Matyáš Lerch

O stanovení součinitelů v mocninném rozvoji funkce $\zeta(s)$

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 43 (1914), No. 5, 513--522

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/109217

O stanovení součinitelů v mocninném rozvoji funkce $\zeta(s)$.

Sdílí **M. Lerch** v Brně.

Funkce $R(w, s)$ definovaná prvkem

$$R(w, s) = \sum_0^\infty \frac{1}{(w+\nu)^s}$$

konvergentním pro hodnoty s, jichž reálná část převyšuje jednotku, dá se vyjádřiti tvarem

$$R(w, s) = \frac{1}{(s-1)\, w^{s-1}} + \frac{1}{2w^s}$$

$$+ \sum_{\nu=1}^{p} (-1)^{\nu-1} \frac{B_\nu}{2\nu} \binom{s+2\nu-2}{2\nu-1} \frac{1}{w^{s+2\nu-1}} + \omega_p(w, s), \tag{1}$$

kde zbytek je dán integrálem (B_ν značí Bernoulliova čísla)

$$\omega_p = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty e^{-wx} x^{s-1}\, dx \left(\frac{1}{1-e^{-x}} - \frac{1}{x} - \frac{1}{2} \right.$$

$$\left. - \sum_{\nu=1}^{p} (-1)^{\nu-1} \frac{B_\nu}{(2\nu)!} x^{2\nu-1} \right).$$

Tento integrál konverguje, jakmile Real. $s > -2p - 1$, a tudíž podává současně identita (1) rozšíření oblasti funkce R proměnné s, která dle toho má vlastnost, že rozdíl

$$R(w, s) - \frac{1}{s-1}$$

je celistvá transcendenta. Při tom se omezujeme na hodnoty w reálné a kladné.

Vzorec (1) není nic jiného než zvláštní případ známého vzorce vedoucího k Eulero Maclaurinovu vzorci summačnímu.*)

„Riemannovu" funkci $\zeta(s)$

$$\zeta(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s}$$

lze psáti

$$\zeta(s) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^s} + R(n, s),$$

a ocení-li se pro veliká n hodnota $R(n, s)$ pomocí vzorce (1) s vynecháním zbytku ω_p, máme

$$\zeta(s) = \lim_{n=\infty} \left\{ \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^s} + \frac{1}{(s-1)\, n^{s-1}} + \frac{1}{2n^s} \right.$$

$$\left. + \sum_{\nu=1}^{p} (-1)^{\nu-1} \frac{B_\nu}{2\nu} \binom{s+2\nu-2}{2\nu-1} \frac{1}{n^{s+2\nu-1}} \right\}. \tag{2}$$

Tato limita je stejnoměrně konvergentní v každé konečné části komplexní roviny (s), a dle známé věty Weierstrassovy obdrží se derivace její derivováním výrazu za znamením limity, také pro derivace na místě $s = 1$, odečte-li se dříve na obou stranách výraz $\frac{1}{s-1}$.

Klademe-li tedy

$$\zeta(s) - \frac{1}{s-1} = \sum_{0}^{\infty} (-1)^m \frac{c^m}{m!} (s-1)^m,$$

obdržíme dle (2)

$$c_m = \lim_{n=\infty} \left\{ \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} (\log k)^m + \frac{1}{2n} (\log n)^m \right.$$

$$\left. - \frac{1}{m+1} (\log n)^{m+1} + \Phi_m(n) \right\}, \tag{3}$$

kde

$$\Phi_m(n) = (-1)^m \sum_{\nu=1}^{p} (-1)^{\nu-1} \frac{B_\nu}{2\nu n^{2\nu}} D^m_{s=1} \left[\binom{s+2\nu-2}{2\nu-1} \frac{1}{n^{s-1}} \right].$$

*) Srov. naše Další studie v oboru Malmsténovských řad, kap. II., č. 2, str. 24 až 27. (Rozpravy české Akademie císaře Františka Josefa pro vědy, slovesnost a umění, třída II., roč. III., č. 28, 1894).

Znamenáme-li pak obecně (racionální číslo)

$$D_{s=1}^{m}\binom{s+\mu-1}{\mu}=(m,\ \mu), \tag{4}$$

bude

$$D_{s=1}^{m}\left[\binom{s+2\nu-2}{2\nu-1}\frac{1}{n^{s-1}}\right]$$

$$=\sum_{\alpha=0}^{m}(-1)^{m-\alpha}\binom{m}{\alpha}(log\ n)^{m-\alpha}\ (\alpha,\ 2\nu-1)$$

a tak se objeví

$$\Phi_m(n)=\sum_{\nu=1}^{p}(-1)^{\nu-1}\frac{B_\nu}{2\nu n^{2\nu}}\sum_{\alpha=0}^{m}(-1)^{\alpha}\binom{m}{\alpha}(log\,n)^{m-\alpha}(\alpha,\ 2\nu-1),$$

t. j. po obrácení pořádku sčítání

$$\Phi_m(n)=\sum_{\alpha=0}^{m}(-1)^{\alpha}\binom{m}{\alpha}(log\,n)^{m-\alpha}\sum_{\nu=1}^{p}(-1)^{\nu-1}\frac{B_\nu}{2\nu n^{2\nu}}(\alpha,\ 2\nu-1). \tag{5}$$

Konvergence limity (3) je tím rychlejší, čím větší jest číslo p, ale pro velká p třeba nicméně vzíti přiměřeně veliká n, aby sblížení bylo uspokojivé; užitečnější jest věděti, jak velikého sblížení se docílí při poměrně malých hodnotách n a p; tu možno ukázati, že na př. pro $p=4$, $n=5, 6, \ldots$ docílíme již hodnot na více než osm míst správných.

Poněvadž

$$\lim_{n=\infty}\Phi_m(n)=0,$$

platí již

$$c_m=\lim_{n=\infty}\left\{\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}(log\ k)^m+\frac{1}{2n}(log\ n)^m-\frac{1}{m+1}(log\ n)^{m+1}\right\}, \tag{3^0}$$

ale přítomnost $\Phi_m(n)$ ve vzorci (3) činí jej právě cenným u přirovnání se vzorcem (3⁰), který je čistě platonickým.

Ještě zdlouhavěji konverguje limita vznikající vynecháním členu

$$\lim_{n=\infty}\frac{(log\ n)^m}{2n}=0,$$

kterou podal Stieltjes*).

---

*) Correspondance d'Hermite et de Stieltjes, publiée par les soins de B. Baillaud et H. Bourget. Paris 1905. Str. 151 a násl.

Aby se výpočet dal uskutečniti, třeba ještě znáti čísla (m, μ), definovaná vzorcem (4). Ta se mohou určiti ovšem přímo, ale je pohodlné vyjádřiti je jako součinitele jistých řad.

Rovnici (4) možno psáti

$$(m, \mu) = (-1)^{\mu} D^m_{s=1} \binom{-s}{\mu},$$

a odtud máme pro

$$L_m \doteq \sum_{\mu=0}^{\infty} (m, \mu)\, x^{\mu} \tag{6}$$

výraz

$$L_m = D^m_{s=1} \sum_{0}^{\infty} (-1)^{\mu} \binom{-s}{\mu} x^{\mu} = D^m_{s=1}\, log\, (1-x)^{-s},$$

t. j.

$$L_m = \frac{[-log\,(1-x)]^m}{1-x}. \tag{7}$$

Odtud vychází vztah rekurrentní

$$(1-x)\, L_{m+1}(x) = (m+1) \int_0 L_m(x)\, dx. \tag{8}$$

Máme pak postupně

$$L_0 = \sum_0^{\infty} x^{\mu}, \quad (1-x)\, L_1 = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \ldots$$

$$L_1 = x + 1\tfrac{1}{2}\, x^2 + 1\tfrac{5}{5}\, x^3 + 2\tfrac{1}{12}\, x^4 + 2\tfrac{17}{60}\, x^5 + 2\tfrac{9}{20}\, x^6 + 2\tfrac{83}{140}\, x^7 + \ldots$$

$$L_2 = x^2 + 2x^3 + 2\tfrac{11}{12}\, x^4 + 3\tfrac{3}{4}\, x^5 + 4\tfrac{23}{45}\, x^6 + 5\tfrac{19}{90}\, x^7 + \ldots$$

$$L_3 = x^3 + 2\tfrac{1}{2}\, x^4 + 4\tfrac{1}{4}\, x^5 + 6\tfrac{1}{8}\, x^6 + 8\tfrac{7}{120}\, x^7 + \ldots$$

$$L_4 = x^4 + 3x^5 + 5\tfrac{5}{6}\, x^6 + 9\tfrac{1}{3}\, x^7 + \ldots$$

$$L_5 = x^5 + \tfrac{7}{5} x^6 + \tfrac{23}{3} x^7 + \ldots$$

$$L_6 = x^6 + 4x^7 + \ldots$$

Dle toho znějí vzorce (5) pro první hodnoty m

$$\Phi_1(n) = log\, n \sum_1^p (-1)^{\nu-1} \frac{B_\nu}{2\nu n^{2\nu}} - \left[\frac{B_1}{2n^2} - \frac{B_2}{4n^4} \cdot \tfrac{11}{6} + \frac{B_3}{6n^6}\, \tfrac{137}{60} - \frac{B_4}{8n^8}\, 2\,\tfrac{83}{140} + \ldots\right],$$

$$\Phi_2(n) = (log\, n)^2 \sum (-1)^{\nu-1} \frac{B_\nu}{2\nu n^{2\nu}} - 2\, log\, n \left[\frac{B_1}{2n^2} - \frac{B_2}{4n^4}\, \tfrac{11}{6} + \frac{B_3}{6n^6}\, \tfrac{187}{60} - \frac{B_4}{8n^8}\, 2\,\tfrac{83}{140} + \ldots\right] + \left[\frac{B_2}{4n_4} \cdot 2 - \frac{B_3}{6n^6}\, 3\tfrac{3}{4} + \frac{B_4}{8n^8}\, 5\,\tfrac{19}{90} - \ldots\right]$$

Dalšího zjednodušení výsledku se docílí zavedením označení

$$T_\alpha = \sum_{\nu=1}^{p} (-1)^{\nu-1} \frac{B_\nu}{2\nu n^{2\nu}} (\alpha,\ 2\nu - 1), \tag{9}$$

$$T_0 = \frac{B_1}{2n^2} - \frac{B_2}{4n^4} + \frac{B_3}{6n^6} - \frac{B_4}{8n^8} + \dots$$

$$T_1 = \frac{B_1}{2n^2} - \tfrac{11}{6} \frac{B_2}{4n^4} + \tfrac{137}{60} \frac{B_3}{6n^6} - 2\tfrac{83}{140} \frac{B_4}{8n^3} + \dots,$$

$$T_2 = -2 \frac{B_2}{4n^4} + 3\tfrac{3}{4} \frac{B_3}{6n^6} - 5\tfrac{19}{90} \frac{B_4}{8n^8} + \dots$$

$$T_3 = -\frac{B_2}{4n^4} + 4\tfrac{1}{4} \frac{B_3}{6n^6} - 8\tfrac{7}{120} \frac{B_4}{8n^8} + \dots$$

$$T_4 = 3 \frac{B_3}{6n^6} - 9\tfrac{1}{3} \frac{B_4}{8n^8} + \dots$$

$$T_5 = \frac{B_3}{6n^6} - \tfrac{23}{3} \frac{B_4}{8n^8} + \dots$$

$$T_6 = -4 \frac{B_4}{8n^8} + \dots$$

$$T_7 = -\frac{B_4}{8n^8} + \dots$$

. . . .

Vzorec (5) se pak píše

$$\Phi_m(n) = (\log n)^m\, T_0 - \binom{m}{1} (\log n)^{m-1}\, T_1 + \binom{m}{2} (\log n)^{m-2}\, T_2 - \binom{m}{3} (\log n)^{m-3}\, T_3 + \dots \tag{5*}$$

Rozhodneme-li se pro jisté n, na př. $n = 10$, vypočteme veškerá T_ν, načež se s indexem m mění jen exponenty u $\log n$ a součinitelé binomiální.

Volíme-li $n = 10$, možno upraviti výpočet takto:

Počítáme postupně členy

$$\frac{B_1}{2n^2} = \frac{10^{-2}}{12},\quad -\frac{B_2}{4n^4} = -\frac{10^{-5}}{12},\quad \frac{B_3}{6n^6} = \frac{10^{-6}}{12 \,.\, 21},$$
$$-\frac{B_4}{8n^8} = -\frac{10^{-9}}{2 \,.\, 12},$$

což odpovídá volbě $p = 4$ a dává 11 neb 12 míst.

Takto vypočteme pro $n = 10$

$$
\begin{aligned}
T_0 &= 0{\cdot}00083\,25039\,26\\
T_1 &= 0{\cdot}00083\,18146\,05\\
T_2 &= -0{\cdot}00000\,16521\,28\\
T_3 &= -0{\cdot}00000\,08168\,04
\end{aligned}
$$

$$T_4 = \frac{11426}{10^{12}},\quad T_5 = \frac{3649}{10^{12}},$$

$$T_6 = -\frac{167}{10^{12}},\quad T_7 = -\frac{42}{10^{12}}.$$

Vzorec (3) pak dává sblíženou hodnotu ($n = 10$)

$$
\left.
\begin{aligned}
c_m &\doteq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} (\log k)^m + \frac{1}{2n} (\log n)^m - \frac{(\log n)^{m+1}}{m+1} + \Phi_m,\\
\Phi_m &= T_0 (\log n)^m - \binom{m}{1} T_1 (\log n)^{m-1}\\
&\quad + \binom{m}{2} T_2 (\log n)^{m-2} - \ldots + (-1)^m T_m.
\end{aligned}
\right\} \quad (10)
$$

Hodnota c_0 je známa, totiž t. zv. číslo Eulerovo a Mascheroniovo (na 8 míst redukované)

$$c_0 = 0{\cdot}57721566.$$

Pro hodnoty c_ν ($\nu = 1, \ldots 4$) jsem vypočetl, užívaje hodnot přirozených logarithmů čísel od 2 do 10 omezených na osm míst, následující čísla

$$
\begin{aligned}
c_1 &= -0{\cdot}0728158\\
c_2 &= -0{\cdot}0096904\\
c_3 &= 0{\cdot}0020538\\
c_4 &= 0{\cdot}0023254.
\end{aligned}
$$

Tyto výsledky shodují se s čísly, jež složitým způsobem získal *J. P. Gram* (Akad. Kodaňská, květen 1895) na šestnáct míst. Dle něho jest

$$\frac{c_{14}}{14!} = -\frac{24}{10^{16}},$$

tedy sblíženě

$$c_{14} = -0{\cdot}000210.$$

Že mocninný rozvoj funkcí $\zeta(s)$ a $R(w, s)$ podle $s - 1$ je stále konvergentní, plyne z toho, že

$$R(w, s) - \frac{1}{s-1}$$

je celistvá transcendenta. Důkaz ustavičné konvergence řady

$$\sum_0^\infty \frac{c_m}{m!}(1-s)^m,$$

v níž koefficienty definovány limitním vzorcem

$$c_m = \lim_{n=\infty}\left(\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(\log k)^m}{k} - \frac{(\log n)^{m+1}}{m+1}\right),$$

by měl pro theorii funkce $\zeta(s)$ význam teprve v případě, kdyby z jiného pramene bylo známo, že tyto konstanty c_m jsou derivace funkce $\zeta(s) - \frac{1}{s-1}$ na místě $s = 1$; beze zjištění tohoto fakta nemá tato konvergenční otázka vůbec ceny. Ostatně je sporno, je-li možno vésti řádný důkaz této konvergence prostředky podstatně jednoduššími, než jsou ony, jež zjišťují analytickou povahu funkce $\zeta(s)$. Úvahy, jež jsou této otázce věnovány na str. 33. roč. 39. tohoto Časopisu, příslušný důkaz nepodávají, jsouce založeny na mylném předpokladu.

Funkce

$$\varphi(x) = \frac{(\log x)^m}{x}$$

má derivaci

$$\varphi'(x) = \frac{m - \log x}{x^2}(\log x)^{m-1},$$

a tedy $\varphi(x)$ roste pro $1 \leqq x < e^m$, klesá pak od $x = e^m$ počínaje; její maximum obnáší

$$\varphi(e^m) = \left(\frac{m}{e}\right)^m.$$

Rozdíl

$$\sum_{k=2}^{r}\frac{(\log k)^m}{k} - \frac{[\log(r+1)]^{m+1}}{m+1}$$

v případě $m = 5$, $r = 9$ obnáší $-3{\cdot}1723$ a není obsažen v mezích

$$-\frac{(log\ 2)^{m+1}}{m+1} \text{ a } \frac{(log\ 2)^m}{2} - \frac{(log\ 2)^{m+1}}{m+1},$$

jak by měl dle úvah na u. m. podaných.

Jiný prostředek pro výpočet funkce $\zeta(s)$ a jejích derivací podává známá identita Eulerova

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu x^\nu = \sum_{\nu=0}^{\infty} \Delta^\nu c_0 \cdot \frac{x^\nu}{(1-x)^{\nu+1}},$$

v níž

$$\Delta c_\mu = c_{\mu+1} - c_\mu, \quad \Delta^2 c_\mu = \Delta c_{\mu+1} - \Delta c_\mu, \ldots$$

Tato platí pro dosti malá x, a pravá strana často dává propagaci funkce za obor původní konvergence.

Zejména pro

$$c_\nu = \frac{1}{(w+\nu)^s}, \quad w > 0,$$

bude řada na pravé straně konvergentní pro $x = -1$, čímž vychází pro funkci

$$f(w, s) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{(w+\nu)^s}$$

rozvoj

$$f(w, s) = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu \frac{\Delta^\nu w^{-s}}{2^{\nu+1}}, \quad \Delta w = 1, \quad w > 0. \tag{11}$$

O tomto snadno se ukáže, že konverguje v celé rovině komplexní proměnné s. Pro $w = 1$ to dává

$$f(s) = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu \frac{(\Delta^\nu w^{-s})_{w=1}}{2^{\nu+1}}, \tag{12}$$

kde

$$f(s) = \sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu-1}}{\nu^s} = (1-2^{1-s})\,\zeta(s). \tag{12^1}$$

Známe-li koefficienty v řadě

$$f(1+\sigma) = A_0 - A_1\sigma + \frac{A_2}{2!}\sigma^2 - \frac{A_3}{3!}\sigma^3 + \ldots,$$

obdržíme odtud snadno koefficienty pro funkci

$$\zeta(1+\sigma) = \frac{f(1+\sigma)}{1-2^{-\sigma}}.$$

Pro veličiny A_m pak nám (12) podá

$$A_m = \sum_0^\infty (-1)^\nu \frac{1}{2^{\nu+1}} \left\{ \Delta^\nu \frac{(log\, w)^m}{w} \right\}_{w=1};$$

tyto řady však konvergují sice absolutně, ale příliš zvolna, a nejsou v praxi potřebny. Můžeme však provésti rozklad

$$f(s) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k-1}}{k^s} + (-1)^{n-1} f(n, s),$$

což vzhledem k (11) podává

$$A_m = \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k-1} \frac{(log\, k)^m}{k} + (-1)^{n-1} \sum_0^\infty (-1)^\nu \frac{1}{2^{\nu+1}} \Delta_n^\nu \frac{(log\, n)^m}{n},$$

kterýžto vzorec je způsobilý k číselnému počítání, zvolíme-li na př. $n = 15$.

Poznamenejme zvláště, že dle známých vlastností funkce ζ plyne z (12[1])

$$A_0 = log\, 2, \quad -A_1 = log\, 2\, (C - \tfrac{1}{2} log\, 2) = 0{\cdot}159868889,$$

kde

$$C = -\Gamma'(1) = 0{\cdot}57721566$$

je konstanta Eulerova.

Rovnice (12) lze užiti k číselnému počítání; na př. pro $s = 0$ máme již $\Delta w^{-s} = 0$, a tedy

$$f(0) = \frac{1}{2}, \quad \zeta(0) = \frac{f(0)}{1-2} = -\frac{1}{2};$$

$$f(-1) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}, \quad \zeta(-1) = \frac{f(-1)}{1-2^2} = -\frac{1}{12},$$

$$f(-2) = \frac{1}{2} - \frac{3}{2^2} + \frac{2}{2^3} = 0, \quad \zeta(-2) = 0.$$

Je známo a lze velmi jednoduchými prostředky ukázati že obecně $\zeta(-2n) = 0$, což zde dává identitu

$$\sum_{\nu=0}^{2n} (-1)^\nu \frac{1}{2^\nu} \Delta^\nu 1^{2n} = 0,$$

dále jest

$$\zeta(-2n+1) = (-1)^n \frac{B_n}{2n},$$

což dává ve spojení s (12) pro číslo Bernouilliovo B_n

$$(-1)^{n-1}\frac{B_n}{2n}(2^{2n}-1)=\sum_{\nu=0}^{2n-1}(-1)^{\nu}\frac{1}{2^{\nu+1}}\Delta^{\nu}\,1^{2n-1}.$$

Máme tak známou větu z theorie čísel, že výrazy

$$L_n=(-1)^n\,2^{2n}\,(2^{2n}-1)\frac{B_n}{2n}$$

jsou čísla celistvá,

$$L_n=-\sum_{\nu=0}^{2n-1}(-1)^{\nu}\,2^{2n-\nu-1}\Delta^{\nu}\,1^{2n-1},$$

odkudž vidíme, že pro kmenný modul p

$$L_n\equiv L_{n+k\frac{p-1}{2}}\pmod{p},$$

jak se v učebnicích složitějšími prostředky ukazuje.

Na př. $p=5$ dává

$$L_{2k+n}\equiv L_n.$$

a tedy

$$L_{2k}\equiv 2,\quad L_{2k+1}\equiv -1\quad (\text{mod. } 5.)$$

Hodnoty

$$B_1=\tfrac{1}{6},\quad B_2=\tfrac{1}{30},\quad B_3=\tfrac{1}{42},\quad B_4=\tfrac{1}{30}$$

dávají

$$L_1=-1,\quad L_2=2,\quad L_3=-16,\quad L_4=16\,.\,17.$$

Pro $p=7$ máme

$$L_{3k+n}\equiv L_n,\quad \text{tedy}\quad L_4\equiv L_1\quad (\text{mod. } 7.);$$

skutečně jest

$$L_4-L_1=16\,.\,17+1$$

dělitelno 7. Pro $p=3$ vychází

$$L_n+1\equiv 0\quad (\text{mod. } 3.).$$