Cornelius Plch

O úchylce roviny Foucaultova kyvadla

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 15 (1886), No. 5, 197--211

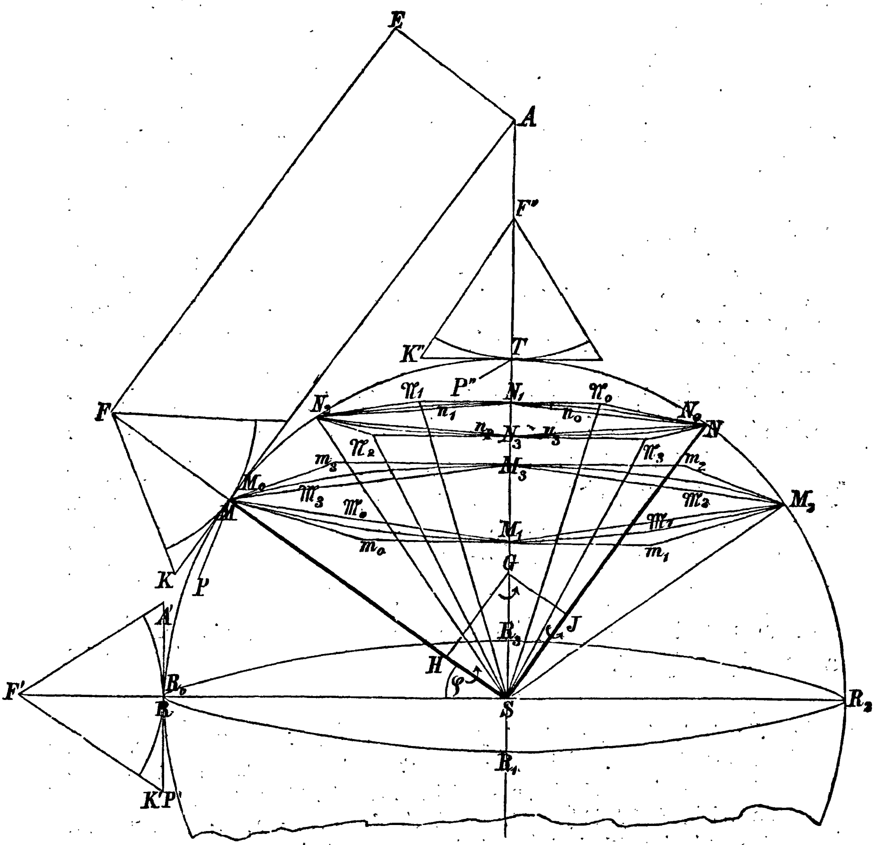
Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/109130

O úchylce roviny Foucaultova kyvadla.*)

Pro studující upravil

P. **Cornelius Pich**, T. J. v Bohusudově (Mariaschein).

Volně zavěšené kyvadlo FM, jež na vše strany zcela volně může kývati, zoveme „*kyvadlem Foucaultovým*“, protože



*) Článek první viz v „*Časopise pro pěst. math. a fysiky*“ XIV. 1885. pg. 10—15.

francouzský fysik *Jean Bernard Léon Foucault* na začátku druhé polovice tohoto století učinil pokus, točivý pohyb (rotaci) naší země kolem osy TS pomocí kyvadla volně zavěšeného dokázati. Aby však tento nesnadný důkaz*) i studujícím byl všestranně srozumitelný, musí se pro ně zvláštním způsobem upraviti.

Svislou rovinu KFM, již určuje amplituda Foucaultova kyvadla, jmenujeme *„rovinou Foucaultova kyvadla"* čili zkrátka *„rovinou kyvu"*. Tato rovina stojí tedy kolmo na podlaze vodorovné místa M, a není totožná s onou stopou, kterou závěsné vlákno Foucaultova kyvadla svým kývavým pohybem ve světovém prostoru po sobě zanechá.

Pravoúhlý (orthogonálný) průmět KM vodorovné podlahy (obzoru) na rovinu kyvu nazýváme *„původním kývacím směrem na rovině kyvu"*; tento vodorovný kývací směr, jenž na svislici FMS v bodě M stojí kolmo, můžeme si v mysli i tehdy představiti, když volně zavěšené kyvadlo následkem odporu vzduchu a závěsu po nějakém čase přestane kývati.

První svislý průmět PM roviny kyvu na podlahu vodorovnou zoveme *„původním kývacím směrem na podlaze"*, a označíme si jej přímou hranou pravítka, ku podlaze nějak připevněného.

Úhel KMP, oběma původními kývacími směry KM a PM sevřený, sluje *„úhlem Foucaultovým"* čili *„odchylkou roviny kyvu"* anebo *„úchylkou Foucaultova kyvadla"*. Původní kývací směr KM na rovině kyvu KFM je *„vrchním ramenem"*, a původní kývací směr PM na podlaze je *„spodním ramenem"* tohoto úhlu. Že Foucaultův úhel na počátku Foucaultova pokusu rovná se úhlu nullovému, samo sebou se rozumí, poněvadž obě ramena KM a PM tohoto úhlu se společnou průsečnicí roviny kyvu a podlahy splývají.

---

*) Viz *J. A. Grunert: „Archiv für Mathematik und Physik"* Jahrg. 1856, XXVII. Theil, 2. Heft, S. 224. — *P. Karl Jelinek S. J.: „Theorie der Pendelabweichung."* Sitzungsberichte der kais. Akad. d. Wissenschaften in Wien, XLIV. Bd. 1861. — *P. Carolus Braun S. J.: „De declinatione plani oscillationis penduli, orta ex rotatione telluris, et de argumento, quod ex illa ad hanc rotationem evincendam desumitur."* Posonii 1865.

Je-li rovina kyvu a podlaha se svislicí bodu závěsného buď v klidu anebo ve společném toliko pohybu, musí se Foucaultův úhel neustále rovnati úhlu nullovému, protože v obojím případě společná průsečnice roviny kyvu a podlahy je „vrchním a spodním ramenem“ tohoto úhlu.

Rovná-li se tedy na některém místě Foucaultův úhel neustále úhlu nullovému, nelze nám na tomto místě z Foucaultova úhlu nullového ani pohyb ani klid podlahy a pevně s ní spojené země poznati neb dokázati.

Roste-li však na některém místě M Foucaultův úhel KMP postupem času, pak musíme souditi, že se buď rovina kyvu KFM s vrchním ramenem KM, buď podlaha se spodním ramenem PM kolem svislice FMS otáčí, nebo že se jak rovina kyvu s vrchním ramenem, tak také podlaha se spodním ramenem buď rozličným směrem, buď rozličnou rychlostí při stejném směru okolo téže svislice točí, nechať si už tato svislice je v klidu nebo v pohybu.

Že však rovina kyvu KFM *okolo svislice* FMS *nemůže se otáčeti, a že tudíž v tomto smyslu (relativně) nehybnou jest*, třebas by měla s touto svislicí a s podlahou nějaký společný pohyb, velmi snadným pokusem ukázati lze pomocí kyvadlového strojku, při němž bod závěsný F opisuje kružnici o poloměru EF = AM, rovina kyvu ale následkem setrvačnosti kyvadlové hmoty nikterak se neotáčí ani kolem osy EA ani kolem svislice FMS, ačkoliv neustále prochází jak bodem závěsným F, opisujícím kružnici, tak také svislicí FMS, jež opisuje oblinu kolmého kužele. *Pročež i vrchní rameno* KM *Foucaultova úhlu, na rovině kyvu ležící, relativně nehybným jest,* pokud se totiž nemůže točiti kolem svislice FMS, třebas by mělo s touto svislicí a s podlahou nějaký společný pohyb.

Roste-li tedy na některém místě M Foucaultův úhel KMP postupem času jistým směrem a jistou rychlostí, tož nezbytno jest nám souditi, že spodní rameno PM Foucaultova úhlu a podlaha a pevně s ní spojená země a tudíž i pozorovatel Foucaultova pokusu kolem svislice FMS týmže směrem a touže úhlovou rychlostí se otáčí.

Četnými zdařilými pokusy na místech rozličné zeměpisné šířky φ*) však zjištěno jest, že Foucaultův úhel na každém místě M během každé hodiny rovnoměrně roste od západu jihem k východu rychlostí $V_1 = 15^0 \sin \varphi$, tak že jest na konci každé hodiny

$$U_h = h \,.\, 15^0 \sin \varphi,$$

znamená-li U_h poměrné číslo Foucaultova úhlu KMP na konci h hodin.

Nutno nám tedy souditi, že spodní rameno PM *Foucaultova úhlu* KMP *a pevně s tím ramenem spojená podlaha jakož i pevně s podlahou spojená země a tudíž i pozorovatel Foucaultova pokusu kolem svislice* FMS *od západu jihem k východu úhlovou rychlostí* $V_1 = 15^0 \sin \varphi$ *se otáčí.*

Poněvadž ale s pozorovatelem všecko se otáčí, a touto společnou rotací poloha jeho k podlaze a ke všem jiným předmětům se nemění, proto se mu zdá, jakoby on se spodním ramenem PM Foucaultova úhlu KMP byl v klidu, rovina kyvu ale s vrchním ramenem KM od spodního ramena PM se odchylovala opačným směrem od východu jihem k západu. Že tato odchylka roviny kyvu KFM od spodního ramena PM Foucaultova úhlu KMP nikoliv skutečnou, nýbrž jen zdánlivou odchylkou jest, netřeba teprv dokazovati, jelikož již víme, že rovina kyvu následkem setrvačnosti kyvadlové hmoty relativně nehybná jest, pokud se totiž nemůže otáčeti kolem svislice bodu závěsného.

Z Foucaultova úhlu $KMP > 0^0$ *čili ze zdánlivé úchylky* $U_h = h \,.\, 15^0 \sin \varphi$ *roviny Foucaultova kyvadla poznáváme tedy předně rotaci spodního ramena* PM *a podlahy a pevně s ní spojené země kolem svislice* FMS *bodu závěsného* F *od západu jihem k východu (směrem šipky) úhlovou rychlostí* $V_1 = 15^0 \sin \varphi$.

Jelikož ale na každém přístupném místě zemského povrchu Foucaultovo kyvadlo zavěšeno býti může, tož *patrno jest, že tato*

*) Na příklad: Petrohrad, $\varphi = 59^0,57'$; Aberdeen $57^0,9'$; York $53^0,58'$; Dublín $53^0,23'$; Berlín $52^0,30'$; Greenwich $51^0,29'$; Bristol $51^0,27'$; Kolín (Köln) $50^0,56'$; Praha $50^0,5'$; Brno $49^0,12'$; Paříž $48^0,50'$; Vídeň $48^0,13'$; Hradec $47^0,4'$; Ženéva $46^0,12'$; Terst $45^0,39'$; Florencie $43^0,47'$; Řím $41^0,54'$; Providence $41^0,49'$; New-Haven $41^0,18'$; Neapol $40^0,52'$; New-York $40^0,44'$; Palermo $38^0,7'$; Ceylon $6^0,56$; Rio-Janeiro $\varphi = -22^0,54'$ a mnoho jiných. Srovnej Dr. *F. J. Pisko*: „*Foucault's Beweis für die Axendrehung der Erde*“ pag. 25, Brünn, Winiker 1853.]

rotace země kolem svislice FMS *od západu k východu úhlovou rychlostí* $V_1 = 15^0 \sin \varphi$ *jen složkou jest výslední rotace zemské kolem osy* TS *od západu k východu (směrem šipky).*

Chtějíce určiti úhlovou rychlosť V výslední rotace zemské kolem osy TS, považujme tuto výslední rotaci jakožto složku, jejížto souložka rovná se nulle. Pak bude největší hodnota úhlové rychlosti $15^0 \sin \varphi = 15^0 \sin 90^0 = 15^0$ úhlovou rychlostí $V_2 = 15^0 = V$ rotace zemské kolem osy TS, a nejmenší hodnota úhlové rychlosti $15^0 \sin \varphi = 15^0 \sin 0^0 = 0^0$ úhlovou rychlostí $V_1 = 0^0$ příslušné souložky, t. j. úhlovou rychlostí rotace zemské kolem osy RS $\perp$ TS.

Z Foucaultova úhlu KMP $> 0^0$ *čili ze zdánlivé úchylky* $U_h = h \,.\, 15^0 \sin \varphi$ *roviny Foucaultova kyvadla poznáváme tedy dále, že se naše země kolem osy* RS *od západu k východu úhlovou rychlostí* $V_1 = 15^0 \sin 0^0 = 0^0$, *a zároveň kolem osy* TS $\perp$ RS *od západu k východu úhlovou rychlostí*

$$V_2 = 15^0 \sin 90^0 = 15^0 \cos 0^0 = 15^0 = V$$

otáčí.

Svislá rovina RST, osami RS a TS určená, zove se rovinou poledníkovou, a průsečnice její A'R || TS s vodorovnou podlahou místa R sluje poledníkem tohoto místa.

Poněvadž rotace zemská kolem osy RS rovná se nulle, nemůže se následkem této nullové rotace ani osa TS ani poledník A'R || TS ani s poledníkem pevně spojená podlaha místa R kolem osy RS otáčeti. *Výslední osa* TS *je tudíž naprosto (absolutně) nehybná čili pevná*, odezíráme-li totiž od společného pohybu, jejž má zároveň se zemí v ekliptice kolem slunce a se sluncem ve světovém prostoru.*)

Naproti tomu opíše za den D = 24 hodin, následkem rotace zemské kolem osy TS, točna R kružnici $R_0 R_1 R_2 \ldots R_{n-1} R_0$ rovníkem nazvanou, osa RS kruhovou plochu touto kružnicí omezenou, a poledník A'R || TS oblinu kolmého válce; místo M opíše za den rovnoběžník $M_0 M_1 M_2 \ldots M_{n-1} M_0$ a poloměr MS oblinu kolmého kužele $SM_0 M_1 M_2 \ldots M_{n-1} M_0$; místo N opíše

*) Srovnej Dr. *A. Seydler*: *„Theoretická mechanika pro vysoké školy."* pag. 161 §. 47. příklad 1. V Praze. Slavík a Borový, 1880.

za den rovnoběžník $N_0N_1N_2 \ldots N_{n-1}N_0$ a poloměr NS oblinu kolmého kužele $SN_0N_1N_2 \ldots N_{n-1}N_0$.

Protože poledník A'R neustále je rovnoběžný s osou TS, tož na bíle dni jest, že se následkem rotace zemské kolem osy TS ani poledník A'R || TS ani s poledníkem pevně spojená podlaha místa R kolem osy RS neotáčí; neboť kdyby se podlaha místa R kolem osy RS otáčela, nemohl by poledník A'R neustále býti rovnoběžným s osou TS, jež naprosto nehybná jest. *Podlaha místa* R *na rovníku je tedy relativně nehybnou*, pokud se totiž nemůže otáčeti kolem osy RS, a sice ani následkem nullové rotace zemské kolem osy RS, ani následkem skutečné rotace zemské kolem osy TS, okolo níž i podlaha místa R jedenkrát za den se otočí.

Z toho jde, že kývá-li Foucaultovo kyvadlo F'R na rovníku, nemůže se spodní rameno P'R Foucaultova úhlu K'RP' kolem svislé osy RS otáčeti, ačkoliv má s podlahou, na nížto leží, a s poledníkem A'R a s rovinou kyvu K'F'R a se svislicí F'RS společný točivý pohyb okolo vodorovné osy TS.

Na rovníku je tudíž Foucaultův úhel K'RP' *neustále roven úhlu nullovému.*

Kdybychom Foucaultovo kyvadlo F''T *zavěsiti mohli nad točnou* T *v prodloužené ose* TS, *byla by rovina kyvu* K''F''T *s vrchním ramenem* K''T *Foucaultova úhlu* K''TP'' *naprosto nehybnou.* Jelikož ale země a pevně s ní spojená podlaha místa T, na níž by leželo spodní rameno P''T Foucaultova úhlu, kolem osy TS od západu jihem k východu úhlovou rychlostí $V_2 = 15^0 = V$ se otáčí, tož je bez další úvahy *zřejmo, že by Foucaultův úhel* K''TP'' *na konci každé hodiny se rovnal úhlu*

$$U_h = h \,.\, 15^0.$$

Pošineme-li v rovině poledníkové RST souosí RS $\perp$ TS rotačních složek o libovolný úhel RSM $= \varphi$, až rovinný útvar A'R $\perp$ RS $\perp$ TS dopadne v polohu AM $\perp$ MS $\perp$ NS, pak bude zeměpisná šířka točny M rovna φ a zeměpisná šířka soutočny N rovna $(\varphi + 90^0)$ anebo $(90^0 - \varphi)$ podle toho, měříme-li ji obloukem R_0TN_0 aneb obloukem R_2N_0.

Z Foucaultova úhlu KMP $\equiv U_h = h \,.\, 15^0 \sin \varphi$, *na libovolném místě* M *po h hodinách pozorovaného, poznáváme tedy konečně, že naše země kolem svislé osy* MS *od západu k východu úhlovou* *rychlostí* $V_1 = 15^0 \sin \varphi$, *a zároveň kolem vodorovné osy* NS, *rovnoběžné s poledníkem* AM *místa* M, *od západu k východu (směrem šipky) úhlovou rychlostí*

$$V_2 = 15^0 \sin (\varphi + 90^0) = 15^0 \sin (90^0 - \varphi) = 15^0 \cos \varphi$$

se otáčí.

Jelikož poledník AM neustále je rovnoběžný s vodorovnou osou NS, tož velmi snadno jest pochopiti, že následkem rotace zemské kolem vodorovné osy NS ani poledník AM || NS ani s poledníkem pevně spojená podlaha místa M ani s podlahou pevně spojené spodní rameno PM Foucaultova úhlu KMP kolem svislé osy MS otáčeti se nemůže.

Rotace zemská kolem vodorovné osy NS *nemá tudíž na Foucaultův úhel* $KMP \equiv U_h = h \,.\, 15^0 \sin \varphi$ *žádného vlivu, protože tento úhel toliko rotací spodního ramena* PM *okolo svislé osy* MS *vznikne a roste.*

Následkem rotace zemské kolem svislé osy MS otáčí se i vodorovná osa NS, a následkem rotace zemské kolem vodorovné osy NS otáčí se i svislá osa MS, protože točny N a M jsou body povrchu zemského.

Souosy MS *a* NS *rotačních složek nejsou tedy naprosto nehybné čili pevné;* osy tyto můžeme jen potud nehybnými nazvati, pokud žádná z nich se neotáčí kolem sebe samé, aneb jinými slovy: *Svislá osa* MS *jakožto osa jest nehybná, ačkoliv se neustále otáčí kolem vodorovné osy* NS, *opisujíc oblinu kolmého kužele* $SM_0M_1M_2 \ldots M_{n-1}M_0$, *a podobně vodorovná osa* NS *jakožto osa jest nehybná, ačkoliv se neustále otáčí kolem svislé osy* MS, *opisujíc oblinu kolmého kužele* $SN_0N_1N_2 \ldots N_{n-1}N_0$.

Jakož jsme prve z Foucaultova úhlu

$$KMP \equiv U_h = h \,.\, 15^0 \sin \varphi$$

(Obr. 1.), pozorovaného po *h* hodinách na libovolném místě M zeměpisné šířky φ, poznali výslední rotaci země kolem naprosto nehybné osy TS od západu k východu úhlovou rychlostí

$$V = \frac{360^0}{24} = 15^0,$$

rovněž tak z této výslední rotace rozložené ve dvě rotace kolem dvou kolmo na sobě stojících *os, z nichžto žádná ani okamžik naprosto nehybnou není,* pouhým rozumováním (a priori čili deduktivně) lze stanoviti velikost Foucaultova úhlu pro každé místo M, na kterém volně zavěšené kyvadlo FM zcela volně kývá*).

Vztyčme k tomuto účelu v rovině poledníkové MST kolmice $MA \perp MS$ i $SN \perp SM$, a spusťme z libovolného bodu G osy TS kolmice $GH \perp MS$ i $GJ \perp NS$.

Značí-li přímka GS výslední úhlovou rychlost $V = 15^0$ rotace zemské kolem osy $GS \equiv TS$ od západu k východu (směrem šipky), pak označuje přímka

$$HS = GJ = GS \sin \varphi$$

úhlovou rychlost $V_1 = 15^0 \sin \varphi$ složkové rotace zemské kolem svislé osy $HS \equiv MS$ od západu k východu (směrem šipky), a přímka

$$JS = GH = GS \cos \varphi$$

úhlovon rychlost $V_2 = 15^0 \cos \varphi$ složkové rotace zemské kolem vodorovné osy $JS \equiv NS$ od západu k východu (směrem šipky).

Následkem rotace zemské kolem svislé osy MS otáčí se podlaha místa M a „původní kývací směr PM na podlaze" a poledník $AM \parallel NS$ a vodorovná osa NS kolem svislice FMS od západu jihem k východu úhlovou rychlostí $V_1 = 15^0 \sin \varphi$, kdežto rovina kyvu KFM a „původní kývací směr KM na rovině kyvu" následkem šetrvačnosti kyvadlové hmoty kolem svislice FMS otáčeti se nemůže. Pročež budou původní kývací směry KM a PM na konci h hodin svírati úhel

$$KMP \equiv U_h = h \,.\, 15^0 \sin \varphi,$$

na jehož velikost rotace zemská kolem vodorovné osy NS žádného nemá vlivu, poněvadž touto rotací země kolem vodorovné osy NS nemůže se ani podlaha ani původní kývací směr PM ani poledník $AM \parallel NS$ okolo svislice FMS otáčeti, ačkoliv mají s touto svislicí a s rovinou kyvu KFM a s původním kývacím směrem KM společný točivý pohyb okolo vodorovné osy NS.

*) Srovnej *Dr. Alois Handl*: *„Lehrbuch der Physik für die oberen Classen der Mittelschulen"* 3. Aufl. Ausgabe für Gymnasien pag. 281, §. 367. Wien, 1884. Alfred Hölder. — *Dr. Ignaz G. Wallentin*: *„Lehrbuch der Physik f. d. oberen Classen d. Mittelschulen und verwandter Lehranstalten"*. 4. Aufl. Ausg. f. Gymn. pag. 60. §. 39. Wien, 1885. Pichler's Witwe.

Místo M *je točnou vzhledem k rotaci zemské kolem svislé osy* MS *a zároveň místem na rovníku vzhledem k současné rotaci zemské kolem vodorovné osy* NS.

Svislá osa MS *jakožto osa jest nehybná, ačkoliv se neustále otáčí kolem vodorovné osy* NS, *opisujíc oblinu kolmého kužele* $SM_0M_1M_2 \ldots M_{n-1}M_0$, *a podobně vodorovná osa* NS *jakožto osa jest nehybná, ačkoliv se neustále otáčí kolem svislé osy* MS, *opisujíc oblinu kolmého kužele* $SN_0N_1N_2 \ldots N_{n-1}N_0$.

Abychom tomu důkladněji porozuměli, rozdělme v mysli *nehybný rovnoběžník* $M_0M_1M_2 \ldots M_{n-1}M_0$, jejž následkem výsledné rotace zemské kolem osy TS opíše za den $D = 24$ hodin místo M, na $n = 4$ stejné oblouky $\overset{\frown}{M_0M_1} \cong \overset{\frown}{M_1M_2} \cong \overset{\frown}{M_2M_3} \cong \overset{\frown}{M_3M_0}$, a položme krajnými body těchto nehybných oblouků *největší nehybné kruhy*, jež protínají rovinu rovnoběžníkem $M_0M_1M_2M_3M_0$ omezenou v tětivách

$$M_0\mathfrak{M}_0M_1 = M_1\mathfrak{M}_1M_2 = M_2\mathfrak{M}_2M_3 = M_3\mathfrak{M}_3M_0.$$

Označíme-li těmito literami nejenom tětivy, nýbrž i příslušné oblouky největších kruhů, pak budou výkrojky

$$S\overset{\frown}{M_0\mathfrak{M}_0M_1}S \cong S\overset{\frown}{M_1\mathfrak{M}_1M_2}S \cong S\overset{\frown}{M_2\mathfrak{M}_2M_3}S \cong S\overset{\frown}{M_3\mathfrak{M}_3M_0}S$$

těchto největších nehybných kruhů stěnami *čtyrhranného rohu* $S\overset{\frown}{M_0\mathfrak{M}_0M_1}\overset{\frown}{\mathfrak{M}_1M_2}\overset{\frown}{\mathfrak{M}_2M_3}\overset{\frown}{\mathfrak{M}_3M_0}$ *do kužele* $SM_0M_1M_2M_3M_0$ *vepsaného* a oblouky těchto výkrojků stranami *sférického čtyrúhelníku*

$$\overset{\frown}{M_0\mathfrak{M}_0M_1}\overset{\frown}{\mathfrak{M}_1M_2}\overset{\frown}{\mathfrak{M}_2M_3}\overset{\frown}{\mathfrak{M}_3M_0}.$$

Rozdělivše taktéž *nehybný rovnoběžník* $N_0N_1N_2 \ldots N_{n-1}N_0$, jejž následkem výslední rotace zemské kolem osy TS opíše za den $D = 24$ hodin místo N, na $n = 4$ stejné oblouky

$$\overset{\frown}{N_0N_1} \cong \overset{\frown}{N_1N_2} \cong \overset{\frown}{N_2N_3} = \overset{\frown}{N_3N_0}$$

vztyčme potom ve středu S na stěně $S\overset{\frown}{M_0\mathfrak{M}_0M_1}S$ *nehybnou kolmici* $\mathfrak{N}_0S = NS$, na stěně $S\overset{\frown}{M_1\mathfrak{M}_1M_2}S$ *nehybnou kolmici*

$$\mathfrak{N}_1S = NS,$$

na stěně $S\overset{\frown}{M_2\mathfrak{M}_2M_3}S$ *nehybnou kolmici* $\mathfrak{N}_2S = NS$, na stěně $S\overset{\frown}{M_3\mathfrak{M}_3M_0}S$ *nehybnou kolmici* $\mathfrak{N}_3S = NS$, a položme *nehybnými body* $\mathfrak{N}_0$ i $\mathfrak{N}_1$, $\mathfrak{N}_1$ i $\mathfrak{N}_2$, $\mathfrak{N}_2$ i $\mathfrak{N}_3$, $\mathfrak{N}_3$ i $\mathfrak{N}_0$ *největší nehybné kruhy*, jež rozšířeny jsouce protínají rozšířenou rovinu rovnoběžníkem $N_0N_1N_2N_3N_0$ ohraničenou v tečnách

$$\mathfrak{N}_0 N_1 \mathfrak{N}_1 = \mathfrak{N}_1 N_2 \mathfrak{N}_2 = \mathfrak{N}_2 N_3 \mathfrak{N}_3 = \mathfrak{N}_3 N_0 \mathfrak{N}_0.$$

Označíme-li těmito literami nejenom tečny, nýbrž i příslušné oblouky největších kruhů, pak budou výkrojky

$$S\widehat{\mathfrak{N}_0 N_1 \mathfrak{N}_1}S \cong S\widehat{\mathfrak{N}_1 N_2 \mathfrak{N}_2}S \cong S\widehat{\mathfrak{N}_2 N_3 \mathfrak{N}_3}S \cong S\widehat{\mathfrak{N}_3 N_0 \mathfrak{N}_0}S$$

těchto největších nehybných kruhů stěnami *čtyrhranného rohu* $S\widehat{\mathfrak{N}_0 N_1 \mathfrak{N}_1}\widehat{N_2 \mathfrak{N}_2}\widehat{N_3 \mathfrak{N}_3}\widehat{N_0 \mathfrak{N}_0}$ *okolo kužele* $SN_0N_1N_2N_3N_0$ *opsaného*, a oblouky těchto výkrojků stranami *sférického čtyrúhelníku* $\widehat{\mathfrak{N}_0 N_1}\,\widehat{\mathfrak{N}_1 N_2 \mathfrak{N}_2}\,\widehat{N_3 \mathfrak{N}_3 N_0 \mathfrak{N}_0}$.

Dle této konstrukce bude pak sférický čtyrúhelník $\mathfrak{N}_0 N_1 \ldots \mathfrak{N}_0$ *polárným úhelníkem sférického čtyrúhelníku* $M_0 \mathfrak{M}_0 \ldots M_0$, *a naopak, tento sférický čtyrúhelník bude polárným úhelníkem onoho. Taktéž bude čtyrhranný roh* $S\mathfrak{N}_0 N_1 \ldots \mathfrak{N}_0$ *polárným rohem čtyrhranného rohu* $SM_0\mathfrak{M}_0 \ldots M_0$, *a naopak, tento čtyrhranný roh bude polárným onoho.*

Poněvadž konečný účinek dvou složek je tentýž, nechať si už tyto složky buď současně anebo v libovolném pořádku po sobě působí, *mysleme si tedy, jako by se země kolem os* MS *a* NS *neotáčela současně, nýbrž toliko střídavě, a dejme tomu,*

I. že se naše země otáčí během 1—3, 9—15, 21—27, 33—39, 45—48 hodin *kolem svislé osy* MS od západu k východu úhlovou rychlostí

$$v_1 = 15^0 \sin\varphi \,.\, p_4,$$

při čemž poměr

$$p_4 = \frac{\widehat{N_0\mathfrak{N}_0 N_1}}{\widehat{N_0 \quad N_1}} = \frac{\widehat{N_0\mathfrak{N}_0 N_1}\widehat{\mathfrak{N}_1 N_2}\widehat{\mathfrak{N}_2 N_3}\widehat{\mathfrak{N}_3 N_0}}{\widehat{N_0 \quad N_1}\widehat{\quad N_2}\widehat{\quad N_3}\widehat{\quad N_0}} > 1,$$

a během 3—9, 15—21, 27—33, 39—45 hodin *kolem vodorovné osy* NS od západu k východu úhlovou rychlostí

$$v_2 = 15^0 \cos\varphi \,.\, p'_4,$$

při čemž poměr

$$p'_4 = \frac{\widehat{M_0\mathfrak{M}_0 M_1}}{\widehat{M_0 \quad M_1}} = \frac{\widehat{M_0\mathfrak{M}_0 M_1}\widehat{\mathfrak{M}_1 M_2}\widehat{\mathfrak{M}_2 M_3}\widehat{\mathfrak{M}_2 M_0}}{\widehat{M_0 \quad M_1}\widehat{\quad M_2}\widehat{\quad M_3}\widehat{\quad M_0}} < 1.$$

1. Následkem rotace zemské *kolem svislé osy* $MS \equiv M_0S$ úhlovou rychlostí v_1 opíše místo N během 1—3 hodin oblouk $\widehat{N_0\mathfrak{N}_0}$ největšího kruhu, a *přijde tudíž vodorovná osa* NS za tři hodiny z polohy N_0S do polohy $\mathfrak{N}_0S$, *opsavši okolo části kužele* $SN_0N_1N_2N_3N_0$ *příslušný výkrojek* $S\widehat{N_0\mathfrak{N}_0}S$, jenžto se tohoto kužele

poloměrem N_0S dotýká. Foucaultův úhel KMP nabude během 1—3 hodin konečné hodnoty

$$u_3 = 3 \, . \, 15^0 \sin \varphi \, . \, p_4 > 3 \, . \, 15^0 \sin \varphi,$$

protože Foucaultovo kyvadlo FM celé tři hodiny je zavěšeno nad točnou $M \equiv M_0$, kdež podlaha se spodním ramenem PM a s poledníkem $AM \parallel NS$ kolem svislice $FMS \equiv FM_0S$ od západu jihem k východu úhlovou rychlostí $v_1 = 15^0 \sin \varphi \, . \, p_4$ se otáčí, ale rovina kyvu KFM s vrchním ramenem KM naprosto nehybnou jest.

Podobným spůsobem jest nám rozumovati o rotaci země kolem svislé osy $MS \equiv M_1S$, $MS \equiv M_2S$, $MS \equiv M_3S$, $MS \equiv M_0S$ úhlovou rychlostí v_1 během 9—15, 21—27, 33—39, 45—48 hodin.

2. Následkem rotace zemské *kolem vodorovné osy*

$$NS \equiv \mathfrak{N}_0S$$

úhlovou rychlostí v_2 opíše místo M během 3—9 hodin oblouk $\overparen{M_0\mathfrak{M}_0M_1}$ největšího kruhu, a *přijde tudíž svislá osa* MS za šest hodin z polohy M_0S do polohy M_1S, *vepsavši do části kužele* $SM_0M_1M_2M_3M_0$ *příslušný výkrojek* $S\overparen{M_0\mathfrak{M}_0M_1}S$, jenž oblinu tohoto kužele poloměry M_0S a M_1S protíná. Foucaultův úhel

$$KMP \equiv u_3 = 3 \, . \, 15^0 \sin \varphi \, . \, p_4$$

touto rotací zemskou se nezmění, protože Foucaultovo kyvadlo celých šest hodin je zavěšeno na rovníkovém oblouku $\overparen{M_0\mathfrak{M}_0M_1}$, kdež podlaha se spodním ramenem PM a s poledníkem

$$AM \parallel NS \equiv \mathfrak{N}_0S$$

kolem svislice FMS nikterak se neotáčí, ačkoliv má s touto svislicí a s vrchním ramenem KM a s rovinou kyvu KFM společný točivý pohyb okolo vodorovné osy $NS \equiv \mathfrak{N}_0S$.

Podobným spůsobem jest nám rozumovati o rotaci země kolem vodorovné osy $NS \equiv \mathfrak{N}_1S$, $NS \equiv \mathfrak{N}_2S$, $NS \equiv \mathfrak{N}_3S$ úhlovou rychlostí v_2 během 15—21, 27—33, 39—45 hodin.

Následkem rotace zemské kolem osy

		hodin			z polohy	do polohy
1. $MS \equiv M_0S$	během	1—3	přijde tudíž osa	NS	N_0S	$\mathfrak{N}_0S$,
2. $NS \equiv \mathfrak{N}_0S$	„	3—9	„	MS	M_0S	M_1S,
3. $MS \equiv M_1S$	„	9—15	„	NS	$\mathfrak{N}_0S$	$\mathfrak{N}_1S$,
4. $NS \equiv \mathfrak{N}_1S$	„	15—21	„	MS	M_1S	M_2S,
5. $MS \equiv M_2S$	„	21—27	„	NS	$\mathfrak{N}_1S$	$\mathfrak{N}_2S$,
6. $NS \equiv \mathfrak{N}_2S$	„	27—33	„	MS	M_2S	M_3S,
7. $MS \equiv M_3S$	„	33—39	„	NS	$\mathfrak{N}_2S$	$\mathfrak{N}_3S$,
8. $NS \equiv \mathfrak{N}_3S$	„	39—45	„	MS	M_3S	M_0S,
1. $MS \equiv M_0S$	„	45—48	„	NS	$\mathfrak{N}_3S$	N_0S.

Jestiť tedy místo M, na němžto Foucaultovo kyvadlo FM zcela volně kývá, *střídavě točnou a místem na rovníku; točnou jest místo* M *vzhledem k rotaci zemské kolem naprosto nehybné svislice* $MS \equiv M_0S$, $MS \equiv M_1S$, $MS \equiv M_2S$, $MS \equiv M_3S$, *a místem na rovníku jest místo* M *vzhledem k rotaci zemské kolem naprosto nehybné osy* $NS \equiv \mathfrak{N}_0S$, $NS \equiv \mathfrak{N}_1S$, $NS \equiv \mathfrak{N}_2S$, $NS \equiv \mathfrak{N}_3S$. Touto rotací země kolem vodorovné osy NS Foucaultův úhel KMP se nemění, jak patrno z hořejšího důvodu v odstavci 2. uvedeného; onou však rotací země kolem svislé osy MS nabude Foucaultův úhel KMP konečné hodnoty

$$u_{24} = 24 \,.\, 15^0 \sin \varphi \,.\, p_4 = 360^0 \sin \varphi \,.\, p_4 > 360^0 \sin \varphi,$$

jak patrno z hořejšího důvodu v odstavci 1. uvedeného.

Rozdělíme-li v mysli *nehybný rovnoběžník* $M_0M_1M_2 \ldots M_{n-1}M_0$ na libovolný počet $n = 24,\ 24 \,.\, 60,\ 24 \,.\, 60^2,\ 24 \,.\, 60^3, \ldots$ stejných oblouků etc., a myslíme-li si, že se naše země každou hodinu, minutu, sekundu, tercii... střídavě otáčí kolem os MS a NS úhlovými rychlostmi

$$v_1 = 15^0 \sin \varphi \,.\, p_n,$$

při čemž poměr

$$p_n = \frac{\overset{\frown}{N_0\mathfrak{N}_0N_1}}{\overset{\frown}{N_0N_1}} = \frac{\overset{\frown}{N_0\mathfrak{N}_0N_1}\overset{\frown}{\mathfrak{N}_1N_2}\ldots\overset{\frown}{N_{n-1}\mathfrak{N}_{n-1}N_0}}{\overset{\frown}{N_0N_1}\overset{\frown}{N_2}\ldots\overset{\frown}{N_{n-1}N_0}} > 1 \qquad (1)$$

a

$$v_2 = 15^0 \cos \varphi \,.\, p'_n,$$

při čemž poměr

$$p'_n = \frac{\overset{\frown}{M_0\mathfrak{M}_0M_1}}{\overset{\frown}{M_0M_1}} = \frac{\overset{\frown}{M_0\mathfrak{M}_0M_1}\overset{\frown}{\mathfrak{M}_1M_2}\ldots\overset{\frown}{M_{n-1}\mathfrak{M}_{n-1}M_0}}{\overset{\frown}{M_0M_1}\overset{\frown}{M_2}\ldots\overset{\frown}{M_{n-1}M_0}} < 1 \qquad (2)$$

od západu k východu, pak *opíše místo* N za 24 přetržených hodin okolo rovnoběžníku $N_0N_1N_2\ldots N_{n-1}N_0$ sférický *n*úhelník $N_0\overset{\frown}{\mathfrak{N}_0N_1}\overset{\frown}{\mathfrak{N}_1N_2}\ldots\overset{\frown}{N_{n-1}N_{n-1}N_0}$, mající s tímto rovnoběžníkem *n* společných bodů N_0, N_1, N_2, ..., N_{n-1}, a *vepíše místo* M za jiných 24 přetržených hodin do rovnoběžníku

$$M_0M_1M_2\ldots M_{n-1}M_0$$

polárný *n*úhelník $\overset{\frown}{M_0\mathfrak{M}_0M_1}\overset{\frown}{\mathfrak{M}_1M_2}\ldots\overset{\frown}{M_{n-1}\mathfrak{M}_{n-1}M_0}$, mající s tímto rovnoběžníkem *n* společných bodů M_0, M_1, M_2, ... M_{n-1}; taktéž *opíše vodorovná osa* NS okolo kužele $SN_0N_1N_2\ldots N_{n-1}N_0$ *n*hranný roh $SN_0\overset{\frown}{\mathfrak{N}_0N_1}\overset{\frown}{\mathfrak{N}_1N_2}\ldots\overset{\frown}{N_{n-1}\mathfrak{N}_{n-1}N_0}$, dotýkající se obliny tohoto kužele *n* poloměry N_0S, N_1S, N_2S, ..., $N_{n-1}S$, a *vepíše svislá osa* MS do kužele $SM_0M_1M_2\ldots M_{n-1}M_0$ polárný *n*hranný roh $S\overset{\frown}{M_0\mathfrak{M}_0M_1}\overset{\frown}{\mathfrak{M}_1M_2}\ldots\overset{\frown}{M_{n-1}\mathfrak{M}_{n-1}M_0}$, protínající oblinu tohoto kužele *n* hranami M_0S, M_1S, M_2S, ..., $M_{n-1}S$.

Foucaultův úhel KMP nabude za 24 přetržených hodin konečné hodnoty

$$u_{24} = 24 \,.\, 15^0 \sin\varphi \,.\, p_n = 360^0 \sin\varphi \,.\, p_n > 360^0 \sin\varphi, \quad (3)$$

v kteréžto relaci proměnné veličiny u, p_n při rostoucím $n = 24$, $24 \,.\, 60$, $24 \,.\, 60^2$, $24 \,.\, 60^3$ ... a stálém φ ustavičně se zmenšují, a tímto zmenšováním neustále se přibližují ke stálým veličinám U, 1 jakožto svým spodním mezím. *Pročež obdržíme hromadným přechodem*) k mezním hodnotám* U, 1 *proměnných veličin* u, p_n *ze smyšleného Foucaultova úhlu relací (3) zobrazeného skutečný Foucaultův úhel*

$$U_{24} = 24 \,.\, 15^0 \,.\, \sin\varphi \,.\, 1 = 360^0 \sin\varphi.$$

Podobně obdržíme ze smyšlených úhlových rychlostí relacemi (1) a (2) *zobrazených hromadným přechodem k mezním hodnotám* (V_1, 1) a (V_2, 1) *proměnných veličin* (v_1, p_n) a (v_2, p'_n) *skutečné úhlové rychlosti*

$$V_1 = 15^0 \sin\varphi \,.\, 1 = 15^0 \sin\varphi \quad \text{a} \quad V_2 = 15^0 \cos\varphi \,.\, 1 = 15^0 \cos\varphi,$$

jimiž se naše země kolem os MS *a* NS *od západu k východu nikoliv střídavě, nýbrž současně a nepřetržitě otáčí.* Myslíme-li si však, že se naše země střídavě otáčí kolem os MS a NS, a sice první, třetí, pátý, ... okamih okolo svislé osy MS, a druhý,

---

*) Viz „Časop. pro pěstování math. a fys." X. 1881. pag. 201 a 252.

čtvrtý, šestý.... okamih kolem vodorovné osy NS, pak velmi snadno pochopíme, *že svislá osa* MS *první, třetí, pátý, ... okamih je naprosto nehybnou, ale druhý, čtvrtý, šestý, ... okamih se otáčí kolem vodorovné osy* NS, *vepisujíc do kužele* $SM_0M_1M_2 \ldots M_0$ *∞hranný roh, jenž oblinu tohoto kužele ∞*) hranami protíná;* podobně velmi snadno pochopíme, *že vodorovná osa* NS *druhý, čtvrtý, šestý, ... okamih je naprosto nehybnou, ale první, třetí, pátý, ... okamih se otáčí kolem svislé osy* MS, *opisujíc okolo kužele* $SN_0N_1N_2 \ldots N_0$ *polárný ∞hranný roh, jenžto se obliny tohoto kužele ∞ poloměry dotýká.*

Přejdouce konečně od těchto smyšlených (střídavých a přetržitých) rotací ke skutečným (současným a nepřetržitým) rotacím země kolem os MS a NS bez obtíže také pochopíme, *že svislá osa* MS *jakožto osa jest nehybná, ačkoliv se neustále otáčí kolem vodorovné osy* NS, *opisujíc oblinu kolmého kužele* $SM_0M_1M_2 \ldots M_0$, *a že taktéž vodorovná osa* NS *jakožto osa jest nehybná, ačkoliv se neustále otáčí kolem svislé osy* MS, *opisujíc oblinu kolmého kužele* $SN_0N_1N_2 \ldots N_0$.

Dejme tomu

II. že se naše země otáčí během 1—3, 9—15, 21—27 33—39, 45—48 hodin *kolem vodorovné osy* NS od západu k východu úhlovou rychlostí

$$w_2 = 15^0 \cos\varphi \,.\, \mathfrak{p}_4,$$

při čemž poměr

$$\mathfrak{p}_4 = \frac{\overparen{M_0m_0M_1}}{\overparen{M_0\,M_1}} = \frac{\overparen{M_0m_0M_1}\,\overparen{m_1M_2}\overparen{m_2M_3}\overparen{m_3M_0}}{\overparen{M_0\,M_1}\,\overparen{M_2}\,\overparen{M_3}\,\overparen{M_0}} > 1,$$

a během 3—9, 15—21, 27—33, 39—45 hodin *okolo svislé osy* MS od západu k východu úhlovou rychlostí

$$w_1 = 15^0 \sin\varphi \,.\, \mathfrak{p}'_4,$$

při čemž poměr

$$\mathfrak{p}'_4 = \frac{\overparen{N_0n_0N_1}}{\overparen{N_0\,N_1}} = \frac{\overparen{N_0n_0\,N_1}\overparen{n_1\,N_2}\overparen{n_2\,N_3}\overparen{n_3N_0}}{\overparen{N_0\,N_1}\,\overparen{N_2}\,\overparen{N_3}\,\overparen{N_0}} < 1.$$

Úvahu o těchto rotacích zemských, podobnou úvaze I., rozpředou si snaživí studující sami, sestrojivše dříve čtyrhranné

---

*) t. j. tolika hranami, kolik okamihů za den $D = 24$ hodin uplyne.

rohy $S\widehat{N_0 n_0 N_1 n_1 N_2 n_2 N_3 n_3 N_0}$ a $S\widehat{M_0 m_0 M_1 m_1 M_2 m_2 M_3 m_3 M_0}$, z nichžto prvý je do kužele $SN_0N_1N_2N_3N_0$ vepsaný, a druhý okolo kužele $SM_0M_1M_2M_3M_0$ opsaný.

O soustavách bodů a jich významu v analysi.

Píše

M. Lerch v Praze.

1.

Již *Cauchy* vytknul větu, že pro každou řadu mocninovou tvaru

$$(1) \qquad a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_\nu x^\nu + \ldots,$$

která konverguje pro jistá x a pro jiná diverguje, existuje kladná veličina ϱ té vlastnosti, že řada (1) konverguje pro všecka x absolutně menší než ϱ, a diverguje pro všecka x absolutně větší než ϱ.

Někteří spisovatelé starší školy dokazují tuto větu následovně: Konverguje-li řada (1), a značí-li u_ν obecný její člen $a_\nu x^\nu$, bude $\lim\limits_{\nu=\infty} \frac{u_{\nu+1}}{u_\nu} \leqq 1$, tj. $x . \lim\limits_{\nu=\infty} \frac{a_{\nu+1}}{a_\nu} \leqq 1$, takže třeba klásti $\varrho = \lim\limits_{\nu=\infty} \frac{a_\nu}{a_{\nu+1}}$, aby věta byla dokázána co do prvé části.

Zdá se mi, že těmto autorům ani na mysl nepřipadla možnosť, že existují řady konvergentní, v nichž o existenci veličiny $\lim \frac{u_{\nu+1}}{u_\nu}$ nemůže býti řeči.

Řady, u nichž tato veličina existuje, náležejí sice k nejznámějším a k nejčastějším v elementarné analysi, celkem jsou ale velmi řídké. Neboť již jednoduchá řada desetinná

$$\frac{72}{99} = 0{\cdot}727272\ldots = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{a_\nu}{10^\nu},$$

v níž

$$a_1 = a_3 = a_5 = \ldots = a_{2n+1} = \ldots = 7,$$
$$a_2 = a_4 = a_6 = \ldots = a_{2n} = \ldots = 2,$$