

Vilém Jung

Poznámka o jistém determinantu mocninném

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 29 (1900), No. 1, 41--42

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/109079>

Terms of use:

© Union of Czech Mathematicians and Physicists, 1900

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \operatorname{arctg} ax \cdot \operatorname{arctg} bx \frac{dx}{x^2} = a \log \frac{a+b}{a} + b \log \frac{a+b}{b},$$

který lze po substituci $\frac{1}{x}$ za x psáti

$$(1) \quad \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{a}{x} \cdot \operatorname{arctg} \frac{b}{x} dx = \log \frac{(a+b)^{a+b}}{a^a b^b}.$$

Je-li zvláště $a = b = 1$, máme

$$\int_0^{\infty} \left(\operatorname{arctg} \frac{1}{x} \right)^2 dx = \pi \log 2.$$

Poznámka o jistém determinatu mocninném.

Napsal

Vilém Jung,
professor v Praze.

Rozložíme-li mocninný determinant tvaru

$$A_{n+1} = \begin{vmatrix} 1^1, & 2^1, & 3^1, & \dots & n^1, & \frac{n^1}{2} \\ 1^2, & 2^2, & 3^2, & \dots & n^2, & \frac{n^2}{3} \\ 1^3, & 2^3, & 3^3, & \dots & n^3, & \frac{n^3}{4} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1^n, & 2^n, & 3^n, & \dots & n^n, & \frac{n^n}{n+1} \\ 1^{n+1}, & 2^{n+1}, & 3^{n+1}, & \dots & n^{n+1}, & \frac{n^{n+1}}{n+2} \end{vmatrix},$$

jenž jest $(n+1)$ ho stupně, dle elementů posledního sloupce a užijeme-li *Studničкова theorému* o determinantech mocninných, můžeme po krátké redukci psáti

$$(1) \quad A_{n+1} = n \cdot n! (n-1)! \dots 2! 1! \sum_{k=0}^n (-1)^{n+k} \frac{n^k}{k+2} K_{n-k}.$$

Symbol K_{n-k} znamená součet kombinací bez opakování $(n-k)$ té třídy čísel 1, 2, 3, ..., n , při čemž jest $K_0 = 1$.

Zajímavo jest, že tu platí pro sudé $n = 2\mu$

$$(2) \quad \Delta_{2\mu+1} = 0;$$

pro liché $n = 2\mu + 1$ platí však

$$(3) \quad \Delta_{2\mu+2} \leq 0.$$

O tom se můžeme na zvláštních případech přímo přesvědčiti.

Na základě (1) plyne pak z (2) zajímavá identická rovnice

$$(4) \quad \sum_{k=0}^{2\mu} (-1)^k \frac{(2\mu)^k}{k+2} K_{2\mu-k} = 0.$$

Na př. pro $2\mu = 2$ jest $K_2 = 2$, $K_1 = 3$, $K_0 = 1$, takže

$$\sum_{k=0}^2 (-1)^k \frac{2^k}{k+2} K_{2-k} = \frac{1}{2} \cdot 2 - \frac{2^1}{3} \cdot 3 + \frac{2^2}{4} \cdot 1 = 0.$$

Pro $2\mu = 4$ jest $K_4 = 24$, $K_3 = 50$, $K_2 = 35$, $K_1 = 10$, $K_0 = 1$, takže

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^4 (-1)^k \frac{4^k}{k+2} K_{4-k} &= \frac{1}{2} \cdot 24 - \frac{4^1}{3} \cdot 50 + \frac{4^2}{4} \cdot 35 \\ &- \frac{4^3}{5} \cdot 10 + \frac{4^4}{6} \cdot 1 = 12 - \frac{200}{3} + 140 - 128 + \frac{128}{3} = 0. \end{aligned}$$

Pro $2\mu = 6$ jest $K_6 = 720$, $K_5 = 1764$, $K_4 = 1624$, $K_3 = 735$, $K_2 = 175$, $K_1 = 21$, $K_0 = 1$, takže

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^6 (-1)^k \frac{6^k}{k+2} K_{6-k} &= \frac{1}{2} \cdot 720 - \frac{6^1}{3} \cdot 1764 + \frac{6^2}{4} \cdot 1624 \\ &- \frac{6^3}{5} \cdot 735 + \frac{6^4}{6} \cdot 175 - \frac{6^5}{7} \cdot 21 + \frac{6^6}{8} \cdot 1 = 360 - 3528 \\ &+ 14616 - 31752 + 37800 - 23328 + 5832 = 0. \end{aligned}$$

Důkaz základní věty Désarguesovy užitím deskriptivní geometrie.

Napsal

Dr. Ant. Sucharda, t. č. ve Štrasburku.

Jak známo, jest Désargues původcem důležité základní poučky nové geometrie, která zní: „Leží-li průsečné body