\frac{2}{(2n+1)\sin\frac{\eta}{2}}\sum_{k=1}^{p}[f(y_k)-f(y_{k-1})]$$
$$\leqq\frac{4M}{(2n+1)\sin\frac{\eta}{2}}.$$

Celkem tedy pravá a tudíž i levá strana ve (14) jest absolutně nejvýš rovna číslu

$$\frac{8M}{(2n+1)\sin\frac{\eta}{2}}+\frac{\pi}{2}[f(u+\eta+\delta)-f(u+0)]+$$
$$+\frac{\pi}{2}[f(u-0)-f(u-\eta-\delta)],$$

jež pro $p\to\infty$ má podle (12) limitu $<\pi\varepsilon$.

Obraťme se ke studiu levé strany. Podle (1) lze ji psáti

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{p}[s_n(x_k-u)-s_n(x_{k-1}-u)]\,f(y_k)-\\&-\sum_{k=1}^{p}[\varphi(x_k-u)-\varphi(x_{k-1}-u)]\,f(y_k).\end{aligned}\tag{15}$$

Tedy při pevných n, η zvolených podle (11) a (12) výraz (15) pro veliká p jest absolutně menší než $\pi\varepsilon$. Nyní prvý sčítanec v (15) podle (9) zní

$$\sum_{k=1}^{p}f(y_k)\,s'_n(y_k-u)\,(x_k-x_{k-1}),$$

což podle (8) pro $p\to\infty$ má limitu

$$\int_0^{2\pi}f(x)\,s'_n(x)\,dx.$$

Dále jest podle (3) a (4), ježto $x_q = u$

$$\varphi(x_k - u) - \varphi(x_{k-1} - u) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{x_k - x_{k-1}}{2} & \text{pro } k = q, q+1, \\ -\dfrac{x_k - x_{k-1}}{2} & \text{pro ostatní } k. \end{cases}$$

Tedy druhý sčítanec v (15) zní

$$-\frac{\pi}{2}[f(y_q) + f(y_{q+1})] + \tfrac{1}{2}\sum_{k=1}^{p} f(y_k)(x_k - x_{k-1}),$$

což podle (8) pro $p \to \infty$ má limitu

$$-\frac{\pi}{2}[f(u+0) + f(u-0)] + \tfrac{1}{2}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx.$$

Tedy podle (7) pro $p \to \infty$ výraz (15) konverguje k

$$\pi[\sigma_n(u) - \tfrac{1}{2}(f(u+0) + f(u-0))],$$

čímž podle předchozího nerovnost (13) jest odvozena.

6. Případy $u = 0$, $u = 2\pi$ neposkytují již ničeho nového. Cestou úplně stejnou jako v odst. 5 vyjde, že Fourierova řada má součet $\frac{1}{2}[f(0+0) + f(2\pi - 0)]$. Přesněji: při daném $\varepsilon > 0$ nechť kladné $\eta < \pi$ je tak malé, aby

$$f(\eta + 0) - f(0 + 0) < \frac{\varepsilon}{2}, \quad f(2\pi - 0) - f(2\pi - \eta - 0) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Pak pro všecka n tak veliká, že

$$\frac{4M}{(2n+1)\sin\dfrac{\eta}{2}} < \frac{\pi}{2}\varepsilon,$$

jest

$$\left|\,\sigma_n\binom{0}{2\pi} - \tfrac{1}{2}[f(0+0) + f(2\pi - 0)]\,\right| \leq \varepsilon.$$

7. Z odhadů zbytků je zřejmé, že pro $0 \leq a < \alpha < \beta < b \leq 2\pi$ z předpokladu, že (neklesající) funkce $f(x)$ je v $\langle a, b\rangle$ spojitá, následuje v $\langle \alpha, \beta\rangle$ stejnoměrná konvergence Fourierovy řady k součtu $\frac{1}{2}[f(u+0) + f(u-0)] = f(u)$. Podle toho, co v odst. 3 bylo řečeno, máme tedy provedeno úplné vyšetření konvergence Fourierovy řady funkce $f(x)$, která v celém intervalu $\langle 0, 2\pi\rangle$ má konečnou variaci. Případ, kdy $f(x)$ má konečnou variaci pouze v nějakém okolí vyšetřovaného bodu u, převede se na případ zde probraný užitím Riemannovy věty, podle níž chování se Fourierovy řady v místě u závisí pouze na hodnotách funkce $f(x)$ v okolí bodu u.

Známý důkaz této věty, opírající se o relaci

$$\lim_{\lambda \to \infty} \int_a^b f(x) \sin \lambda x \, dx = 0,$$

je zcela elementární a sotva se dá zjednodušiti.

*

Sur la méthode de M. Petr dans la théorie des séries de Fourier.

(Extrait de l'article précédent.)

M. Petr a donné une méthode élémentaire pour la sommation des séries de Fourier de fonctions lesquelles on peut exprimer, dans les parties de l'intervalle $(0,2\pi)$, comme des intégrales et des fonctions intégrables dans la partie respective. Pour ce but, il partait de l'équation (A), après y avoir déterminé $\varphi(x)$, et il a établi, pour le reste $r_n(x)$ les relations (5), (6).

Mais cette méthode peut être étendue à des fonctions $f(x)$ à variation finie dans l'intervalle $(0,2\pi)$. Pour le faire, on peut partir de l'identité (14), où $x_0 = 0$, $x_1, x_2, \ldots, x_{p-1}$, $x_p = 2\pi$ sont les points divisant l'intervalle $(0,2\pi)$ en des intervalles partiels, et effectuer dans (14) le passage connu à la limite ($\lim \Delta x_n = x_n - x_{n-1} = 0$, $\lim n = \infty$). On obtient ainsi, d'une manière simple, des résultats connus pour ce cas bien plus général, ainsi que des théorèmes sur la convergence uniforme des séries de Fourier pour des fonctions continues à variation finie.