Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Vilém Jung

Poznámka o jistém determinantu mocninném

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 29 (1900), No. 1, 41--42

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/109079

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \operatorname{arctg} ax \,.\, \operatorname{arctg} bx \,\frac{dx}{x^2} = a \log \frac{a+b}{a} + b \log \frac{a+b}{b},$$

který lze po substituci $\frac{1}{x}$ za x psáti

$$(1) \qquad \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \operatorname{arctg} \frac{a}{x} \,.\, \operatorname{arctg} \frac{b}{x}\, dx = \log \frac{(a+b)^{a+b}}{a^a\, b^b}.$$

Je-li zvláště $a = b = 1$, máme

$$\int_0^\infty \left(\operatorname{arctg} \frac{1}{x}\right)^2 dx = \pi \log 2.$$

Poznámka o jistém determinatu mocninném.

Napsal

Vilém Jung,

professor v Praze.

Rozložíme-li mocninný determinant tvaru

$$\varDelta_{n+1} = \begin{vmatrix} 1^1, & 2^1, & 3^1, & \ldots n^1, & \frac{n^1}{2} \\ 1^2, & 2^2, & 3^2, & \ldots n^2, & \frac{n^2}{3} \\ 1^3, & 2^3, & 3^3, & \ldots n^3, & \frac{n^3}{4} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1^n, & 2^n, & 3^n, & \ldots n^n, & \frac{n^n}{n+1} \\ 1^{n+1}, & 2^{n+1}, & 3^{n+1}, & \ldots n^{n+1}, & \frac{n^{n+1}}{n+2} \end{vmatrix},$$

jenž jest $(n+1)$ho stupně, dle elementů posledního sloupce a užijeme-li *Studničkova theorému* o determinantech mocninných, můžeme po krátké redukci psáti

$$(1) \quad \varDelta_{n+1} = n \,.\, n\,!\,(n-1)\,!\ldots 2\,!\,1\,!\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n+k}\frac{n^k}{k+2}\,\mathrm{K}_{n-k}.$$

Symbol K_{n-k} znamená součet kombinací bez opakování $(n-k)$té třídy čísel $1, 2, 3, \ldots, n$, při čemž jest $\mathrm{K}_0 = 1$.

Zajímavo jest, že tu platí pro sudé $n = 2\mu$

(2) $$\Delta_{2\mu+1} = 0;$$

pro liché $n = 2\mu + 1$ platí však

(3) $$\Delta_{2\mu+2} \lesseqgtr 0.$$

O tom se můžeme na zvláštních případech přímo přesvědčiti.

Na základě (1) plyne pak z (2) zajímavá identická rovnice

(4) $$\sum_{k=0}^{2\mu}(-1)^k \frac{(2\mu)^k}{k+2} K_{2\mu-k} = 0.$$

Na př. pro $2\mu = 2$ jest $K_2 = 2$, $K_1 = 3$, $K_0 = 1$, takže

$$\sum_{k=0}^{2}(-1)^k \frac{2^k}{k+2} K_{2-k} = \frac{1}{2}.2 - \frac{2^1}{3}.3 + \frac{2^2}{4}.1 = 0.$$

Pro $2\mu = 4$ jest $K_4 = 24$, $K_3 = 50$, $K_2 = 35$, $K_1 = 10$, $K_0 = 1$, takže

$$\sum_{k=0}(-1)^k \frac{4^k}{k+2} K_{4-k} = \frac{1}{2}.24 - \frac{4^1}{3}.50 + \frac{4^2}{4}.35$$
$$- \frac{4^3}{5}.10 + \frac{4^4}{6}.1 = 12 - \frac{200}{3} + 140 - 128 + \frac{128}{3} = 0.$$

Pro $2\mu = 6$ jest $K_6 = 720$, $K_5 = 1764$, $K_4 = 1624$, $K_3 = 735$, $K_2 = 175$, $K_1 = 21$, $K_0 = 1$, takže

$$\sum_{k=0}^{6}(-1)^k \frac{6^k}{k+2} K_{6-k} = \frac{1}{2}.720 - \frac{6^1}{3}.1764 + \frac{6^2}{4}.1624$$
$$- \frac{6^3}{5}.735 + \frac{6^4}{6}.175 - \frac{6^5}{7}.21 + \frac{6^6}{8}.1 = 360 - 3528$$
$$+ 14616 - 31752 + 37800 - 23328 + 5832 = 0.$$

Důkaz základní věty Désarguesovy užitím deskriptivní geometrie.

Napsal

Dr. Ant. **Sucharda**, t. č. ve Štrasburku.

Jak známo, jest Désargues původcem důležité základní poučky nové geometrie, která zní: „Leží-li průsečné body