Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

Zdeněk Pírko

Ke kinematice kotálnic

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 74 (1949), No. 1, D63--D70

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/109138

4. *Výpočet podle obměny vyrovnávací přímky (přímka $G'''H'''$):*

Volíme $z = 0{,}35$ a $z' = 0{,}3473$, takže $\Delta z = 0{,}0027$. Usměrněná délka intervalu jest tudíž $\xi = 2\sqrt{3} \,.\, \Delta z = 2 \,.\, 1{,}73205 \,.\, 0{,}0027 = 0{,}00935307$.

Koeficienty γ_0 a γ_1 plynou pak ze vzorce (29) těmito hodnotami:

$$\gamma_0 \doteq 0{,}914255103; \; \gamma_1 \doteq -2{,}63249271,$$

z nichž vypočteme sblíženou hodnotu kořene

$$\frac{0{,}914255103}{2{,}63249271} = 0{,}347296347\ldots$$

Obdrželi jsme tedy hodnotu kořene na 7 míst přesně, s opravou z dalších 2 míst na 8 míst přesně.

*

Contribution à la résolution numérique de l'équation du troisième degré. En employant la méthode des moindres carrés, l'auteur résout les équations algébriques du troisième degré.

KE KINEMATICE KOTÁLNIC.

ZDENĚK PÍRKO, Praha.

V tomto článku se zabývám analytickým řešením této kinematické otázky: *Dán rovinný profil Π_1; určit rovinný profil Π_2 tak, aby kotálení profilu Π_1 po profilu Π_2 (nebo obráceně) bylo možno uskutečnit buďto pouhou translací po dané přímce nebo pouhou rotací po dané kružnici.* Ukazuji, že při stanovení vhodných všeobecných rovnic, jež vyjadřují polohové i pohybové podmínky kotálení, lze řešení všech těchto otázek převést na kvadratury.

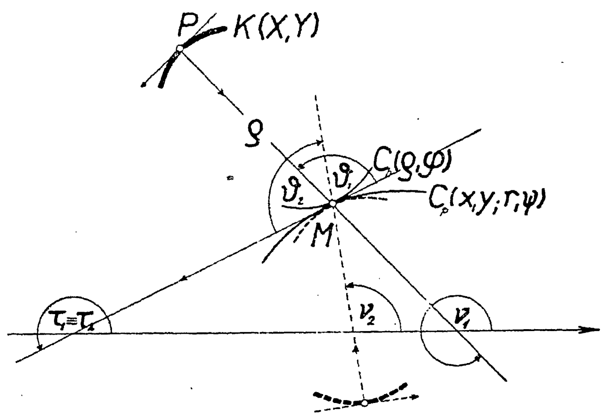
1. Zopakujme definici: Jestliže se kotálí daná čára C_h (*čára hybná*) po obvodu jiné dané čáry C_p (*čáry pevné*), aniž by klouzala, nazýváme trajektorii K, popsanou v rovině pevné čáry C_p bodem P, pevně spojeným s hybnou čarou C_h, *kotálnicí.*

Předpokládejme, že kotálení čáry C_h po čáře C_p nastává jen podél takových oblouků, na nichž neleží žádný singulární bod těchto čar. Pak rozeznávejme tyto dva případy: Během kotálení leží čáry C_p, C_h na různých stranách tečny k nim sestrojené ve společném bodě dotyku M, nebo leží po téže její straně. Budeme v prvním případě mluvit o kotálení po vnějším obvodu čáry C_p (stručně o *kotálení vnějším*), v druhém případě o *kotálení vnitřním.*

Za těchto předpokladů můžeme nyní pro čáry C_p, C_h zavésti tuto orientaci: Za kladný smysl normály považujme onen, jenž míří od incidenčního bodu k příslušnému středu křivosti; kladný smysl tečny budiž pak určen požadavkem, aby kladná tečna splynula s kladnou normálou po otočení o pravý úhel v kladném smyslu. Konečně za polární úhel tečny (to jest úhel ϑ, který tvoří tečna s průvodičem bodu dotyku: $\operatorname{tg}\vartheta = \frac{\varrho}{\varrho'}$, kde $\varrho' = \frac{d\varrho}{d\varphi}$) vezmeme onen úhel, o který třeba otočiti tečnu kolem bodu dotyku, aby splynula s průvodičem; toto točení musí se dít ve smyslu kladném, půjde-li o kotálení vnější, ve smyslu záporném v případě kotálení vnitřního.

Z obecných vlastností kotálnic pak předpokládáme jen znalost věty Descartesovy: V každé fázi pohybu prochází normála kotálnice příslušným bodem dotyku čáry pevné s čárou hybnou; splývá tedy s přímkou PM.

2. Abychom kotálení čáry C_h po čáře C_p za podmínek uvedených v předcházejícím odstavci vyjádřili analyticky, nutno přihlížet k dvěma



okolnostem, totiž k vzájemnému vztahu tří čar C_p, C_h, K v libovolné fázi pohybu (podmínky polohy) a k pohybu samému (podmínka pohybu).

Za tím účelem vztáhněme pevnou čáru C_p k soustavě pravoúhlých souřadnic, pevné v její rovině; v této soustavě nechť má bod M, počítaný k čáře C_p, souřadnice x, y, bod kotálnice K mějž v této soustavě souřadnice X, Y. Označíme-li ještě ϱ vzdálenost bodů P, M a ν úhel, který svírá kladná normála kotálnice s kladnou osou úseček zmíněné soustavy (čítaný kladně v kladném smyslu), pak snadno odečteme *podmínky polohy* z obr.; mají tvar:

$$X = x - \varrho \cos\nu_i, \quad Y = y - \varrho \sin\nu_i, \tag{1}$$

kdež platí $i = 1$ v případě vnějšího kotálení, $i = 2$ v případě vnitřního kotálení (případ ten je v obrázku naznačen čárkovaně).

Vztáhněme dále hybnou čáru C_h k soustavě polárních souřadnic, pohyblivé s touto čarou, jejíž pól v každé fázi pohybu leží v příslušném bodě P; v této soustavě nechť má bod M, počítaný k čáře C_h, souřadnice ϱ, φ. Jestliže se nyní čára C_h kotálí bez klouzání po obvodu čáry C_p, pak oblouky, odkotálené na čarách C_p, C_h od počátku pohybu až po uvažovanou fázi, mohou se lišit nejvýše o aditivní konstantu; z této okolnosti vyplývá *podmínka pohybu*:

$$\underset{+}{\sqrt{\varrho^2 + \varrho'^2}}\, \mathrm{d}\varphi = \underset{+}{\sqrt{1 + y'^2}}\, \mathrm{d}x, \tag{2}$$

$$\left(\varrho' = \frac{\mathrm{d}\varrho}{\mathrm{d}\varphi},\ y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right).$$

Rovnice (1), (2) jsou obecným vyjádřením kotálivého pohybu.

3. Obě kotálnice, jak jsou vyjádřeny rovnicemi (1) pro $i = 1, 2$, jsou obecně rozdílné. K důkazu upravme rovnice (1) takto: Označíme-li τ úhel, který svírá kladná tečna čáry C_p s kladnou osou úseček pevné soustavy souřadnic (čítaný kladně v kladném smyslu) a ϑ polární úhel tečny čáry C_h (čítaný ve smyslu úmluvy z odst. 1), tu platí nejprve

$$\nu = \tau + \varepsilon\vartheta, \tag{3}$$

při čemž je $\varepsilon = +1$ pro případ, kdy $i = 1$ (kotálení vnější), $\varepsilon = -1$ pro případ, kdy $i = 2$ (kotálení vnitřní). Dosadíme-li pak podle vztahu (3) do rovnic (1), obdržíme

$$\left.\begin{aligned} X &= x - (\cos\tau \cos\vartheta - \sin\tau \sin\varepsilon\vartheta)\, \varrho, \\ Y &= y - (\sin\tau \cos\vartheta + \cos\tau \sin\varepsilon\vartheta)\, \varrho. \end{aligned}\right\}$$

Jestliže ještě v těchto rovnicích dosadíme podle vztahů $\mathrm{tg}\tau = y'$, $\mathrm{tg}\vartheta = \dfrac{\varrho}{\varrho'}$, obdržíme toto parametrické vyjádření obou kotálnic:

$$\left.\begin{aligned} X &= x - \frac{\varrho' - \varepsilon y' \varrho}{\underset{+}{\sqrt{(1 + y'^2)(\varrho^2 + \varrho'^2)}}}\, \varrho, \\ Y &= y - \frac{y' \varrho' + \varepsilon \varrho}{\underset{+}{\sqrt{(1 + y'^2)(\varrho^2 + \varrho'^2)}}}\, \varrho; \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

k těmto rovnicím přistupuje ovšem ještě podmínka kotálení (2).

4. Po tomto obecném výkladu zabývejme se první z otázek, položených v čele práce! Jde patrně o řešení úlohy: *Dána hybná čára C_h, nalézt pevnou čáru C_p tak, aby kotálnicí K byla daná přímka.*

Zvolme pevnou soustavu pravoúhlých souřadnic tak, že osa úseček bude splývat s přímkou K; při této volbě bude podle věty Descartesovy platit

$$y = \varrho. \tag{5}$$

Rovnice dané čáry C_h v pohyblivé soustavě polárních souřadnic budiž

$$\varphi = \Phi(\varrho), \text{ takže } \varrho' = \frac{1}{\Phi'(\varrho)}, \tag{6}$$

$$\left(\varrho' = \frac{\mathrm{d}\varrho}{\mathrm{d}\varphi},\ \Phi'(\varrho) = \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}\varrho}\right).$$

Vzhledem k vztahům (5), (6) můžeme tedy psát podmínku kotálení (2) ve tvaru

$$\underset{+}{\sqrt{y^2 + \frac{1}{\Phi'^2}}}\,\mathrm{d}\varphi = \underset{+}{\sqrt{1 + y'^2}}\,\mathrm{d}x. \tag{7}$$

Pro směrnici tečny y' hledané čáry C_p platí

$$y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}\varrho}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}\varrho}{\mathrm{d}\varphi}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{\Phi'}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}$$

a tedy, vyjádříme-li ještě $\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}$ podle rovnice (7), nalezneme pro čáru C_p tuto diferenciální rovnici 1. řádu s proměnnými separovanými:

$$\mathrm{d}x = \pm\, y\,\Phi'(y)\,\mathrm{d}y.$$

$$\left(\Phi'(y) = \frac{\mathrm{d}\Phi(y)}{\mathrm{d}y}\right).$$

Zvolíme-li počátek pevné soustavy souřadnic v průsečíku přímky K s pevnou čarou C_p a uvažujeme-li jen jediné z obou symetrických řešení, obdržíme integrací předcházející rovnice

$$x = \int y\,\Phi'(y)\,\mathrm{d}y \quad \text{nebo} \quad x = y\,\Phi(y) - \int \Phi(y)\,\mathrm{d}y. \tag{8}$$

To je rovnice hledané pevné čáry C_p; její nalezení vyžaduje tudíž jedinou kvadraturu.

A obráceně, jestliže se čára (6) kotálí po čáře (8), tu z podmínky kotálení $\varrho^2\,\mathrm{d}\varphi^2 + \mathrm{d}\varrho^2 = \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2$ plyne vztah

$$[1 + \varrho^2\,\Phi'^2(\varrho)]\,\mathrm{d}\varrho^2 = [1 + y^2\,\Phi'^2(y)]\,\mathrm{d}y^2,$$

který je hodnotami (5) splněn identicky: Pól soustavy, k níž je vztažena čára (6), popíše při kotálení přímku.

Zbývá zjistit, zda jde o kotálení vnější nebo vnitřní. Dosaďme proto do rovnic (4) podle rovnic (5), (6) a za y' vztah plynoucí z rovnice (8); obdržíme

$$\left.\begin{aligned} X &= x - (1 - \varepsilon)\,\frac{y^2\,\Phi'(y)}{1 + y^2\,\Phi'^2(y)},\\ Y &= \phantom{x -{}} (1 - \varepsilon)\,\frac{y^3\,\Phi'^2(y)}{1 + y^2\,\Phi'^2(y)}. \end{aligned}\right|$$

Odtud plyne pro $\varepsilon = +1$ (kotálení vnější) předcházející výsledek

$$X = x,\ Y = 0;$$

naproti tomu pro $\varepsilon = -1$ (kotálení vnitřní) obdržíme kotálnici s parametrickými rovnicemi

$$\left.\begin{aligned} X &= x - 2\,\frac{y^2\,\Phi'(y)}{1 + y^2\,\Phi'^2(y)}, \\ Y &= \quad 2\,\frac{y^3\,\Phi'^2(y)}{1 + y^2\,\Phi'^2(y)}, \end{aligned}\right\}$$

$$(x = \int y\,\Phi'(y)\,\mathrm{d}y),$$

jež obecně je nepřímková.

Je ovšem jasné, že počáteční poloha čar C_p, C_h nemůže být libovolná; má-li při vnějším kotálení skutečně vzniknout lineární kotálnice, musí souřadnice bodu dotyku obou čar splňovat počáteční podmínku (5): $y_0 = \varrho_0$.

5. Jestliže při řešení otázky po přímkových kotálnicích předpokládáme, že je dána čára pevná místo čáry hybné, máme tuto úlohu: *Dána pevná čára C_p, nalézt hybnou čáru C_h tak, aby kotálnice K byla daná přímka.*

Touto úlohou budeme se zabývat již jen zcela stručně. Pevnou i pohyblivou soustavu souřadnic volme tak, jako v odst. 4. Vztah (5) zůstává v platnosti i zde, rovnice dané čáry C_p v pevné soustavě budiž

$$x = F(y), \text{ takže } y' = \frac{1}{F'(\varrho)}. \tag{9}$$

Z podmínky kotálení (2) plyne

$$\sqrt[+]{\varrho^2 + \varrho'^2}\,\mathrm{d}\varphi = \sqrt[+]{1 + \frac{1}{F'^2}}\,\mathrm{d}x \tag{10}$$

a odtud jako reálné řešení

$$\varrho\,\mathrm{d}\varphi = \mathrm{d}x. \tag{11}$$

Je však $\mathrm{d}x = F'(y)\,\mathrm{d}y = F'(\varrho)\,\mathrm{d}\varrho$, takže z rovnice (11) obdržíme dále $\varrho\,\mathrm{d}\varphi = F'(\varrho)\,\mathrm{d}\varrho$ a integrací (po vhodné volbě polární osy)

$$\varphi = \int \frac{F'(\varrho)}{\varrho}\,\mathrm{d}\varrho \tag{12}$$

jako rovnici hledané hybné čáry C_h.

Použijme ještě rovnic (4)! Dosadíme-li tu

$$x = F(\varrho),\ y = \varrho,\ y' = \frac{1}{F'(\varrho)},\ \sqrt[+]{1 + y'^2} = \sqrt[+]{\varrho^2 + \varrho'^2}\,\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x},$$

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{\varrho},\ \varrho' = \frac{\varrho}{F'(\varrho)},$$

obdržíme toto parametrické vyjádření obou možných kotálnic:

$$\left.\begin{aligned} X &= F(\varrho) - (1-\varepsilon)\frac{\varrho F'(\varrho)}{1+F'^2(\varrho)},\\ Y &= \phantom{F(\varrho)-{}} (1-\varepsilon)\frac{\varrho F'^2(\varrho)}{1+F'^2(\varrho)}. \end{aligned}\right\}$$

Odtud pro vnější kotálení ($\varepsilon = +1$) vyplývá předcházející výsledek

$$X = x,\ Y = 0,$$

pro vnitřní kotálení ($\varepsilon = -1$)

$$\left.\begin{aligned} X &= F(\varrho) - 2\frac{\varrho\, F'(\varrho)}{1+F'^2(\varrho)},\\ Y &= \phantom{F(\varrho)-{}} 2\frac{\varrho\, F'^2(\varrho)}{1+F'^2(\varrho)}; \end{aligned}\right\}$$

kotálnice vyjádřená těmito rovnicemi je obecně nepřímková.

6. Při druhé otázce jde o řešení úlohy: *Dána hybná čára C_h, nalézt pevnou čáru C_p tak, aby kotálnicí K byla daná kružnice.*

Zvolme pevnou soustavu souřadnic tak, že její počátek bude ve středu O kružnice K. Pohyblivá soustava polárních souřadnic mějž svůj pól opět ve vytvořujícím bodě P; rovnice dané čáry C_h v této soustavě budiž

$$\varphi = \Phi(\varrho),\ \text{takže}\ \varrho' = \frac{1}{\Phi'(\varrho)}. \tag{13}$$

Jsou-li r, ψ polární souřadnice bodu M (počítaného k pevné čáře C_p) v pevné soustavě souřadnic, pak platí (a poloměr kružnice K)

$$r = \varrho + a,\ \text{čili}\ \mathrm{d}r = \mathrm{d}\varrho. \tag{14}$$

Podmínka kotálení $\varrho^2\,\mathrm{d}\varphi^2 + \mathrm{d}\varrho^2 = r^2\,\mathrm{d}\psi^2 + \mathrm{d}r^2$ dává vzhledem k rovnicím (13), (14)

$$\mathrm{d}\psi = \pm\frac{r-a}{r}\Phi'(r-a)\,\mathrm{d}r,$$

$$\left(\Phi'(r-a) = \frac{\mathrm{d}\Phi(r-a)}{\mathrm{d}r}\right).$$

Omezíme-li se opět na jediné z obou symetrických řešení, obdržíme integrací předcházející rovnice (při vhodné volbě polární osy)

$$\left.\begin{aligned} \psi &= \int\frac{r-a}{r}\Phi'(r-a)\,\mathrm{d}r\\ \text{nebo}\qquad &\\ \psi &= \frac{r-a}{r}\Phi(r-a) - a\int\frac{\Phi(r-a)}{r^2}\,\mathrm{d}r. \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

To je rovnice hledané pevné čáry C_p; její určení vyžaduje tudíž jediné kvadratury.

A obráceně, jestliže se čára (13) kotálí po čáře (15), tu z podmínky kotálení plyne vztah

$$[1 + \varrho^2 \Phi'^2(\varrho)]\, d\varrho^2 = [1 + (r - a)^2 \Phi'^2(r - a)]\, dr^2,$$

který je hodnotami (14) splněn identicky: Pól soustavy, k níž je vztažena čára (13), popíše při kotálení kružnici.

Abychom rozhodli, zda jde o kotálení vnější nebo vnitřní, použijeme rovnic (1), jež jsou ekvivalentní s rovnicemi (4). Položíme-li v nich $x = r \cos\psi$, $y = r \sin\psi$ a použijeme-li rovnice (14), obdržíme

$$\left.\begin{aligned} X &= r \cos\psi - (r - a) \cos\nu_i, \\ Y &= r \sin\psi - (r - a) \sin\nu_i. \end{aligned}\right\}$$

Při naší volbě soustav souřadnic je však $\nu_i = \psi$ pro $i = 1, 2$, tudíž

$$X = a \cos\psi, \quad Y = a \sin\psi$$

čili $X^2 + Y^2 - a^2 = 0$, nezávisle na charakteru kotálení.

Také v případě kruhové kotálnice není počáteční poloha čar C_p a C_h libovolná; je dána první rovnicí (14): $r_0 = \varrho_0 + a$.

7. Jestliže při řešení otázky po kruhových kotálnicích zase předpokládáme, že je dána čára pevná místo čáry hybné, dojdeme k této úloze: *Dána pevná čára C_p, nalézt hybnou čáru C_h tak, aby kotálnicí K byla daná kružnice.*

Také touto poslední úlohou budeme se zabývat už jen stručně. Pevnou i pohyblivou soustavu souřadnic volme tak, jako v odst. 6. Platí tedy opět vztah (14); rovnice dané čáry C_p v pevné soustavě budiž

$$\psi = \Psi(r), \text{ takže } r' = \frac{1}{\Psi'(r)}.$$

Z podmínky kotálení $\varrho^2\, d\varphi^2 + d\varrho^2 = r^2\, d\psi^2 + dr^2$ obdržíme

$$d\varphi = \pm \frac{\varrho + a}{\varrho} \Psi'(\varrho + a)\, d\varrho$$

a integrací (omezíme-li se na jediné řešení a zvolíme-li vhodně polární osu)

$$\varphi = \int \frac{\varrho + a}{\varrho} \Psi'(\varrho + a)\, d\varrho. \tag{16}$$

To je rovnice hledané hybné čáry C_h.

V rovnicích (1) položme opět $x = r \cos\psi$, $y = r \sin\psi$, $r = \varrho + a$ a $\nu_i = \psi$ pro $i = 1, 2$; obdržíme

$$X = a \cos\psi, \quad Y = a \sin\psi,$$

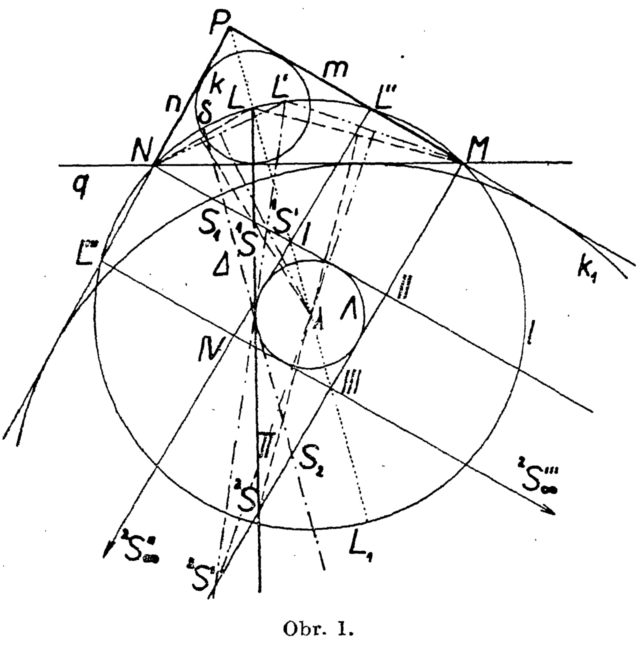
jako v předcházejícím odstavci. Výsledek není tudíž závislý na charakteru kotálení.

Remarque sur la théorie des roulettes. Dans cet article nous traitons du point de vue de la géometrie cinématique le probléme suivant: Étant donné un profil plan Π_1, déterminer un autre profil plan Π_2 de la manière, que la roulement de Π_1 suivant Π_2 (ou inversement) peut être réalisée par une simple translation suivant une ligne droite donnée ou bien par une simple rotation suivant un cercle donné. Nous démontrons à l'aide des équations convenablement choisies que nous appellons les conditions de position et celles du mouvement, que la résolution de tous ces problèmes est ramené à des quadratures.

PŘÍSPĚVEK K ŘEŠENÍ OVÁLU

Dr FRANTIŠEK KADEŘÁVEK, Praha.

Řešení oválu, sestávajícího ze dvou kruhových oblouků, které se navzájem dotýkají a dotýkají se daných přímek m, n v bodech M, N, provedeme takto (obr. 1): Trojúhelníku MNP vepišme kružnici k o středu L.



Obr. 1.

Body M, N, L veďme další kružnici l o středu λ, kol něhož opišme kružnici Λ, která se dotýká přímky Π, jdoucí bodem L kolmo ke spojnici M, N! Kolmice $N^1S \perp NP$ a $M^2S \perp MP$ vytyčují na Π středy dvou kružnic, které jdouce bodem L se v něm dotýkají a přímek m, n se dotýkají v bodech M, N. Jest tu totiž $\lambda^2S \perp LM$ a $M^2S \perp MP$ proto je