Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

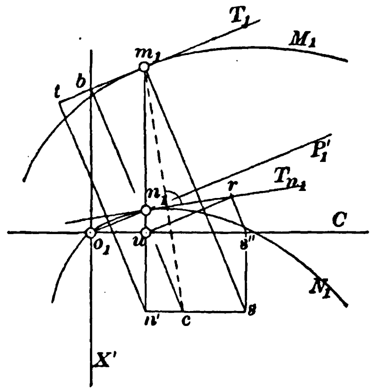
Vladimír Mašek

O ploše kardiodicko-šroubové. [I.]

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 43 (1914), No. 3-4, 318--331

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/109254`

kolmice spuštěná s bodu n_1 na m_1c je opět tečnou T_{n1}. 2°. Vyznačme bod $(m_1u, sc) \equiv n'$, veďme $n't \perp T_1$ a učiňme



Obr. 2.

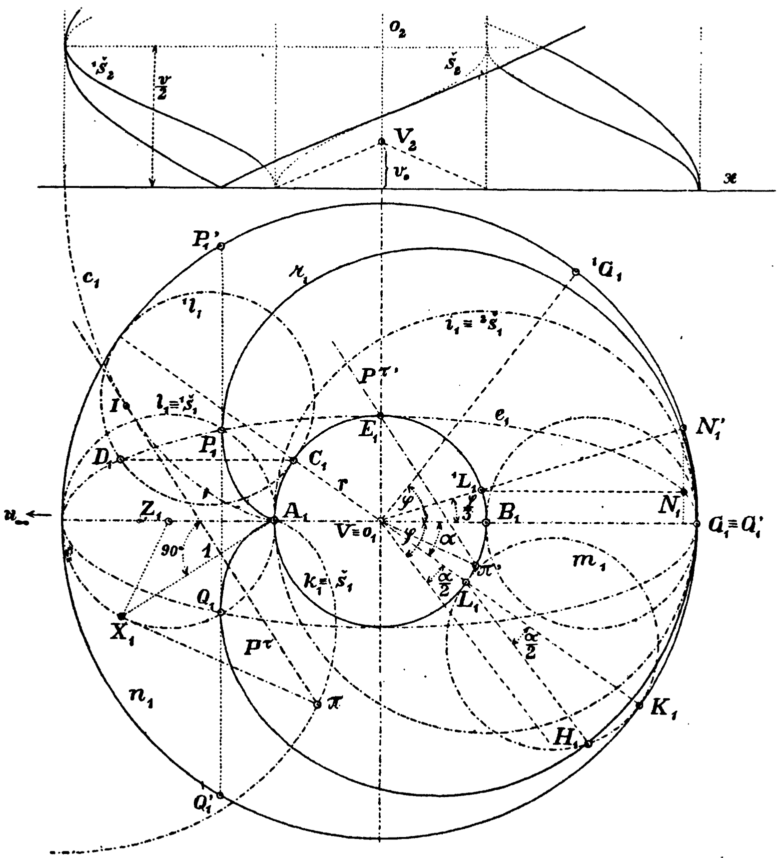
$ur = tm_1$ ve směru tm_1, tím opět dostaneme tečnu $T_{n1} \equiv n_1r$ křivky N_1.

O ploše kardioidicko-šroubové.

Napsal **Vladimír Mašek**, assistent české techniky v Brně.

Kardioida r_1, ležící v prvé průmětně (obr. 1.), vytvořena jest bodem A_1 kružnice l_1 při kotálení jejím po shodné kružnici k_1 o středu o_1 a poloměru r. Sestrojme rotační válec o řídící kružnici k_1 a na něm šroubovici levou $š$ vycházející z bodu A_1 o výšce závitu v. Uvažujme plochu vytvořenou kardioidou r_1, pohybuje-li se její bod vratu A_1 po dané šroubovici $š$, a zůstává-li její rovina stále kolmo ku ose o šroubovice $š$.

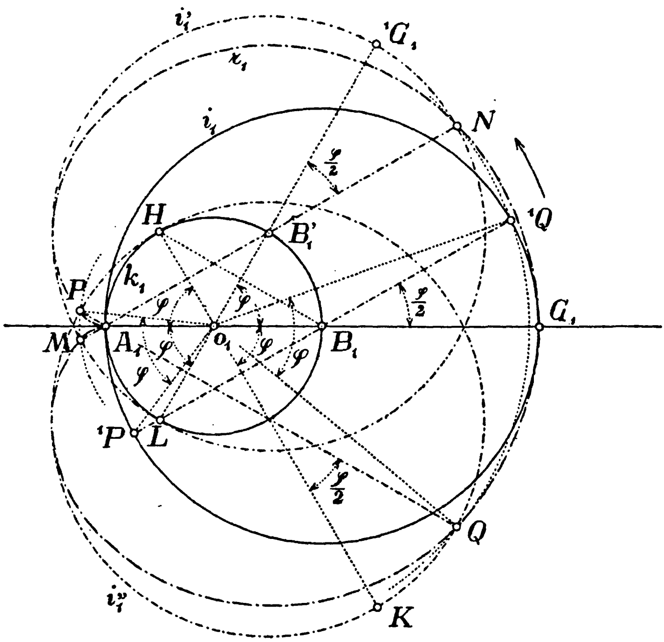
Táž plocha povstane, proložíme-li kružnicí l_1 rotační válec, na němž se nachází šroubovice pravá $^1š$, vycházející rovněž z bodu A_1 o téže výšce závitu v a kotálí-li se tato šroubovice po pevné šroubovici $š$ tak, by vždy v bodě styku obou šroubovic příslušné jich roviny oskulační splývaly. Každý bod šroubovice $^1š$ opíše v rovině kolmé ku ose o kardioidu, jejíž bod vratu nachází se na šroubovici $š$. Podobně mysleme si kardioidu r_1 vytvořenou bodem A_1 kružnice i_1 o středu B_1 a poloměru $2r$ při kotálení kružnice i_1 vnitřním obvodem po kružnici k_1 a sestrojme na rotačním válci o řídicí kružnici i_1 šroubovici levou ${}^2\check{s}$ jdoucí bodem A a mající výšku závitu $2v$. Kotálí-li se šroubovice ${}^2\check{s}$



Obr. 1.

po pevné šroubovici $\check{s}$ způsobem dříve uvedeným, opíše každý bod její v rovině kolmé ku ose o zase kardioidu mající na šroubovici $\check{s}$ bod vratu, z čehož plyne opět totožnost tímto kotálením vytvořené plochy s plochou uvažovanou.

Při kotálení kružnice i_1 vnitřním obvodem po kružnici k_1 opíší vždy koncové body libovolného průměru jejího touž kardioidu. Uvažujme kardioidu r_1 vytvořenou při tomto kotálení body A_1 a G_1 (obr. 1*a*) ležícími na průměru kružnice i_1. Buďtež i'_1 a i''_1 polohy kružnice i_1 odkotálené po kružnici k_1 od bodu A_1 souměrně na obě strany o $\sphericalangle \varphi$. Body dotyku těchto kružnic s kružnicí k_1 označme L a H. Body M a N kardioidy r_1



Obr. 1*a*).

ležící na kružnici i'_1 obdržíme, spojíme-li střed B'_1 kružnice i'_1 s bodem A_1. Patrně jest $\overline{A_1B_1} \parallel \overline{LB_1}$ a $\sphericalangle MB'_1L = \sphericalangle NB'_1{}^1G = \frac{\varphi}{2}$. Otočí-li se nyní kardioida r_1 směrem označeným o $\sphericalangle \varphi$ kol bodu o_1 do polohy r'_1, přejde kružnice i_1 do polohy i'_1. Bod G_1 zaujme polohu ${}^1G_1$ a střed B_1 polohu B'_1. Body ${}^1P$ a ${}^1Q$ otočené kardioidy r'_1 ležící na kružnici i_1 obdržíme, spojíme-li bod vratu L kardioidy r'_1 se středem B_1 kružnice i_1. Jest patrno, že $\sphericalangle\, G_1 B_1 {}^1Q = \frac{\varphi}{2}$. Pozorujeme, že při otáčení kardioidy r_1 kol bodu o_1 o stejné úhly φ, leží vždy dva z průsečíků této otáčející se kardioidy s pevnou kružnicí i_1 na průměru této kružnice, při čemž středový úhel dvou po sobě následujících průsečíků jest $\frac{\varphi}{2}$. Z obrazce jest patrno, že body kardioidy r_1, jež zapadnou po otočení o $\sphericalangle\, \varphi$ do bodů ${}^1P$ a ${}^1Q$, jsou body P a Q kardioidy r_1 ležící na kružnici i''_1. Vykonává-li nyní kardioida r_1 (obr. 1.) svrchu uvedený pohyb šroubový, protíná rotační válec nad kružnicí i_1 patrně ve dvou šroubovicích vycházejících z bodů A_1 a G_1, z nichž prvá jest totožná se šroubovicí ${}^2š$ a druhá jest souhrn průsečíků hlavních normál šroubovice ${}^2š$ s uvažovaným rotačním válcem, tedy šroubovice shodná, o 180° otočená kol osy rotačního válce. Označme ji ${}^2š'$. *Sestává proto část průseku naší plochy s rotačním válcem kolmým k π, jehož osa jde libovolným bodem kružnice k_1 a jehož poloměr $\varrho = 2r$, ze dvou shodných šroubovic o výšce závitu $2v$.*

Určeme dále skutečný obrys plochy při promítání do nárysny a jeho oba průměty. Vedeme-li ku jednotlivým polohám kardioidy r_1, otáčející se v rovině půdorysné okolo bodu o_1 tečny kolmé ku ose x, čili vyhledáme-li na zmíněných kardioidách ony body, jichž normály jdou úběžným bodem u_∞ přímky $\overline{o_1 A_1}$, obdržíme průmět hledaného obrysu do půdorysny. Otáčení kardioidy r_1 kol bodu o_1 můžeme nahraditi kotálením kružnice l_1 po kružnici k_1, uvažujeme-li ovšem všechny kardioidy vytvořené všemi body obvodu kružnice l_1, a chceme-li na nich vytknouti body, v nichž normály jdou bodem u_∞, tu musíme, jak známo, vždy okamžitým středem otáčení, ku př. bodem C_1, vésti spojnici $C_1 u_\infty$, jež protne příslušnou polohu kružnice ${}^1l_1$ v bodu D_1 určité z uvedených kardioid, v němž přímka $\overline{C_1 D_1}$ jest normálou. Podobně vyhledáme body na ostatních kardioidách. Z konstrukce bodu D_1 jest patrno, že hledané body naplňují ellipsu e_1 *) orthogonálně affinní ku kružnici k_1 vzhledem ku přímce $\overline{o_1 E_1}$ kolmé ku ose x co ose affinity. Poměr affinity jest 3 : 1.

*) O tomto výsledku zmiňuje se Dr. *L. Burmester*: Kinematisch-geometrische Constructionen der Parallelprojection der Schraubenflächen etc. Zeitschrift für Math. u. Physik, 1873, B. 18 p. 199.

Vytkněme si libovolný bod kardioidy r_1, ku př. H_1, ležící na kružnici m_1 a sestrojme v něm normálu $\overline{H_1L_1}$ kardioidy r_1. Průsečík spojnice $\overline{o_1L_1}$ s kružnicí m_1 označme K_1 a $\sphericalangle L_1o_1B_1 = \alpha$. Pak jest $\sphericalangle H_1L_1K_1 = \frac{\alpha}{2}$. Položme $\alpha + \frac{\alpha}{2} = \varphi$, odkudž $\frac{\alpha}{2} = \frac{\varphi}{3}$. Tečna kolmá ku ose x dotýká se kardioidy r_1 v bodu G_1. Otočme kardioidu r_1 směrem šroubování o úhel φ. Bod G_1 přejde do polohy ${}^1G_1$ a normála $\overline{L_1H_1}$ do polohy rovnoběžné s osou x. ($\overline{{}^1L_1N_1}$). Patrně $\sphericalangle B_1o_1{}^1L_1 = \frac{\alpha}{2} = \frac{\varphi}{3}$. Bod N_1 musí dle předcházejícího ležeti též na ellipse e_1, jest proto průsečíkem otočené kardioidy s ellipsou e_1. Platí tedy věta:

Otočí-li se kardioida r_1 kol bodu o_1 o úhel φ a sestrojíme-li k původní i otočené poloze tečny rovnoběžné s určitým směrem, leží jich dotyčné body na ellipse, jejíž velká osa stojí ku směru tečen kolmo a normály ku oběma polohám kardioidy v odpovídajících si bodech dotyku protínají kružnici k_1 v bodech, jichž spojnice s bodem o_1 svírají úhel $\frac{\varphi}{3}$.

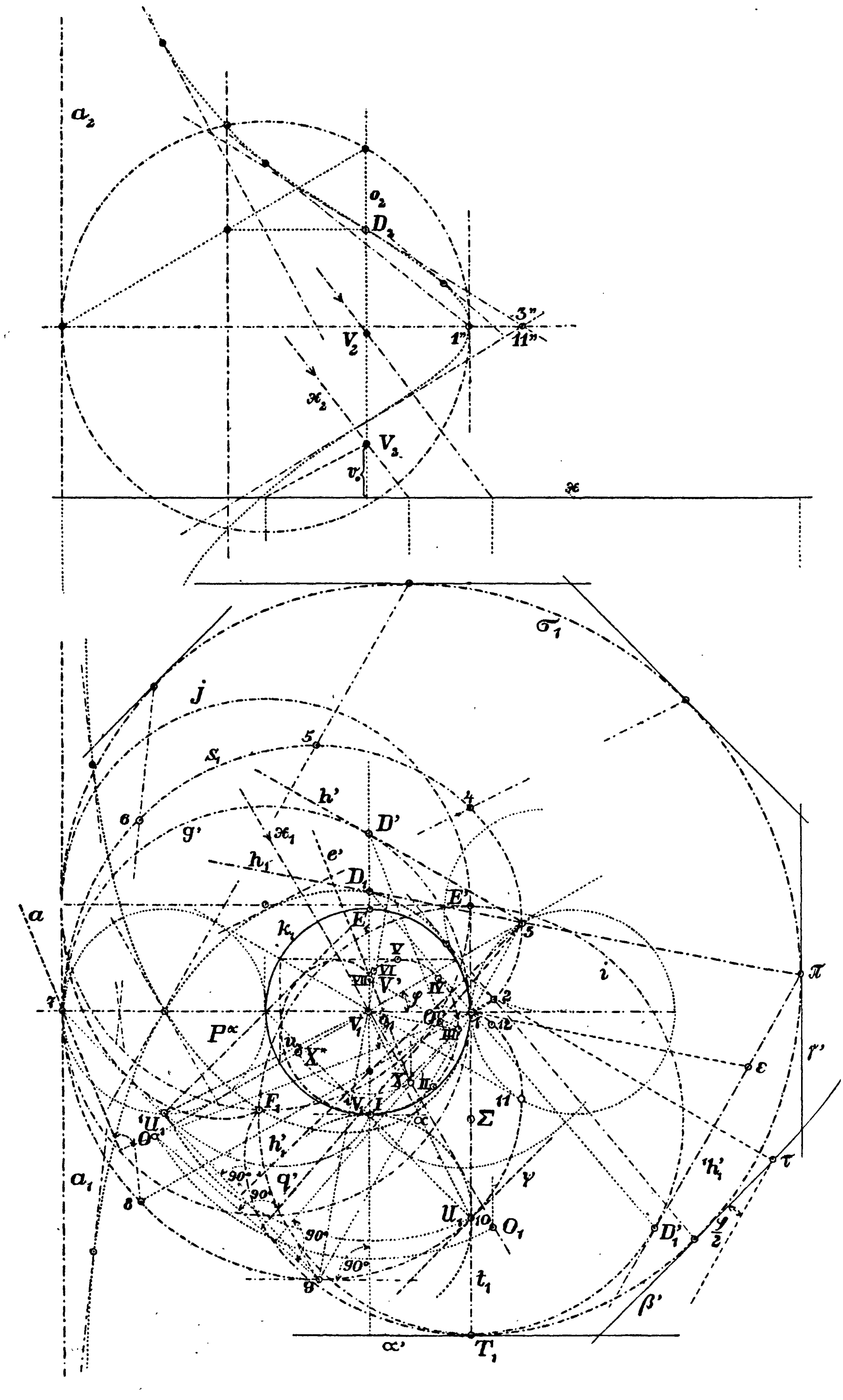
Ellipsa e_1 jest též orthogonálně affinní s kružnicí n_1 opsanou kol středu o_1 poloměrem $\varrho = 3r$. Osou affinity jest velká osa ellipsy e_1 a poměr affinity jest 1 : 3. V této affinitě odpovídá bodu N_1 bod N'_1 kružnice n_1. Ku kardioidě co křivce třetí třídy můžeme vésti tři tečny rovnoběžné s daným směrem. Body dotyku kardioidy r_1 s tečnami kolmými ku ose x označme P_1, Q_1, G_1, a body k nim affinně přidružené na kružnici n_1 buďtež P'_1, Q'_1, $G_1' \equiv G_1$. Otočí-li se kardioida r_1 kol bodu o_1 o úhel 360^0, a značí-li P_1, Q_1, G_1 stále dotyčné body tečen kolmých ku ose x ku jednotlivým polohám otáčející se kardioidy a body P'_1, Q'_1, G'_1 body affinně přidružené, opíší dle dřívějšího body P'_1, Q'_1, G'_1 oblouky kružnice n_1 o středových úhlech $\frac{360^0}{3}$. Vykonává-li nyní kardioida e_1 pohyb šroubový, opisují body P'_1, Q'_1, G'_1, zachovávajíce ovšem dřívější význam, tři shodné šroubovice levé na rotačním válci o řídící kružnici n_1. Body affinně přidružené P_1, Q_1, G_1 opisují tedy tři shodné křivky na přímém elliptickém válci nad ellipsou e_1. Platí tudíž:

Skutečný obrys naší plochy při promítání do roviny nárysné sestává ze tří shodných křivek prostorových orthogonálně affinně sdružených se třemi šroubovicemi na rotačním válci poloměru $3r$; *rovinou affinity jest rovina rovnoběžná s nárysnou jdoucí osou o a poměr affinity jest 1 : 3.* Výška závitu zmíněných šroubovic jest $3v$.

Obrys plochy v nárysně sestává proto ze tří shodných sinusoid.

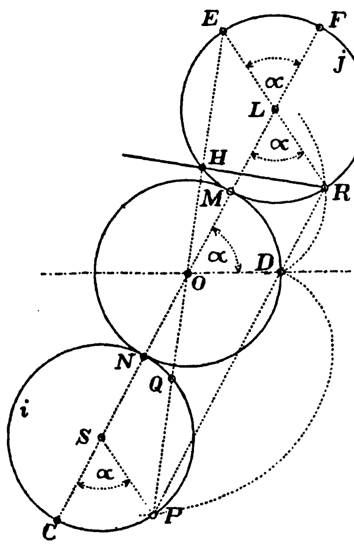
Uvažujme dále rozvinutelnou plochu vytvořenou tečnými rovinami naší plochy podél kardioidy s (obr. 2.), jejíž půdorys s_1 jest vzhledem ku kardioidě r_1 otočen o 180^0 směrem šroubování. Označme v_0 redukovanou výšku závitu šroubovice $š$ nanesenou od bodu o_1 na osu o do bodu V. (V_2, $V_1 \equiv o_1$). Tečná rovina v určitém bodu plochy jest stanovena tečnou ku příslušné kardioidě a tečnou ku některé šroubovici bodem jdoucí. Sestrojme řídící kužel uvažované rozvinutelné plochy, položivše jeho vrchol do bodu V. Chceme-li vrcholem V vésti rovinu rovnoběžnou ku tečné rovině plochy, ku př. v bodu U, musíme jím vésti paprsek rovnoběžný s tečnou ku příslušné poloze šroubovice ${}^1š$ bodem U jdoucí; půdorysná stopa jeho E_1 leží na kružnici k_1 a jím vedeme rovnoběžku ku tečně ψ kardioidy v bodu U_1, čímž stopa P^α této roviny jest určena. Otočíme-li kardioidu s_1 kol bodu o_1 o 90^0 směrem opačným ku směru šroubování, přejde bod U_1 do polohy ${}^1U_1$ a normála v něm ku otočené kardioidě jest patrně totožná se stopou P^α. Totéž platí i pro ostatní stopy, jež musí proto obalovati kardioidu totožnou s evolutou kardioidy s_1, otočenou však o 90^0 směrem opačným ku směru šroubování. Řídící kužel uvažované rozvinutelné plochy jest tudíž kardioidický.

Označme body kardioidy s_1 příslušné postupně odkotálením tvořící kružnice o 30^0, počínaje bodem vratu, postupně *1*, *2*, *3* . . ., stopy rovin vedených bodem V rovnoběžně s tečnými rovinami plochy ve zmíněných bodech α, β, γ . . ., a jich body dotyku s kardioidou u_1, jíž obalují, označme *I*, *II*, *III* . . . Tyto body *I*, *II* . . . nejjednodušeji sestrojíme, uvážíme-li, že kardioidy s_1 a u_1 by byly křivky homothetické vzhledem ku středu o_1, kdybychom ku př. kardioidu s_1 otočili kol bodu o_1 o 90^0 směrem šroubování. Jest proto $\overline{o_1 I} \perp \overline{o_1 7}$, $\overline{o_1 II} \perp \overline{o_1 8}$ atd. Vedeme-li



a2
o2
D2
V2
1"
3"
11"
V3
v0
σ1
j
5
s1
h'
4
6
g'
D'
e'
h1
D1
E'
a
E1
k1
3
i
π
V
VI
V'
VII
IV
φ
2
7
P^α
V1
O2
III
12
ε
r'
u2
X
Y
II
F1
V1
I
α
Σ
11
U1
O^α
h'1
q'
γ
'h'1
τ
a1
90°
8
U1
10
O1
D'1
φ/2
9
t1
β'
α'
T1

body $1, 2, \ldots$ přímky rovnoběžné se spojnicemi $\overline{o_1 I}$, $\overline{o_1 II}, \ldots$, dostaneme prvé průměty povrchových přímek uvažované rozvinutelné plochy, jež obalují půdorysný průmět křivky vratu. Odkotálejí-li se tvořící kružnice kardioidy s_1 jdoucí body 1 a 7 týmž směrem o stejné úhly, opisují body 1 a 7 současně zmíněnou kardioidu a jich spojnice v každém okamžiku prochází bodem vratu 1. Poněvadž pak povrchová přímka rozvinutelné plochy, jdoucí bodem ku př. 3, jest rovnoběžná ku spojnici $\overline{o_1 III}$,



Obr. 3.

jest též kolmá ku $\overline{o_1 9}$, při čemž přímka $\overline{3, 9}$ prochází bodem vratu 1. Platí tudíž: *Vedeme-li bodem vratu 1 libovolnou přímku protínající kardioidu s_1 ve dvou bodech, a každým z těchto bodů kolmici ku spojnici druhého bodu se středem o_1, obalují tyto kolmice půdorysný průmět křivky vratu uvažované plochy.*

Určeme tento průmět. Buďtež (obr. 3.) R a P dva body kardioidy ležící na přímce jdoucí bodem vratu D. Singulární ohnisko kardioidy budiž O. Polohy hybné kružnice body R a P procházející buďtež i a j o středech S a L a poloměru r. Dotyčné body jich s danou pevnou kružnicí označme N, resp. M, jichž spojnice protíná tyto kružnice v bodech C a F. Patu kolmice z bodu R spuštěné ku přímce $\overline{OP}$ označme H a průsečíky přímky $\overline{OH}$ s kružnicemi i a j buďtež body P, Q a E. Z obrazce jest patrno, že bod H musí ležeti na kružnici j, neboť jest vrcholem pravého úhlu nad průměrem $\overline{ER}$. Pro sečny $\overline{OC}$ a $\overline{OP}$ kružnice i platí: $\overline{OP}\,.\,\overline{OQ} = \overline{OC}\,.\,\overline{ON}$ a poněvadž $\overline{ON} = -\overline{OM}$ a $\overline{OQ} = -\overline{OH}$, jest $\overline{OP}\,.\,\overline{OH} = \overline{OM}\,.\,\overline{OC} = 2r\,.\,r = 3r^2 = konst.$

Poněvadž odvozený vztah platí pro všechny body kardioidy s_1 (obr. 2.) a příslušné průměty povrchových přímek křivky vratu, jest křivka, již tyto průměty obalují, totožná s křivkou, kterou obalují tečné roviny kužele reciprokého ke kuželi, jehož řídící křivkou jest kardioida s_1 a jehož vrchol K nachází se nad bodem o_1 ve vzdálenosti $r\sqrt{3}$. *Kardioida s_1 a hledaný průmět křivky vratu jsou proto křivky polárně reciproké vzhledem k bodu o_1* *). *Jest tudíž hledaným průmětem křivky vratu trisekční křivka Mac-Laurinova.* **)

Dotyčný bod D_1 na přímce h_1 (obr. 2.) jdoucí bodem *3* sestrojíme na základě uvedeného vztahu, vedeme-li bodem o_1 kolmici ku tečně kardioidy s_1 v bodu *9*, jež protne přímku h_1 v dotyčném bodu D_1.

Stanovme centrálný průmět křivky vratu z bodu *1* kardioidy s, ležícího na křivce vratu do půdorysny. Tečna křivky v bodu *1* budiž t a její půdorysná stopa T_1. Vzdálenost $\overline{1T_1} = d$ rovná se patrně polovině délky rektifikované kružnice k_1. Přemístíme-li vrchol řídícího kužele křivky vratu do bodu *1*, bude jeho řídící křivkou v půdorysně kardioida definovaná co úpatnice kružnice i o poloměru $\varrho = \frac{2}{3} d$ a středu Σ na přímce t_1 ($\overline{1\Sigma} = \frac{1}{3} d$) pro pól E', je-li E' koncovým bodem průměru $T_1 E'$. Promítáme-li nyní tečnu h křivky vratu s dotyčným bodem D centrálně z bodu *1*, bude její centrálný průmět ${}^1h'_1$ procházeti půdorysnou stopou π tečny h rovnoběžně ku spojnici $\overline{1, 3}$. Promítáme-li z bodu *1* úběžný bod tečny h, jest jeho promítací paprsek totožný s povrchovou přímkou přemístěného řídícího kužele a půdorysná jeho stopa ε musí ležeti na příslušné řídící

*) *Salmon-Fiedler*: Analytische Geometrie des Raumes. S. 211.

**) *Longchamps*: Rapprochement entre la Trisectrice de Mac-Laurin et la Cardioide. Věstník král. spol. nauk. 1887, p. 601.

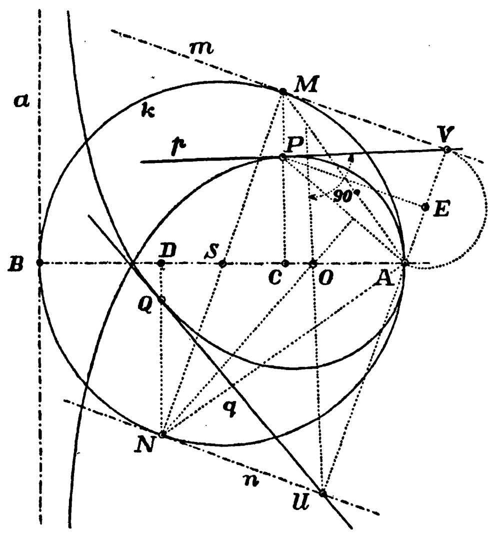
kardioidě, což ovšem vyžaduje by centrálný průmět $^1h'_1$ tečny h, na němž též bod ε musí ležeti, dotýkal se kružnice i. Centrálný průmět D'_1 bodu D jest dotyčný bod tečny $^1h'_1$ s kružnicí i. Tím jsme dokázali, že centrálné průměty všech tečen křivky vratu z bodu *1* obalují kružnici i. *Promítá se tedy křivka vratu z bodu 1 šikmým kruhovým kuželem o vrcholu 1 a řídící kružnici i.*

Promítejme dále křivku vratu směrem její tečny jdoucí bodem *7* kardioidy s, jež jest patrně její reálnou asymptotou. Sestrojíme-li šikmý průmět V' vrcholu V řídícího kužele uvažovaným směrem, jest $V' \equiv VII$. Spojíme-li bod V' se všemi body kardioidy u_1, udávají tyto spojnice směry šikmých průmětů všech tečen křivky prostorové. Stačí proto vésti ku př. bodem *3* přímku rovnoběžnou s $\overline{V'III}$, čímž dostaneme šikmý průmět h' tečny h do roviny kardioidy s. Ze vzájemné polohy kardioid s_1 a u_1 jest patrno, že $\overline{3, 9} \perp \overline{V'III}$ a tedy $\overline{3, 9} \perp h'$, při čemž spojnice $\overline{3, 9}$ prochází bodem vratu *1* kardioidy s_1. Musí proto šikmé průměty všech tečen křivky vratu v rovině kardioidy s obalovati kružnici g' nad průměrem $\overline{1, 7}$, jak patrno z vytvoření kardioidy s co úpatnice kružnice g' pro pól *1*. *Promítá se tedy naše křivka ve směru reálné asymptoty šikmým kruhovým válcem o ose rovnoběžné s touto asymptotou a řídící kružnici g'.*

Šikmý průmět kružnice g' do půdorysny budiž kružnice j. Bod E' dříve uvedené kružnice i jest patrně též koncovým bodem průměru kružnice j a průměry obou těchto kružnic jdoucí bodem E' stojí k sobě kolmo. Kružnice i a j protínají se tedy pod úhlem 90^0. Uvažovanou křivku vratu můžeme proto pokládati za průsečnou křivku výše uvedeného kužele s právě odvozeným šikmým kruhovým válcem o společné povrchové přímce $\overline{E'1}$. Jest tudíž křivka vratu prostorovou křivkou stupně třetího a prochází nekonečně vzdálenými imaginárními body kruhovými, jimiž procházejí též kružnice i a j. Označme ji k_3. Obalová plocha tečných rovin plochy kardioidicko-šroubové podél libovolné kardioidy jest proto plochou čtvrtého řádu a třetí třídy.

Tečna h' dotýká se kružnice g' v bodu D', jenž jest šikmým průmětem dotyčného bodu D přímky h s křivkou vratu k_3. Jeho půdorysný průmět D_1 musí ležeti na tečně h_1 trisekční křivky Mac-Laurinovy a na kolmici z bodu D' ku ose x. Dospěli jsme zde ku následující jednoduché konstrukci trisekční křivky Mac-Laurinovy přímo z tečen i bodů dotyku:

Budiž (obr. 4.) k libovolná kružnice o středu S nad průměrem AB. Veďme dvě libovolné rovnoběžné tečny m a n kružnice k o dotyčných bodech M a N a protněme je kolmicí bodem A k nim vedenou v bodech U a V. Spojme bod U s půlícím bodem O úsečky $\overline{SA}$ a bodem V veďme k této přímce kolmici



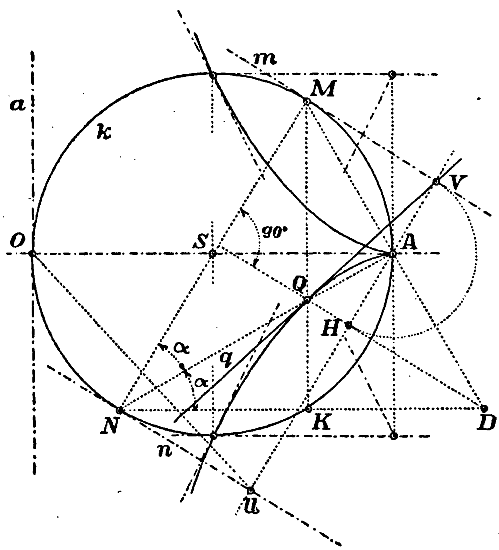
Obr. 4.

p a protněme ji kolmicí s bodu M spuštěnou ku $\overline{SA}$ v bodu P. Dle předcházejícího jest přímka p tečnou a bod P bodem trisekční křivky Mac-Laurinovy. Podobně vedeme-li bodem U kolmici q ku $\overline{VO}$ a protneme-li ji kolmicí s bodu N spuštěnou ku $\overline{SA}$ v bodu Q, dostaneme další tečnu a bod dotyku trisekční křivky. Asymptotou její jest tečna kružnice k v bodu B. Chceme-li naopak v daném bodě P trisekční křivky sestrojiti tečnu, vedeme jím kolmici ku $\overline{SA}$ a ku tečně v jejím průsečíku M s kružnicí k sestrojené spustíme z bodu A kolmici, jejíž patou V prochází hledaná tečna v bodu P. Tuto tečnu můžeme sestrojiti též následovně: Označme C a D paty kolmic spuštěných z bodů M a N ku $\overline{AB}$. Z obrazce jest patrno, že $\triangle NDA \sim \triangle CMA$. Bodu O na straně DA odpovídá bod P na straně MC. Poněvadž $\triangle NUO$ jest rovnoramenný, jest i $\triangle APV$ rovnoramenný a výška jeho $\overline{PE}$ rozpoluje stranu $\overline{AV}$. Tedy $\overline{AE} = \overline{EV}$. Jedná-li se o tečnu trisekční křivky v bodu P, vedeme jím kolmici ku průměru $\overline{AB}$ a ku spojnici jejího průsečíku M s kružnicí k se středem S vedeme bodem A rovnoběžku a bodem P kolmici, jež se protnou v bodu E. Učiníme-li $\overline{AE} = \overline{EV}$, dostaneme tečnu co spojnici $\overline{PV}$.

Promítněme nyní křivku vratu k_3 ve směru tečny v bodu 1 a uvažujme zase průmět do roviny kardioidy s (obr. 2.). Promítneme-li vrchol V řídícího kužele zmíněným směrem, jest jeho šikmý průmět ${}^1V_1 \equiv 1$. Jest proto šikmý průmět h'_1 tečny h jdoucí bodem 3 rovnoběžný ku $\overline{{}^1V'_{III}}$. Z polohy kardioid s_1 a u_1 plyne, že $\overline{{}^1V'_{III}} \perp \overline{7, 9}$, při čemž spojnice $\overline{3, 9}$ prochází bodem vratu kardioidy s_1. Podobně šikmý průmět tečny jdoucí bodem 4 bude kolmý ku spojnici $\overline{7, 10}$ atd. Platí tedy pro tento šikmý průmět křivky vratu konstrukce: Bodem vratu 1 kardioidy s_1 vedeme libovolné přímky protínající kardioidu ve dvou bodech a každým z těchto bodů vedeme kolmici ku spojnici druhého bodu s bodem 7. Kolmice tyto obalují hledaný šikmý průmět křivky vratu, o němž snadno lze dokázati, že jest *cissoidou Diocletovou*. Dotyčné body tečen dostaneme stejným způsobem, jako při trisekční křivce Mac-Laurinově. V daném bodu cissoidy Diocletovy sestrojíme tečnu buď prvním způsobem uvedeným při trisekční křivce nebo též konstrukcí následující: Budiž k kružnice nad průměrem $\overline{OA}$ o středu S (obr. 5.). Zvolme dle naší konstrukce dvě rovnoběžné tečny m a n dotýkající se kružnice k v bodech M a N. Z bodu A k nim vedená kolmice protíná je v bodech U a V. Kolmice vedená bodem V ku spojnici $\overline{UO}$ jest tečnou q Diokletovy cissoidy a protneme-li ji kolmicí s bodu M ku OA spuštěnou, dostaneme její bod dotyku Q. Dle známé konstrukce Diokletovy cissoidy*) musí bod Q též ležeti na spojnici $\overline{NA}$. Veďme bodem N přímku rovnoběžnou s průměrem

*) Dr. *Gino Loria*: Specielle algebraische u. transcendente ebene Kurven. 1910. S. 37.

$\overline{OA}$, jež protíná kružnici k v bodu K a přímku $\overline{MA}$ v bodu D. Pak jest $\sphericalangle\, KNA = \sphericalangle\, ANM = \alpha$, poněvadž jsou to obvodové úhly nad stejnými tětivami kružnice k. Dále jest $\overline{DA} = \overline{AM}$, neboť $\overline{AN} \perp \overline{DM}$. Je-li H průsečík přímek $\overline{DQ}$ a $\overline{UV}$, musí rovněž býti $\overline{HA} = \overline{AV}$. Chceme-li tedy sestrojiti v bodu Q tečnu, vedeme jím kolmici ku průměru $\overline{OA}$, jež protne kružnici



Obr. 5.

k ve dvou bodech, z nichž zvolíme bod M, který se nachází vzhledem k průměru $\overline{OA}$ na opačné straně nežli bod Q. Ku spojnici $\overline{MS}$ vedeme bodem A rovnoběžku a bodem Q kolmici, jež se protnou v bodu H. Přeneseme-li úsečku $\overline{AH}$ od bodu A do bodu V, jest spojnice $\overline{QV}$ hledanou tečnou Diocletovy cissoidy v bodu Q.

Máme-li sestrojiti šikmý průmět křivky vratu do roviny kardioidy s pro zcela obecný směr paprsků x, vedeme vrcholem V řídícího kužele (obr. 2.) rovnoběžku s paprskem $x\,(x_2, x_1)$ a určíme její půdorysnou stopu X'. Šikmý průmět q' tečny jdoucí bodem ku př. 3 jest patrně totožný s přímkou vedenou bodem 3 rovnoběžně ku spojnici $\overline{X'III}$. Otočme bod X' okolo středu o_1 o 90^0 proti směru šroubování do polohy X^* a učiňme $\overline{o_1 O} = \overline{3 o_1 X^*}$. Bod O zaujímá vzhledem ku kardioidě s_1 touž polohu co bod S' ku kardioidě u_1. Bodu III kardioidy u_1 odpovídá bod 9 kardioidy s_1 při čemž jest $\overline{o_1 III} \perp \overline{o_1 9}$. Dále jest $\overline{X'III} \perp \overline{O 9}$, čili šikmý průmět q' tečny jdoucí bodem 3 jest kolmý ku spojnici $\overline{O 9}$, při čemž přímka $\overline{3, 9}$ prochází bodem vratu 1 kardioidy s_1. Podobně sestrojíme průměty ostatních tečen. Bod O, který nazveme krátce pólem šikmého promítání, sestrojíme přímo, vedeme-li bodem ^1V na ose o plochy ve vzdálenosti $3v_0$ rovnoběžku se směrem šikmého promítání, určíme její půdorysnou stopu O_1 a otočíme ji o 90^0 proti směru šroubování do polohy O. Platí tedy pro libovolný směr šikmého promítání konstrukce: *Sestrojíme pól O, vedeme bodem vratu 1 kardioidy s_1 přímky protínající kardioidu s_1 ve dvou bodech a ke spojnici každého tohoto průsečíku s pólem O vedeme druhým průsečíkem kolmici. Tyto kolmice obalují hledaný šikmý průmět křivky vratu do roviny kardioidy s.*

Abychom sestrojili též body dotyčné těchto tečen, použijeme vlastnosti, že průmětem křivky vratu pro směr rovnoběžný s asymptotou křivky byla kružnice g' nad průměrem $\overline{1,7}$. Stopou paprsku vedeného vrcholem V řídícího kužele rovnoběžně s asymptotou křivky vratu k_3 jest bod vratu VII kardioidy u_1. Spojnice $\overline{VII X'}$ jest stopou e' roviny určené oběma uvažovanými směry šikmých paprsků. Musí proto body dotyku průmětů téže tečny křivky vratu oběma těmito směry ležeti na přímce s touto stopou rovnoběžné. Z polohy kardioidy s_1 a u_1 následuje, že stopa e' jest kolmá ku spojnici pólu O s bodem vratu 1 kardioidy s_1. Chceme li tedy na sestrojené tečně q' bod dotyku, vedeme bodem 3 tečnu ku kružnici g' kolmou ku spojnici $\overline{3,1}$ a z jejího bodu dotyčného D' spustíme kolmici ku přímce $\overline{O,1}$, že protne tečnu q' v hledaném bodu dotyku Q'. Asymptota a křivky prochází patrně bodem 7 kolmo ku spojnici pólu O s bodem vratu 1 kardioidy s_1.

(Dokončení.)