Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Antonín Pleskot

Poznámka k omezení os kuželoseček a k parabole Steinerově

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 50 (1921), No. 2-3, 193--196

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/109173

Terms of use:

© Union of Czech Mathematicians and Physicists, 1921

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://project.dml.cz

Z toho

$$p = \frac{262}{1000} = 0{\cdot}262.$$

Pak

$$\pi = 0{\cdot}262 \, . \left(\frac{3{\cdot}81}{1{\cdot}10}\right)^2 = 3{\cdot}1431$$

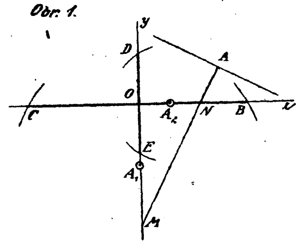
což je výsledek dosti příznivý. Doporučuji čtenáři, aby takový pokus sám provedl.

Poznámka k omezení os kuželoseček a k parabole Steinerově.

Napsal Dr. **Ant. Pleskot**, profesor v Plzni.

V praktických užitích často vyskytuje se úloha omeziti na osách kuželosečky délky poloos, dána-li kuželosečka polohou os a tečnou s bodem dotyčným.

Obr. 1.



Uvedeme zde jednoduchou konstrukci, jejíž odůvodnění přímo plyne z článku, jež jsem v předešlém ročníku tohoto časopisu pod nápisem, „konstrukce normál kuželoseček“, uveřejnil.

Normála v bodě A (obr. 1) kuželosečky protne jednu osu k. p. osu y, v bodě M. Je-li O střed kuželosečky a bod A_1 středem úsečky OM, pak kružnice k_1 ze středu A_1 poloměrem A_1A opsaná protne druhou osu t. j. osu x ve vrcholech B a C

Podobně protne-li normála osu x v bodě N a je-li A_2 střed úsečky ON, pak ze středu A_2 opsaná kružnice k_2 poloměrem A_2A protne osu y ve vrcholech E a D.

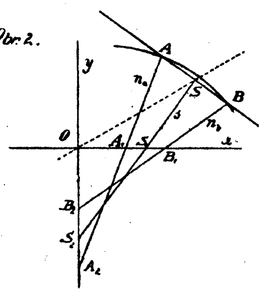
Je-li křivka hyberbolou, pak jedna z těchto kružnic protne příslušnou osu v imaginárních bodech. Je-li touto osou k. p. osa y a pořadnice imaginárních průsečíků $\pm ib$, pak délka

$$b = \sqrt{\overline{OA_2}^2 - \overline{A_2A}^2}$$

a jest délkou tečny z bodu O ke kružnici k_2 vedené.

Připojme ještě jednu poznámku k článku výše citovanému; dospějeme tak elementární úvahou k parabole Steinerově a její applikaci.

Obr. 2.



V článku tom z jisté obecné věty plynula tato zvláštní věta: Normály v libovolných dvou bodech A a B kuželosečky (obr. 2) vedené protínají osy x a y v bodech A_1, B_1 resp. A_2, B_2 a symetrála úsečky AB v bodech S_1 a S_2 a tu platí:

$$A_1S_1 = S_1B_1$$
$$A_2S_2 = S_2B_2.$$

Střed úsečky AB označme S.

Poněvadž parabola má tu vlastnost, že tečny její na dvou pevných tečnách vymezují řady podobné a poněvadž v našem případě

$$AS : SB = A_1S_1 : S_1B = A_2S_2 : B_2S_2 = 1 : 1$$

plyne z toho, že normála n_a bodu A, normála n_b bodu B, symetrála s úsečky AB, osa x a osa y jakož i přímka AB patří jako tečny téže parabole, která parabolou Steinerovou se nazývá.

K parabole Steinerově dospívá se obyčejně cestou jinou a sice na základě vět polárních.

Kdybychom naopak předpokládali znalost paraboly Steinerovy a jmenovitě tu její vlastnost, že k ní patří normály v bodech A a B, spojnice AB, její symetrála jakož i osy kuželosečky, pak věta, odniž jsme vyšli, že totiž normály v bodech A a B kuželosečky a symetrála spojnice AB vymezují na osách úsečky $A_1S_1 = S_1B_1$, plyne okamžitě z vlastnosti paraboly, že na dvou jejich tečnách vytínají tečny druhé řady podobné; neboť je-li AB jednou tečnou paraboly a druhou tečnou osa, pak, ježto $AS = SB$ jest i $A_1S_1 = S_1B_1$, poněvadž přímka SS_1 jest též tečnou paraboly. Že trojice n_a, n_b a symetrála s vytíná na ostatních tečnách paraboly trojici bodu A_1, B_1, S_1, hovících rovnici $A_1S_1 = S_1B_1$, jest samozřejmo.

Z věty této naopak plyne obecnější věta: Jsou-li na kuželo sečce dány dva pevné body A a B a třetí pohyblivý C, pak symetrály úseček AC a BC vymezují na osách úsečky téže délky. Protne-li totiž normála bodu A osu v bodě A_1, normála bodu B v bode B_1, normála bodu C v bodě C_1, symetrála úsečky AC v bodě S_1, symetrála úsečky CB v bodě S_2, tu platí:

$$S_1S_2 = S_1C_1 + C_1S_2 = A_1S_1 + S_2B_1,$$

a poněvadž $$S_1S_2 + A_1S_1 + S_2B_1 = A_1B_1,$$

jest $2\,S_1S_2 = A_1B_1$, t. j.

$$S_1S_2 = \frac{A_1B_1}{2},$$

kterážto veličina nezáleží na poloze bodu C.

Poznatky, které jsme si zjednali elementární úvahou o parabole Steinerově, stačí k užití této křivky a proto se o nich stručně zmíníme. Osy x a y kuželosečky stojí na sobě kolmo jakož i úsečka AB a symetrála její SS_1; proto přímka OS jest řídící přímkou této paraboly.

Jsou-li dány dva body kuželosečky s příslušnými normálami a je-li mimo to znám i střed kuželosečky, pak možno sestrojiti již osy kuželosečky. Jsou to tečny z počátku k parabole Steinerově vedené, jejíž řídící přímku známe a dvě tečny. Za tyto tečny možno vybrati si buď normály, neb symetrálu úsečky spojující dotyčné body aneb spojnici dotyčných bodů. Tečny z počátku vedené můžeme již elementárním způsobem vyrýsovati, poněvadž řídící přímku známe aneb možno použiti věty Brianchonovy. Tak můžeme rýsovati osy ellipsy, dány-li jsou dva sdružené průměry. Délku os omezíme způsobem shora uvedeným.

Zvláštní případ Steinerovy paraboly jest ten, jest-li že bod B nekonečně blízko se přibliží k bodu A; pak spojnice AB přejde v tečnu. Parabola jest pak stanovena čtyřmi tečnami, t. j. tečnou, normálou a osami kuželosečky. Dotyčný bod tečny na normále n_a jakožto tečně paraboly jest mezní bod, jemuž se blíží průsečík normály n_a a normály k této nekonečně blízké; jest tedy středem křivosti kuželosečky pro bod A. Lze tedy dle předchozího buď užitím řídící přímky aneb větou Brianchovou snadno narýsovati střed křivosti kuželosečky v daném jejím bodě.

O jednoduché polární vlastnosti kuželosečky.

A. Lochmann.

Kuželosečka je určena pěti podmínkami. Je-li dán pól a polára jemu příslušná, jsou tím dány dvě podmínky; proto tři póly s polárami by dávaly šest podmínek, čímž by kuželosečka byla přeurčena. Z toho plyne, že poláry tří bodů a tři body musí býti vázány nějakým vztahem. Skutečně je tomu tak, jak v dalším je ukázáno.

Buďtež dány tři libovolné póly P_1 (x_1, y_1), P_2 (x_2, y_2), P_3 (x_3, y_3) kuželosečky a p_1, p_2, p_3 buďtež příslušné jich poláry.

Označme spojnici pólu P_1 (P_2 resp. P_3) s průsečíkem polár p_2p_3 (p_3p_1 resp. p_1p_2) m_1 (m_2 resp. m_3) a obdobně průsečík poláry p_1 (p_2 resp. p_3) se spojnicí pólů P_2P_3 (P_3P_1 resp. P_1P_2) M_1 (M_2 resp. M_3).

Platí pak věty:

I. *Přímky m_1, m_2, m_3 jdou jedním bodem L.*

II. *Body M_1, M_2, M_3 leží na jediné přímce l.*

Důkaz:

I. Rovnice kuželosečky buď dána ve tvaru vrcholovém:

$$K \equiv y^2 = 2px + qx^2.$$