Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Ladislav Seifert

Studie o řadách Laméových vytvořených cyklidami Dupinovými

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 43 (1914), No. 3-4, 350--359

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/109242

váme s přesností jistě 8-ciferní tento výsledek dle (20)

$$\frac{\pi}{8} \cdot \frac{(A+B)^2 - 2(A_1 - B_1)^2}{A_3},$$

kde

$$A_1 = \frac{A+B}{2}, \quad B_1 = \sqrt{AB}, \quad A_2 = \frac{A_1 + B_1}{2},$$

$$B_2 = \sqrt{A_1 B_1}, \quad A_3 = \frac{A_2 + B_2}{2};$$

obdobnou pak formuli (obsahující přirozené logarithmy) i v případě, že $k > \frac{1}{\sqrt{2}}$, obdržíme z (32).

Studie o řadách Laméových vytvořených cyklidami Dupinovými.

L. Seifert, professor reálky v Praze-I.

Tvoří-li tři řady ploch system třikráte orthogonální, jest každá plocha jedné z těchto řad protata plochami ostatních dvou řad v obou systemech čar křivosti (*theorèm Dupinův*). Dle Darbouxa zoveme pak *řadou Laméovou* takovou řadu ploch, jež může býti součástí systemu třikráte orthogonálního. S hlediska geometrického nejvíce zajímavosti poskytují řady vytvořené cyklidami Dupinovými důsledkem té okolnosti, že čáry křivosti obou systemů jsou kruhové. Theorie těchto řad, dík slavným pracím Darbouxovým, Haagovým a Demoulinovým (Comptes Rendus 147, 148) jest již téměř ukončena, ale výsledky její, získané počtem infinitesimálním, jsou takové, že takřka nabádají k tomu, aby se odvodily též způsobem čistě geometrickým. O to pokusil jsem se v této práci užívaje centrální projekce prostoru čtyrrozměrného na obyčejný prostor trojrozměrný. Tak úplně bez počtu lze odvoditi všechny známé věty a vnitřní souvislost jejich stává se zde ještě patrnější, než jest počtem vůbec možno.

Zejména však zajímavým se zdá odvození systemu třikrát orthogonálního složeného vesměs z cyklid Dupinových a způsob, jakým se zde dospěje k transformaci Ribacourově.

Uvádím pouze nejhlavnější věci a odkazuji toho, kdo by snad ostatní detaily touto methodou chtěl si doplniti, na citovaná pojednání a slavné dílo Darbouxovo „Leçons sur les systèmes orthogonaux“.

I.

V prostoru čtyřrozměrném R^4 buď dána koule třírozměrná K^3. Zvolme na ní bod C a sestrojme v bodě diametrálně protilehlém tečný prostor R. Tečný prostor bodu C buď R^r.

Libovolnému bodu P prostoru R^4 náleží polární prostor (P), který seče K^3 ve dvojrozměrné kouli, jež se z bodu C promítá stereograficky na R opět jako koule. Průmět bodu P do R jest jejím středem. Takto jsou body prostoru R^4 a koule prostoru R navzájem jednoznačně přiřaděny.

Pohybuje-li se P po přímce p v R^4, opisuje polární prostor (P) svazek kol polární roviny π. Kruh průsečný roviny π s K^3 promítne se stereograficky opět jako kruh, přímka p jako jeho *osa* a průseky přímky p s K^3 — body A, B — jako jeho *ohniska* (koule o poloměru nullovém, které jím procházejí) Tak jsou přiřaděny přímkám prostoru R^4 kruhy v prostoru R.

Rovinám v R^4 odpovídají dvojiny bodové v R.

Buď T libovolný bod na K^3 a tečný prostor jeho ať seče R v rovině τ. Pak dle známé vlastnosti stereografické centrální projekce průmět celého svazku (T) shoduje se se svým otočením kol τ do R, t. j. *stereografická projekce jest isogonální*[1]).

Jsou-li body P, Q polárně sdruženy dle K^3, jsou příslušné koule orthogonální, jsou-li P a přímka p neb přímky p, q polárně sdruženy, jsou koule (P) s kruhem (p) neb kruhy (p), (q) orthogonální.

Nalézají-li se přímky p, q v témž prostoru tečném, mají kruhy (p), (q) jeden bod společný (průmět jeho bodu dotyku). Jsou-li p, q v jedné rovině, sekou se kruhy ve dvou bodech.

Opisuje-li P v R^4 křivku V, obaluje koule (P) plochu, tečnám odpovídají kružnice, ve kterých sekou se dvě sousední koule, oskulačním rovinám odpovídají dvojiny bodové, ve kterých

[1]) Srovnej též: H. de Vries, Centralprojektion im 4dimensionalen Raume.

sekou se tři po sobě následující koule, prostorům určeným čtyřmi po sobě jdoucími body jest přiřaděn pól P' ke K^3. P' opisuje křivku V'. Průměty obou křivek V a V' do R jsou nyní v tom vztahu, že bodu P na jedné přiřaděn P' na druhé a tečna v jednom jest kolmá k oskulační rovině v druhém.

Nalézá-li se P na ploše dvojrozměrné V, obalují koule plochu anallagmatickou; tuto lze také vytvořiti dvojinami bodovými, které jsou přiřaděny tečným rovinám plochy V. Plocha V promítá se do R jako její deferenta. Probíhá-li P kuželosečku, obalí koule cyklidu o 2 bodech dvojných, dotýká-li se tato kuželosečka koule K^3 ve dvou bodech — A, B — dostaneme *cyklidu Dupinovu*. A, B promítnou se jako dvojné body. Prochází-li rovina této kuželosečky bodem C, dostaneme *cyklidu rotační*, přejde-li A do C, *rotační kužel.*

II.

Rovina α v prostoru R^4 nechť obsahuje kuželosečku α, která kružnice (K^3, α) dotýká se dvakrát v bodech A, B. Jejich spojnice buď a. Příslušná cyklida D. jest obálkou koulí, jež přiřaděny bodům M na kuželosečce α. Tečnám m přísluší v R kruhy křivosti. Buď a' polára roviny α, α' polární rovina přímky a, A', B' průseky přímky a' s K^3.

Libovolnou tečnou m jde ke K^3 ∞^1 prostorů tečných (dotyčné body jsou na kružnici $[m]$), průsečnice s α' obalují v této kuželosečku α'; dva tečné prostory obsahují rovinu α a dotýkají se v bodech A', B'. Kuželosečka α dotýká se tedy opět kružnice $[K^3, \alpha']$ ve 2 bodech. Kteroukoli tečnou n této kuželosečky jde ke K^3 opět ∞^1 tečných prostorů a stopa na α dotýká se koule v A, B a obsahuje m, splývá tedy s kuželosečkou α. Kuželosečky α, α' jeví se tedy jako dvojné křivky obalové varianty prostorů tečných ke K^3. Bodem C jde ∞^1 z nich, stopy jejich na R jsou roviny dotýkající se absolutní kuželosečky v nekonečnu, α, α' promítnou se tedy do R jako *konfokální kuželosečky* [2]). Cyklida jeví se dvojím způsobem jako

[2]) Kde je dvojsmyslnost vyloučena, znamenáme centrální průměty týmž písmenem jako útvary v R^4.

obálka koulí. Jedny mají středy na α a jdou body A', B', druhé na α' a jdou body A, B. Kruhy dvakráte se dotýkající s ohnisky A, B neb A', B' zoveme *fokálními kruhy*, přímky a, a' osami.

Libovolný bod M na a a a' jsou polárně sdruženy. Koule M seče tedy orthogonálně kruh (a'). Cyklidu lze tudíž dvojím způsobem považovati za obálku koulí, které majíce středy na kuželosečkách α, α' a orthogonálně sekou kruhy těchto se dvakráte dotýkající. Takto daly by se odvoditi všechny známé vlastnosti D. cyklidy. Uvedeme pouze ještě, že v případu, kde α jde středem C, a' jest v R^v, promítne se na R α do přímky a, osy rotační cyklidy, α' jako kruh. Obecně určují a, a' prostor (pól bodu $[\alpha, \alpha']$), který seče K^3 v kouli; na té leží body A, A', B, B' (průmět do R sluje *hlavní koule*). Obsahuje-li tento prostor bod C, promítnou se a, a' do téže roviny v R, která jest třetí rovinou symetrie cyklidy.

III.

Mějme na mysli obecný případ a buď S bod na a. Jím jdou 2 tečny x, y ke kuželosečce α. Koule S obsahuje tedy 2 kruhy (x), (y) systemu α a jest kolmá ke všem kruhům systemu α' t. j. kolmá k cyklidě podél těchto dvou kruhů. Podobně platí o bodech S' na a', i když se mění kuželosečky α, α', přímky a, a' však zůstávají.

Svazek cyklid D. *o týchž dvojných bodech A, B, A', B' tvoří tedy řadu Laméovu.* System třikráte orthogonální doplňují svazek koulí (S) kruhem fokál. α' a svazek koulí (S') kruhem α.

Abychom stanovili *podmínku, kdy obecná řada cyklid tvoří řadu Laméovu,* užijme téže methody, které užil Darboux na plochy, jichž čáry křivosti jsou dány [3]).

Nechť zaujme a v prostoru R^4 ∞^1 poloh a, a_1, $a_2 \ldots$, rovina α pak polohy α_1, α_2, $\alpha_3 \ldots$, při čem kuželosečka α, která závisí ještě na jednom parametru, se mění jakýmkoli způsobem.

Bude-li řada cyklid (α) řadou Laméovou, bude možno seskupiti čáry křivosti (x), (x_1), $(x_2) \ldots$ po sobě jdoucích cyklid tak, aby tvořily system ploch kolmých ku (α). Řada

[3]) Comptes Rendus 148, Leçons sur les syst. orth., Note III.

koulí (S), (S_1), (S_2) . . . má obálku, jež se jí dotýká podél kruhů x, x_1, x_2 . . .

V R^4 mají tedy body S, S_1, S_2 . . . vyplniti křivku a x, x_1, x_2 . . . býti jejími tečnami. Přejde-li a do sousední polohy a_1, α do α_1, má býti možno ke každé x v α přidružiti x_1 v α_1, které by se protaly na a, nutno tedy, aby roviny α, α_1 měly společnou přímku a, tudíž a, a_1 společný bod P. Jest tedy nutnou podmínkou, aby dvě po sobě jdoucí polohy a, a_1 měly společný bod, α, α_1 přímku, jinými slovy *a tvoří v R^4 kužel s vrcholem P, α jsou jeho roviny tečné*, nebo *obsahuje a křivku prostorovou* (příp. rovinnou) a *α jsou roviny oskulační*. Snadno lze nahlédnouti, že tato podmínka jest i dostatečná.

V nejobecnějším případě přímky a, a' sekou K^3 v bodech A, B — $A'B'$. V *R obalují tedy osy fokálních kruhů a, a' křivky (P), (P'), které jsou ve vztahu vyznačeném v odstavci II., fokální kruhy (α), (α') mají obálky, kterých se dotýkají* v A, B — A', B'.

Poněvadž rotační kužel jeví se jako varianta cyklidy D. můžeme zde hned uvésti, *kdy tvoří řada kuželů řadu Laméovu.* Přímky a a roviny α musí jíti bodem C a tvořiti kužel. Stopy přímek a na *R vrcholy kuželů tvoří křivku*, stopy rovin α t. j. *osy kuželů jsou jejími tečnami.*

IV.

Probéřeme nyní případy, kdy a obaluje křivku rovinnou neb prochází pevným bodem.

A) a se dotýká křivky v rovině α; a' a body A', B' jsou stálé, rovněž i fokální kruh (α), na němž jsou dvojné body A, B. Každá řada cyklid o dvou stálých dvojných bodech A', B' a dvou pohyblivých na fokálním kruhu pevném tvoří řadu Laméovu. V tomto jest obsažen i ten pozoruhodný případ, že cyklida otáčí se kol pevné osy a'; a obaluje kruh v rovině α. *Otáčí-li se cyklida kol své jedné osy, vytvoří řadu Laméovu.*

B) a prochází stálým bodem P, roviny α' jsou v prostoru (P). Všechny fokální kruhy α' jsou na kouli (P). V R tvoří osy a kužel s vrcholem ve středu koule (P), a' opisuje křivku a body A', B' jsou na orthogonální kouli (P'). Je-li však celý kužel přímek a v jediném prostoru (M), opisují a' také kužel s vrcholem M.

Uvažme nyní ten zvláštní případ, kdy a vyplní kužel kvadratický s vrcholem P v prostoru (M); kužel seče kouli prostoru (M) v křivce T^M. Povrchová přímka kuželu a a tečná rovina α seče kouli (M) v bodech A, B a kruhu (α). V této rovině α leží kuželosečka (α), která se dotýká kruhu a křivky T^M v bodech A, B. V polárním prostoru (P) jest pak kužel rovin α' a přímek a' o vrcholu M (pól prostoru $[M]$), jenž na kouli (P) opět vytíná křivku T^P, jíž se kruhy a kuželosečky α' dvakráte dotýkají. Křivka T^P určuje v (P) ještě další vrcholy tří kuželů N, O, Q, které jí procházejí. Tyto 4 body v (P) a P určují polární pětistěn koule K^3. Příslušných 5 koulí (M), (N), (O), (P), (Q) tvoří pak známou skupinu pěti koulí, z nichž každá je kolmá ke všem ostatním. Na každé této kouli jest bikvadratická křivka T^i. Vyplňují-li a kužel, který obsahuje jednu z křivek T^i, vyplňují a' kužel, který jde křivkou T^k v prostoru polárním k jeho vrcholu. Celkem existuje 10 takových dvojin kuželových.

Buď R plocha druhého stupně jdoucí křivkou T^P; prostory tečné společné ploše R a kouli K^3 určují variantu obalovou Δ, jež má R za dvojnou a podobné plochy R^i v ostatních prostorech (M), (N), (O), (Q) jdoucí křivkami T^i. Koule odpovídající bodům plochy R obalují *obecnou cyklidu.* Z bodu C promítají se pak plochy R^i jako konfokální plochy — *deferenty* její, T^i jako její *fokály.* Tečné roviny kuželu (P) vytínají z plochy R řadu kuželoseček α, jimž odpovídají cyklidy D. vepsané do cyklidy (R). Celkem existuje 10 řad vepsaných cyklid; jejich dvojné body jsou po 2 na fokálách cyklidy $[R]$ [4]).

Obecně, mají-li cyklidy D. dvojné body na dvou libovolných fokálách T^i, jsou vepsány do některé z řady konfokálních cyklid $[R]$.

Velmi zajímavý a pro celou theorii důležitý je případ, že plocha R, na níž leží kuželosečky α, jest jeden z kuželů křivky T^P s vrcholem N. Pak každá tečná rovina kuželu (N) seče opět kužel (P) v kuželosečce β, která se také dotýká ve dvou bodech

---

[4]) Viz Darboux: Sur les systémes orth.

křivky T^P. α a β mají společnou tečnu m. Podél kružnice (m) sekou se obě cyklidy orthogonálně. Je-li totiž T bod dotyčný tečny m s β, odpovídá spojnici $TP \equiv a$ polární rovina α' bodem R, pólem prostoru (R) a nalézá se celá v prost. (P); rovněž se α' nalézá na polárním prostoru bodu T. Všechny kružnice systemu β' na cyklidě (β) sekou tedy orthogonálně kouli (P) a tudíž i cyklidu α podél (m).

Mění-li se teď m podél kuželosečky β, opisuje α kužel (P), α' kužel (M) v prostoru (P); cyklidy (α) sekou orthogonálně cyklidu (β) a všechny ostatní, které odpovídají kuželosečkám $\beta_1, \beta_2, \beta_3 \ldots$ vyťatým z kuželu (P) tečnými rovinami kuželu (N).

Snadno najdeme i třetí system cyklid D. (γ), který se se systemy (α), (β) doplňuje na system třikráte orthogonální. V prostoru (N), který obsahuje body M, O, P, Q, jest křivka T^N na kouli (N); v tečných rovinách kuželu M leží kuželosečky β'. Ale P jest vrcholem jiného kuželu, který jde křivkou T^N a v tečných rovinách tohoto kužele jsou kuželosečky γ tvořené tečnami kuželoseček β', příslušné γ' jsou pak v prostoru (P). Máme tedy zde celkem 3 prostory, tři fokály a v každém prostoru 2 řady kuželoseček:

v prostoru	(M)	křivku	T^M	a	kuželosečky	α, β,
„	(N)	„	T^N	„	„	β', γ,
„	(P)	„	T^P	„	„	α', γ'

Cyklidy jedné řady příkladem α, které mají dvojné body na T^M, T^P procházejí křivkou T^N. Skutečně tečnou rovinou β kužele (N) jdou 2 tečné prostory s dotyčnými body na b' a T^N, podobně i tečnou rovinou γ'. Ale v β a γ' leží jedna tečna každé kuželosečky α neb α' t. j. jeden kruh seče orthogonálně nullovou kouli na T^N.

Splývají-li 2 z vrcholů O, Q v bodě C, leží ostatní P, M, N v prostoru R^V, 3 fokály T^M, T^N, T^Q se promítnou do R jako kuželosečky. Každý ze šesti kuželů dotýká se prostoru R^V, každá z kuželoseček α, β, γ má jednu tečnu v R^V, promítá se do R jako parabola. System třikráte orthogonální skládá se tedy vesměs z cyklid třetího stupně (system *Robertsův*).

Řady tečen na kuželosečkách $\alpha, \alpha_1, \alpha_2 \ldots$ jsou perspektivní; korespondující tečny leží v téže tečné rovině kužele (N).

Při tom tečny, které leží v obou tečných rovinách kužele (N) z bodu P si přísluší. Buď x libovolná tečna kuželosečky α'. Prostory tečné ke K^3 které promítají řadu tečen na α, mají dotyčné body B na kruhu (x). Podobně tečné prostory libovolnou tečnou x_1, x_2 . . . kuželoseček α'_1, α'_2 . . . dají řady bodové na kruzích (x_1), (x_2) . . . a tyto jsou též projektivné. Ale body B se promítají do R jako body průsečné kruhu (x) s cyklidami řady (α). [Každý bod B jest dotyčný prostoru, v němž jest x tečna jedné kuželosečky α.]

Na kruzích (x), kolmých ke kouli (P) a cyklidě B, stanoví všechny cyklidy řady α projektivné řady bodové. Průseky s koulí si odpovídají. (Dva prostory jdou rovinou $[x P]$.)

Tento pozoruhodný system třikráte orthogonální složený ze samých cyklid Dupinových jest odvozen u Darbouxa z jiného východiska. Buď dána v R^4 kuželosečka β s osou b a volme bod P; v prostoru $(\beta P) \equiv M$ jest koule, na ní křivka T vyťatá kuželem (βP) a kužel (N), který obsahuje přímku b. V tečných rovinách prvého leží kuželosečky α, v tečných rovinách druhého β. Do R přenáší se to tímto způsobem:

Dána cyklida (β) a koule (P). Sestrojme kruhy kolmé v bodech B, B' . . . k (β) a orthogonální ke kouli (P), na těchto kruzích projektivní řady B_1, B_2, B_3 . . ., B'_1, B'_2, B'_3 . . ., ve kterých si průseky s (P) odpovídají. Pak body B_i, B'_i, B''_i . . ., vyplňují další cyklidu β řady [transformace Ribacourova].

V.

Vraťme se zase k obecné řadě Laméově vytvořené cyklidami Dupinovými a buďte α, α_1 dvě po sobě jdoucí oskulační roviny v R^4, a, a_1 příslušné osy, na kterých leží body A, B, A_1, B_1. Obě roviny určí prostor M, v němž jest koule s kruhy (α), (α_1). O kuželosečkách (α), (α_1) možno předpokládati, že se sekou ve 2 bodech (zanedbání veličin nek. malých řádu 2.) a určují tedy 2 kužele, jichž vrcholy oddělují harmonicky roviny α, α_1. Roviny však v limitě splynou, s nimi i jeden z vrcholů. Druhý vrchol buď P. Tento kužel $(P\alpha)$ určí s koulí křivku T, jíž jde i kužel další s vrcholem $N \equiv (a, a_1)$.

Buď Σ křivka na ploše obalené rovinou α, jíž odpovídá plocha kolmá k cyklidám řady a M, M_1 její body na a, a_1, m, m_1 pak tečny křivky Σ, které jsou zároveň tečnami ke kuželosečkám α, α_1. Plocha obalená koulemi (M) dotýká se své obálky podél kruhů (m), (m_1).

Ale roviny tečné kužele (N) vytínají z kužele $(P\alpha)$ také řadu kuželoseček, která představuje řadu Laméovu a obsahuje cyklidy (α), (α_1). V rovině $(P m m_1)$ leží však kuželosečka β na kuželi (N), jíž odpovídá cyklida orthogonální k α, α_1 podél (m, m_1), t. j. každý kruh její oskuluje v bodě kruhu m s příslušnou orthogonální trajektorií řady (α). Tím jest dokázána zajímavá věta:

Sestrojíme-li v bodech, kde orthogonální trajektorie sekou jednu cyklidu (α) *řady, oskulační kružnice, jsou tyto kolmé k téže kouli, která ovšem se mění s cyklidou* (α).

Nyní jsme s to však i tu zajímavou otázku zodpověděti, kdy jest možno, aby Laméova řada cyklid obsahovala vesměs shodné cyklidy.

V trojrozměrném prostoru, který je určen v R^4 třemi po sobě jdoucími tečnami $a, a_1, a_2 \ldots$, jsou roviny $\alpha \equiv (a, a_1)$, $\alpha_1 \equiv (a_1, a_2)$ s kruhy α, α_1 a příslušnými kuželosečkami. Můžeme uvažovati místo tohoto prostoru hned jeho centrální průmět na R. Kruhy α, α_1 na téže kouli a tětivy v nich A, B, A_1, B_1 mají býti stejné. Ale na téže kouli shodné kružnice mají od středu stejné vzdálenosti a dvě takové roviny, které svírají úhel nekonečně malý, mají průsečnici, která se v limitě blíží průměru kruhu. Kdyby však AB bylo v kruhu α průměrem, byla by cyklida α cyklidou o 3 rovinách symetrie.

Mají-li se však 2 shodné kružnice na téže kouli, jichž roviny svírají velmi malý úhel, protnouti v tětivě, která není průměrem, jest to možné jen tak, že obě roviny jsou velmi blízko středu koule. Střed této koule má stejné vzdálenosti od tětiv AB, A_1B_1, a blíží se středu oskulační kružnice křivky (P) obalené tečnami a. Odtud plyne *věta Cosseratova*:

Dotýká-li se a křivky konstantní křivosti a kruh (α) *zůstává koncentrický s kruhem oskulačním, tvoří shodné cyklidy* (α) *řadu Laméovu.* Jsou-li osy a, a' v téže rovině, cyklida má 3 roviny symetrie, pak stačí ovšem, aby rovina $(a a')$ obalovala plochu.

Není nám známo, zda tento pozoruhodný theorém Cosseratův jest někde tímto nanejvýš elementárním způsobem odvozen.

Poznámka o jisté vlastnosti křivek prostorových.

Napsal J. Sobotka.

Poznámka tato vztahuje se k pojednání pana B. Hostinského „Sur une propriété des courbes gauches“, uveřejněnému ve sv. VIII. (1913) časopisu „Annaes da academia polytechnica do Porto“.

Jde tu především o určení charakteristiky pro rovinu (P) pevně spojenou s pravoúhlým trojhranem $U(x, y, z)$, který se pohybuje tak, že U popisuje křivku prostorovou c a že v každé jeho poloze splývají hrany trojhranu s kladnou částí tečny, hlavní normály resp. binormály křivky c.

Jest známo, že lze trojhran ten z polohy $U(x, y, z)$ převésti do nekonečně blízké polohy $U'(x', y', z')$ šroubovým pohybem daným křivkou šroubovou $š$, která má v bodě U s křivkou c společný poloměr křivosti r a poloměr torse ϱ. Kladná část osy Z křivky $š$ utíná na hlavní normále úsečku

$$UO = y_0 = \frac{r\varrho^2}{r^2 + \varrho^2}$$

a uzavírá s binormálou z úhel ω daný relací $tg\, \omega = \frac{r}{\varrho}$. Parametr křivky $š$ jest $q = - r \sin \omega \cos \omega$.*)

Dán-li jest okamžitý šroubový pohyb trojhranu $U(x, y, z)$, dána jest tím také charakteristika hybné roviny P, čímž vytčený úkol jest řešen; jde tedy pouze o analytické vyjádření této konstrukce, které z uvedeného geometrického určení jest přímo patrné.

Považujeme-li O za počátek soustavy souřadné, orientovanou osu křivky $š$ za osu Z, zápornou část hlavní normály y

*) Cf. G. Scheffers: Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf Geometrie, I. sv., 2. vyd., str. 262 a n., aneb též lithogr. přednášky české university o differenciální geometrii z r. 1910.