Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

Josef Žďárek

O degeneraci konstrukce os plochy kuželové v úlohu kvadratickou

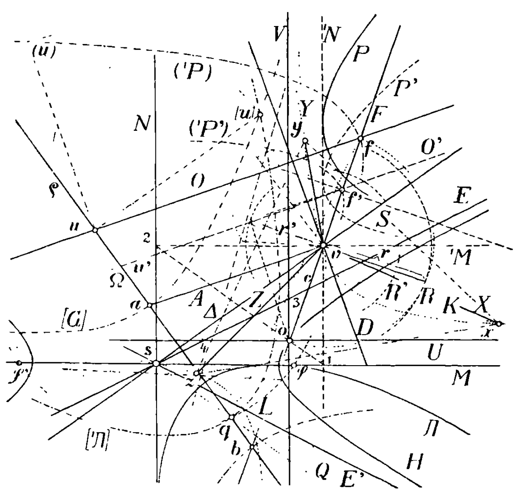
Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 51 (1922), No. 1, 17--23

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/109200

O degeneraci konstrukce os plochy kuželové v úlohu kvadratickou.

Josef Ždárek, assistent české techniky v Praze.

Kubickou tuto úlohu řešíváme vyhledáním průsečíků dvou kuželoseček — nejčastěji rovnoosé hyperboly, podstavné kuželosečky přesně vyrýsované aneb jakékoliv kuželosečky jiné — s kružnicí.



Obr. 1.

Jako problém normál kuželoseček, může i tento degenerovati. Ukážeme, že *existuje jistá,* na podstavné kuželosečce H závislá *plocha* **V** *té vlastnosti, že zvolíme-li na ní vrchol kužele, lze jeho osy sestrojiti kvadraticky.*

Budiž hyperbola H — o osách M, N, středu s, ohniskách φ, φ', asymptotách E, E' — podstavou kužele, jehož vrchol mějž v bodě v na průměru $\overline{vs} \equiv \varDelta$ svůj orthogonálný průmět na rovinu podstavnou (obr. 1); sestrojíme výšku r kužele tak, aby jeho vrchol padl na zmíněnou plochu V. Stopníky x, y, z os X, Y, Z hledaného kužele leží na Apollonické hyperbole K,*) jež prochází body v, s, má M, N za směry asymptot a přímku D — kolmou ku směru sdruženému k $\triangle$ vzhledem na hyperbolu H — za tečnu v bodě v. Veďme tímto bodem přímky ${}^1M \parallel M$, ${}^1N \parallel N$, čímž určen rovnoběžník $s\,1\,v\,2$; střed o hyperboly K leží na jeho úhlopříčně $\overline{12}$ a na přímce F, jdoucí bodem v a symmetrické k D vzhledem na ${}^1M$, ${}^1N$; asymptoty její $U \parallel M$, $V \parallel N$.**)

Stopy $\overline{xy}$, $\overline{xz}$, $\overline{yz}$ hlavních rovin kužele jsou tečnami paraboly Steiner-Pelzovy Π, již obdržíme jako křivku polárně sdruženou k hyperbole K vzhledem ke křivce základní H. Přímka $\triangle$ jest její řídicí přímkou, ohnisko její q leží na průměru Q křivky H symmetrickém ku $\triangle$ dle jejích os a na kružnici L vedené body v, φ, φ' †); osu její označme Ω. Ke konstrukci této paraboly nebylo třeba výšky kužele.

Zvolivše prozatím libovolnou pomocnou výšku r', opišme jí kol bodu v jako středu kružnici R'. Považujeme-li tuto za ideálný obraz imaginárné kružnice v poloměru $r'\sqrt{-1}$, bude příslušný trojúhelník $x'\,y'\,z'$ polárným trojúhelníkem této kružnice.††) Ježto body x', y', z' leží na hyperbole K, jsou strany tohoto trojúhelníka tečnami kuželosečky P' polárně sdružené ke křivce K vzhledem na imaginárnou kružnici R'. Středu kružnice jako bodu hyperboly přísluší přímka úběžná, tedy jest P' parabolou. Tečně D přísluší bod úběžný ve směru k ní kolmém, tedy jest osa O' paraboly kolmá ku D. Úběžným bodům hyperboly přísluší ${}^1M$, ${}^1N$ jako pár kolmých tečen paraboly, tedy jest D její řídicí přímkou. Ohnisko její leží — ježto přímky ${}^1M\;{}^1N\;D\;F$ jsou harmonické — na přímce F. Bodu o a úběžné přímce jako pólu a poláře hyperboly přísluší sdruženě přímka S a bod v jako polára a pól paraboly a ježto bod v leží na řídicí přímce, prochází S ohniskem f', pro něž tedy platí $\overline{vo}.\,\overline{vf'} = - r'^2$. *Strany trojúhelníka $x'\,y'\,z'$ jsou tedy společnými tečnami obou parabol P' Π* (čtvrtou tečnou jest ovšem přímka úběžná).

Měníme-li výšku r' kužele, mění se parabola P', avšak všechny takovéto paraboly mají společnou řídicí přímku D a ohniska jich leží na přímce F. *Lze vyhledati mezi nimi takovou, že možno jí a parabolou Π proložiti rotační kužele o společném vrcholu u; těmto kuželům možno sestrojiti společné roviny tečné* (což je úloha kvadratická) *a jich stopy budou pak společnými tečnami obou parabol.* Je-li P touto parabolou, f jejím ohniskem, bude příslušná hledaná výška r kužele střední geom. úměrnou úseků $\overline{ov}$, $\overline{vf}$.

---

*) Bedřich Procházka: „Vybrané statě z deskriptivní geometrie“, III. stať, odst. 38 a násl. Výsledky tam odvozené týkající se našich křivek K, Π, R, zde uvedeny jen stručně bez odůvodnění.

**) Nebo $\overline{13} \parallel \overline{24} \perp E$; $3 \equiv E \times V$, $4 \equiv E \times U$; body 3, 4 leží na asymptotách.

†) Tamtéž odst. 85.

††) Tamtéž odst. 40.

Konstrukce bodu f jest též úlohou kvadratickou. Vrcholy všech rotačních kuželů jdoucích danou parabolou vyplňují jak známo opět parabolu, s prvou shodnou, ležící v rovině kolmé k rovině paraboly prvé, mající vrchol v ohnisku této, a ohnisko v jejím vrcholu. Zobrazme takovéto křivky ${}^1\Pi$, ${}^1P'$ pro naše paraboly Π, P' a sklopme je kol os Ω, O' do nákresny do polohy $[{}^1\Pi]$, $({}^1P')$. Kdyby se tyto paraboly ${}^1\Pi$, ${}^1P'$ protínaly, byl by jich průsečík hledaným společným vrcholem obou rotačních kuželů; v tom případě příslušely by průsečnému bodu u' os Ω, O' v obou parabolách $[{}^1\Pi]$, $({}^1P')$ stejné pořadnice. Posouvá-li se bod f' po přímce F, vyplňují všechny paraboly ${}^1P'$ příslušné parabolám P' plochu kuželovou **P**, ku nákresně souměrnou, určenou bodem v jako vrcholem a parabolou ${}^1P'$; tento kužel má přímky F, $A \parallel O'$ za přímky obrysové a protíná rovinu ϱ paraboly ${}^1\Pi$ v hyperbole G, již sklopme též kol osy Ω do nákresny do polohy $[G]$. Tato má body $a = A \times \Omega$, $b = F \times \Omega$ za vrcholy, asymptoty najdeme obvyklým způsobem pomocí roviny vrcholem rovnoběžně k ϱ vedené a jejích průsečíků s parabolou ${}^1P'$. Křivky $[G]$, $[{}^1\Pi]$ mají společnou osu Ω, a proto lze průsečíky jich kvadraticky sestrojiti.*)

Je-li $[u]$ jedním z nich; veďme $[u]\,u \perp \Omega$ a bodem u osu $O \parallel O'$ hledané paraboly P**); ohnisko této f ležící na F určí s bodem o hledanou výšku kužele r. *A ježto pro tuto jest konstrukce společných tečen obou našich parabol kvadratickou, jest kvadratickou i konstrukce os plochy kuželové, určené zvolenou hyperbolou podstavnou H, zvoleným průmětem vrcholu do roviny podstavné, jejíž výšku však bylo třeba* (konstrukcí taktéž kvadratickou) *sestrojiti.* Buď u jest průmětem společného vrcholu obou rotačních kuželů proložených křivkami Π, P; $\overline{[u]\,u}$ jest vzdálenost tohoto bodu od průmětny. Myslíme-li si těmto kuželům vepsané koule o průměru $\overline{[u]\,u}$, budou se tyto dotýkati průmětny v bodech f, q a těmto koulím opsaný společný rotační kužel má v půlícím bodě c úsečky $\overline{f,\,q}$ vrchol; spojnice $\overline{u\,c}$ protíná nákresnu v bodě x, tak, že $\overline{u\,c} = \overline{c\,x}$, čímž jeden ze stopníků os nalezen. Jím vedené společné tečny parobol Π, P a jich tečna kolmá ku směru $\overline{v\,x}$ jsou stopami hlavních rovin kužele. —

Aby uvedeným způsobem sestrojená výška kužele r byla reálná, musí bod f padnouti nezbytně vzhledem k bodu v na opačnou stranu přímky F než bod o; proto průsečíky křivek $[G]$, $[{}^1\Pi]$ jež by připadly snad na druhou, bodem b jdoucí větev hyperboly, neměly by významu; při jiné volbě bodu v může se tato větev státi podstatnou.

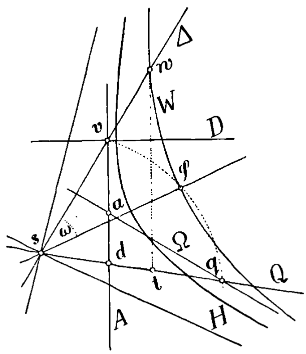
---

*) V. Jarolímek: „Základové geometrie polohy“ sv. III. str. 58 a násl., aneb téhož autora v „Rozpravách“ roč. 1898: „O prvcích dvojpřímkových...“; J. Melichar: „Sestrojení spol. bodů dvou kuželoseček...“ Časopis, roč. XLII. Konstrukce asymptot křivky G popsána níže.

**) Jsou-li π resp. p parametry parabol Π resp. P, platí $\overline{\pi\,uq} = \overline{p\,.\,uf}$ aneb sestrojíme-li kružnici průsečíkem u os a oběma jich vrcholy, leží ohniska obou na kružnici soustředné.

V obr. 1. zvolen bod v na průměru $\varDelta$, který neprotíná hyperbolu v reálných bodech. V tomto případě leží body a, q po různých stranách osy $\varDelta$, proto parabola [$^1\Pi$] nemůže padnouti celá dovnitř hyperboly [G], tedy naše úloha má vždy jedno reálné řešení, ač mohou připadnouti i na druhou větev hyperboly reálné průsečíky.

Jinak je tomu, je-li $\varDelta$ průměrem protínajícím hyperbolu základní H v bodech reálných. Zvolme (obr. 2) na $\varDelta$ bod v, zobrazme na příslušném souměrném průměru Q bod q na kružnici jdoucí body v, φ, φ', čímž, je-li e excentricitou hyperboly H, platí $\overline{sv}.\overline{sq} = e^2$.



Obr. 2.

Bod a na přímce $A \perp D$ padne nyní na tutéž stranu osy Ω vzhledem k přímce $\varDelta$ jako bod q. Přímka $A \equiv \overline{va}$ protínejž průměr Q v bodě d; ježto je poměr $\overline{sv}:\overline{sd}$ stálý, jest i součin $\overline{sd}.\overline{sq}$ stálý, tedy body q, d tvoří — pohybuje-li se bod v po přímce $\varDelta$ — na přímce Q involuci o středu s; její dvojné body t, ^1t promítněme ve směru A na přímku $\varDelta$ do bodů w, ^1w (body ^1t, ^1w nezobrazeny). Zvolen-li bod v mezi body w, ^1w, leží i bod d mezi body t, ^1t, tedy bod q jest dále od středu s než bod d a tím dále od osy $\varDelta$ než bod a, vrchol to křivky [G]. V tomto případě se křivky [G], [Π] (kteréž nyní nejsou stálé, nýbrž mění se se vzdáleností $\overline{sv}$) protínají a proto pro tento případ lze opět sestrojiti k bodu v příslušnou výšku kužele, jehož osy lze sestrojiti kvadraticky. Ovšem přihlížíme jen ku průsečíkům oné větve hyperboly [G], jež prochází bodem a.

Leží-li však průmět vrcholu kužele na průměru $\varDelta$ mimo úsečku $\overline{w\,{}^1w}$, nemůže pro žádnou reálnou výšku kužele naše degenerace nastati.

Body w, ${}^1w$ lze sestrojiti také — ježto je plocha trojúhelníka vsq stálá — jako průsečíky přímky Δ s tečnou kolmou ku D sestrojenou k hyperbole konfokalné s danou H a mající přímky Δ, Q za své asymptoty.

Sestrojíme-li pro všechny reálné průměry hyperboly H takovéto body w, ${}^1w$, obdržíme křivku W, kteráž bude obrysovou a spolu průsečnou křivkou plochy **V** s nákresnou.

Jsou-li a, b poloosy, e excentricita hyperboly H, ω odchylka jejího průměru Δ od reálné osy M, budou x, $x\ tg\ \omega$ souřadnice bodu w, a $\frac{e^2 \cos^2 \omega}{x}$, $-\frac{e^2}{x} \sin \omega \cos \omega$ bodu t. Vyjádříme-li odtud směrnici spojnice $\overline{wt}$, kteráž se též rovná $\frac{b^2 x}{a^2 y}$, obdržíme srovnáním, s ohledem na relaci $y = x . tg\ \omega$ jakožto rovnici křivky W výraz $b^2 x^4 - x^2 y^2 (a^2 - b^2) - x^2 (a^2 + b^2)\ b^2 - y^2 (a^2 + b^2) - y^4 = 0$ aneb v soustavě polárné

$$\varrho^2 = (a^2 + b^2) \frac{b^2 + a^2\, tg^2\, \omega}{b^2 - a^2\, tg^2\, \omega}.$$

Tato křivka má v počátku isolovaný dvojný bod, asymptoty hyperboly za své asymptoty, prochází ohnisky φ, φ' a leží celá (mimo dvojný bod) uvnitř hyperboly H. Je-li základní křivka rovnoosou hyperbolou, mění se též v hyperbolu rovnoosou.

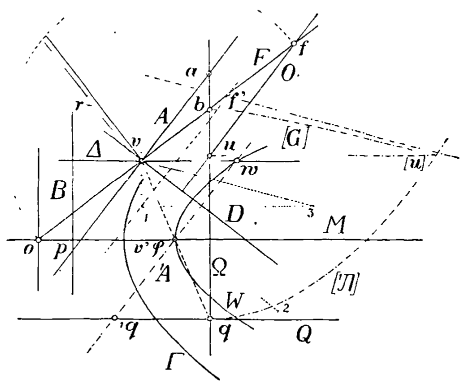
Ze specielních poloh uvažovaných útvarů povšimněme si pouze jediné. Kdyby s Δ sdružený průměr hyperboly H svíral s jejími osami úhel 45° bude $A \equiv F$, kužel **P** redukuje se v rovinu, křivka G v přímku; bude zde $a \equiv b \equiv u$. Bod f přímky $F \equiv O$ zobrazíme jako vrchol paraboly (${}^1P$) o ose O, kteréž přísluší v bodě u táž pořadnice jako parabole (${}^1\Pi$) a kteráž má bod $O \times D$ za střed křivosti. (Konstrukci lze provésti na př. podobností dle posléze uvedeného bodu.) Z obou řešení vezmeme ovšem jen onen vrchol f, který padne vzhledem k přímce D na opačnou stranu než bod o.

Je-li podstavnou křivkou *ellipsa* provedeme konstrukci výšky zcela obdobně jako při hyperbole. Jednodušší řešení dává však *podstava parabolická*.

Budiž parabola $\Gamma - o$ ose M, ohnisku φ, řídící přímce B, průsečík této s osou jest bod p podstavou kužele, kterýž dále jest určen průmětem v vrcholu do podstavy a jehož výšku r chceme sestrojiti tak, abychom uměli jeho osy sestrojiti kvadraticky (obr. 3).

Ohnisko q příslušné paraboly Steiner-Pelzovy leží na spojnici $\overline{v\varphi}$ tak, že $\overline{v\varphi} = \overline{\varphi q}$. Průměr Δ bodu v jest její řídící přímkou, osa M vrcholovou tangentou. Střed o Apollonické hyperboly leží na M; spusťme $\overline{vv'} \perp M$ a nanesme $\overline{v'o} = \overline{\varphi p}$ i co do směru. Ke přímce $\overline{ov}$ sestrojme bodem v dle osy M souměrnou přímku D

a k této kolmou A. (Obr. 3.) Zvolme na přímce $F = ov$ libovolný bod f' jako ohnisko paraboly polárně reciproké k Apollonické hyperbole vzhledem na imaginárnou kružnici o středu v a poloměru $= \sqrt{\overline{ov}.\overline{f'v}}$, kteráž má přímku D za přímku řídící; k této mysleme si sestrojenou parabolu, jež je geom. místem vrcholů rotačních kuželů jí procházejících. Tato spolu s bodem v určí plochu kuželovou **P**. Abychom mezi všemi s posléze uvedenou rovnoběžnými parabolami na tomto kuželi nalezli onu, která se v prostoru protíná s parabolou $^{1}\Pi$, — která je zase geom. místem vrcholů rotačních kuželů procházejících parabolou Steiner-Pelzovou — zobrazme prů-



Obr. 3.

sečnou křivku G tohoto kužele s rovinou paraboly $^{1}\Pi$; body a, b, v nichž přímky A, F protínají osu Ω paraboly Steiner-Pelzovy, jsou vrcholy křivky G. Abychom sestrojili její kol Ω do nákresny obklopené asymptoty, veďme $\overline{f1} \perp D$, 1 na $\overline{vv'}$ a sestrojme délku $\overline{12}$ pořadnice v podstatné parabole kužele **P**; dále veďme $\overline{13} \perp \overline{vv'}$, $\overline{13} = \overline{12}$, načež $\overline{v3}$ jest povrchovou přímkou zmíněného kužele do nákresny kol svého orthogonálného průmětu $\overline{v1}$ obklopenou a shledanou asymptotou rovnoběžnou.*) Pro naše řešení má pouze větev křivky G jdoucí bodem b význam. Tato protíná parabolu $^{1}\Pi$ v bodě u; přímka O — bodem u kolmo ku D sestrojená — jest průmětem hledané paraboly, jež se s parabolou $^{1}\Pi$ protíná, a její vrchol f jest ohniskem oné paraboly o řídící přímce D, jejíž společné tečny s parabolou Steiner-Pelzovou dovedeme kvadraticky sestrojiti a jež

*) Tato konstrukce stejně provedena v obr. 1.

bude křivkou polárně reciprokou k Apollonické hyperbole vzhledem na imaginárnou kružnici o poloměru $\sqrt{\overline{ov}.\overline{vf}}$. Pro tento poloměr jakožto výšku sestrojený kužel budou ony společné tečny stopami jeho hlavních rovin.

Kdyby se bod v pohyboval po přímce $\varDelta$, posunovaly by se přímky A, F, D rovnoběžně. Dospěl-li bod v do polohy w takové, že příslušná přímka ${}^1A$ / A prochází bodem φ, dotknou se stejně jako dříve sestrojené křivky G, ${}^1II$ v bodě ${}^1q$, příslušném to ohnisku Steiner-Pelzovy paraboly. Pro body přímky $\varDelta$ na pravo (v našem obraze 3.) od bodu w naše degenerace nastati nemůže. Bod w jest průsečíkem průměru $\varDelta$ dané paraboly Γ se sdruženou, ohniskem procházející tetivou. Odtud snadno lze odvoditi křivku, která jest geometrickým místem těchto bodů a tedy řezovou křivkou plochy **V** s nákresnou jakožto parabolu W, s podstavou Γ souosou, jdoucí jejím ohniskem a mající poloviční parametr.

O dvojrohu.

Napsal Dr. *Vladimír Mašek*, prof. vys. školy zemědělské v Brně.

V článku tomto uvažovati budeme dvojroh co průmět průsečné křivky určitého přímého konoidu 5. stupně s rovinou jdoucí jistou jeho povrchovou přímkou. Osou konoidu budiž přímka o ležící v průmětně π (obr. 1.) a za řídící křivku volme křivku $\varkappa$, ležící v rovině totožnosti a orthogonálně affinní k cissoidě Diokletově ležící v nárysně, jejíž asymptota a se ztotožňuje s osou x. Označme r poloměr základní kružnice k zvolené cissoidy Diokletovy a spusťme z bodu vratu Q řídící křivky konoidu kolmici b k průmětně π. Budiž zde uvedeno, že konoid takto stanovený jest geometrickým místem vrcholů všech ∞^2 hyperbolických paraboloidů mimoběžkami a a b procházejících.*)

Označme A a B průsečíky osy o s mimoběžkami a resp. b a jmenujme rovinu γ kolmou ku ose o a procházející půlícím bodem G úsečky $\overline{AB}$ rovinou centrálnou. Z vytvoření konoidu plyne přímo, že rovina γ obsahuje dvě jeho k sobě kolmo stojící povrchové přímky. Označme je g a g'. Sestrojme nárysný průmět průsečné křivky ε konoidu s libovolnou rovinou σ jdoucí přímkou g. Průmět půdorysný p_1 povrchové přímky p konoidu obdržíme,

*) *Dr. J. Klobouček*: Methodické poznámky ku theorii komplexu A^2. Rozpravy České Akademie r. 1905. O komplexu os ploch 2 st., které procházejí dvěma reálnými mimoběžkami. Třicátá roční zpráva karlínské reálky.

Dr. V. Šimandl: O určitém konoidu stupně pátého. Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky. Ročník XLII.

Dr. M. Lerch: Poznámky o soustavě paraboloidů, procházejících dvěma danými mimoběžkami atd. Časopis pro pěstování mathem. a fys. Roč. XLVI.