jež spolu s body E, F, G tvoří skupinu korresiduální se skupinou A, B, C, D. Ježto tato skupina korresiduální je určena třemi svými body, je tato skupina táž, jako pro křivku K^3_{13}. Obě tyto kubické křivky určují tedy svazek, jehož body base vesměs leží na K^5. Další křivky tohoto svazku, jehož tři body base E, F, G známe, lze lineárně sestrojovati dle odst. 6. Sdružíme tento svazek projektivně se svazkem kuželoseček $[A, B, C, D]$ tak, aby si odpovídaly křivky určené resp. body A_{11}, A_{12}, A_{13}. Oba svazky vytvoří křivku pátého stupně, jež má s hledanou K^5 společné body: A, B, C, D, E, F, G, A_{11}, A_{12}, A_{13}, dalších šest, jež náleží do base svazku kubických křivek, a deset dalších průsečíků s kuželosečkami K^2_{12}, K^2_{13}, celkem dvacet šest bodů, a je s ní tedy totožna.

Tím je provedena lineární konstrukce této křivky, neboť o každém bodu roviny lze lineárně rozhodnouti, zdali ke křivce náleží čili nic.

O racionálních křivkách šestého stupně.

Napsal Dr. **Jan Vojtěch** v Brně.

Každá racionální křivka k-tého stupně v prostoru m-rozměrném může býti pokládána za průmět racionální křivky n-tého stupně prostoru n-rozměrného (pro $k \leqq n$, $m < n$)[1]. Zejména racionální křivky stupně n-tého lze s výhodou pojímati jako projekce racionální normální křivky téhož stupně v prostoru n-rozměrném. Touto methodou možno hravě odvoditi řadu vlastností uvedených křivek, protože racionální normální křivka je útvar jednoduchý. Také z racionálních křivek n-tého stupně v prostoru p-rozměrném ($p < n$) lze vyvozovati vlastnosti křivek k-tého stupně a speciálně křivek n-tého stupně v prostoru m-rozměrném.

---

[1]) *G. Veronese*, Behandlung der projectivischen Verhältnisse der Räume von verschiedenen Dimensionen durch das Princip des Projicirens und Schneidens, Mathem. Annalen 19. (1882) pp. 161—234., spec. p. 208.

Methody této se v theorii křivek příležitostně leckdy používá. Soustavně vyšetřovány tak dosud zejména vlastnosti rac. křivek stupně 4. a 5.[2])

V následujícím odvozeny jsou tímto způsobem některé (projektivní) vlastnosti racionálních křivek 6. stupně: nejprve pro normální křivku prostoru 6-rozměrného a odtud potom pro racionální křivky téhož stupně v prostorech nižších. Přednosti použité methody projekční jsou evidentní: je jednoduchá, jednotná a ovšem ryze geometrická. Cenná je také ta okolnost, že vynikne souvislost vlastností u křivek téhož stupně v různých prostorech.[3])

I.

1. Racionální normální křivka 6. stupně v prostoru 6-rozměrném $V^{6,0}_{1,6}$, stručně C_6[4]), může býti vytvořena buď šesti projektivními svazky 1. řádu prostorů S_5 s osovými prostory S_4, z nichž každý protíná křivku v pěti bodech, nebo dvěma kollineárními svazky 5. řádu přímek se středy na křivce[5]). Protože kollineace uvedených dvou svazků 5. řádu stanovena je sedmi dvojicemi elementů korrespodujících, jest C_6 určena devíti body v S_6, z nichž žádných sedm neleží v S_5.

---

[2]) G. *Marletta*, Studio geometrico della quartica gobba razionale, Annali di matem. (3) 8. (1903) pp. 97—128.

J. *R. Conner*, The rational plane quartic as derived from the normcurve in four dimensions by projection and section, Amer. Journal of mathem. 33. (1911) pp. 203—248.

G. *Marletta*, Sulle curve razionali del quinto ordine, Rendiconti del Circolo matem. di Palermo 19. (1905) pp. 94—119.

[3]) Vlastnosti zde uvedené vyplývají udanou methodou z elementárních vztahů. Další by se objevily z podrobnějšího vyšetřování zejména rac. norm. křivky 6. stupně.

[4]) $V^{c,d}_{a,b}$ ať značí bodovou varietu a-rozměrnou v (lineárním) prostoru b-rozměrném, stupně c-tého rodu d; symbolem C_b stručně označíme racionální křivku 6. stupně v prostoru b-rozměrném (S_b).

[5]) G. *Veronese* na cit. místě. G. *Loria*, Sulle curve razionali normali in uno spazio a *n* dimensioni, Giornale di matem. 26. (1888).

2. Křivkou C_6 stanovena jest v S_6 *polárnost* [6]), v níž sobě odpovídají bod a prostor S_6, určený dotyčnými body oskulačních [7]) S_5, položených bodem tím ke křivce. Odpovídají sobě ovšem dále přímka a S_4, rovina a S_3, z nichž vždy druhý prostor je průsekem polárních S_5, korrespondujících bodům prvního. Incidentní sdružené body a prostory S_5 involutorní této korrelace vytvořují *kvadratickou varietu 5-rozměrnou* (základní varietu polárnosti); na této varietě leží křivka C_6 a oskulační S_5 křivky C_6 dotýkají se jí v bodech této křivky.

3. Jako C_6 jest proťata libovolným prostorem S_5 v 6 bodech (jsouc stupně 6.), tak lze libovolným bodem vésti k ní 6 oskulačních S_5, t. j. *je třídy* 6.

Tečny křivky C_6 *tvoří rozvinutelnou* (oskulační) *plochu stupně* 10., kterou totiž libovolný S_5 protíná v křivce 10. stupně (třídy 6. se 6 hroty), čili libovolný S_4 protíná 10 tečen křivky C_6. Neboť průmět křivky C_6 ze středového prostoru S_3 (obecně položeného) do roviny musí býti racionální křivka 6. stupně (s 10 body dvojnými), tedy třídy 10.

Z oskulačních rovin křivky C_6 *vzniká rozvinutelná* (oskulační) *varieta 3-rozměrná stupně* 12. (proťatá libovolným S_4 v křivce 12. stupně), t. j. libovolný S_3 protíná 12 oskulačních rovin křivky dané. Neboť dotčený průmět křivky C_6 ze středového S_3 do roviny jest (při obecné poloze středového prostoru) křivka 6. stupně 10. třídy bez hrotů, má tedy 12 stacionárních tečen.

Duálně platí: Libovolná rovina protíná 12 oskulačních S_3 křivky C_6, t. j. *oskulační prostory* S_3 *křivky dané tvoří rozvinutelnou* (oskulační) *varietu 4-rozměrnou stupně* 12., kterou totiž libovolný S_3 protíná v křivce 12. stupně.

Konečně *rozvinutelná* (oskulační) *varieta 5-rozměrná, tvořená oskulačními prostory* S_4 *křivky* C_6, *je stupně* 10., jsouc proťata libovolnou rovinou v křivce 10. stupně (6. třídy s 12 hroty);

---

[6]) *W. K. Clifford,* On the classification of loci, Transactions of the R. soc. of London 169. (1878). *G. Castelnuovo,* Studio dell'involuzione generale sulle curve razionali mediante la loro curva normale dello spazio a *n* dimensioni, Atti d. Ist. Veneto (6) 4. (1886).

[7]) Oskulační prostory S_k křivky mají s křivkou dotyk $(k+1)$-bodový.

neboť libovolná přímka protíná 10 oskulačních prostorů S_4 dané křivky.

C_6 nemá elementů S_k dvojných (násobných) (pro $k = 0$ až 5), t j. nemá dvojných ani bodů ani tečen ani oskulačních rovin ani oskulačních S_3, S_4, S_5. Nemá také elementů S_k stacionárních t. j. hrotů a prostorů s dotykem $(k + 2)$-bodovým.

4, Jestliže zvolíme kterékoli dva pětisečné prostory S_4 (z nichž totiž každý má s křivkou C_6 5 společných bodů) a promítáme z nich body křivky C_6, jsou vznikající tak svazky 1. řádu prostorů S_5 (s osovými S_4) projektivní; odpovídají sobě prostory S_5 promítající týž bod křivky. Za osové S_4 možno speciálně zvoliti oskulační prostory křivky.

Vzhledem k uvedené polárnosti platí duálně: Bodové řady na dvou přímkách, z nichž každá je průsekem pěti oskulačních prostorů S_5 křivky C_6 (spec. na dvou tečnách křivky), jsou projektivní tak, že sobě korrespondují body vymezené na nich týmž oskulačním prostorem S_5 křivky.

Odtud vyplývá: *Čtyři oskulační prostory S_5 křivky C_6 proťaty jsou tečnami jejími ve čtveřinách téhož dvojpoměru.*

5. Svazky 1. řádu prostorů S_5, jimiž se ze zvolených prostorů S_4 křivky C_6 promítají její body, jsou — jak uvedeno — projektivní a vytvořují podle počtu svého následující variety, jež všechny ovšem obsahují C_6.

Dva takové svazky vytvořují 5-rozměrnou kuželovou varietu 2. stupně, jejímž vrcholem je rovina (vytvořující prostory S_4 této variety procházejí touže rovinou, průsekem osových S_4). Z tří projektivních svazků prostorů S_5 s osovými pětisečnými S_4 vzniká 4-rozměrná kuželová varieta 3. stupně, jejíž S_3 procházejí týmž bodem, vrcholem variety. Výtvorem čtyř resp. pěti svazků uvedené povahy jest 3-rozměrná resp. 2-rozměrná varieta 4. resp. 5. stupně, jejíž vytvořující elementy jsou roviny resp. přímky.

Přímková plocha 5. stupně, posléze uvedená, proťata je každým prostorem S_5 v racionální (normální) křivce 5. stupně.

6. Promítneme-li [8]) C_6 z jejího bodu A do prostoru S_5,

---

[8]) *A. Brambilla*, Intorno alle curve razionali in uno spazio lineare ad un numero qualunque di dimensioni, Rendiconti d. Ist. Lombardo (2) 19. (1886).

obdržíme racionální křivku 5. stupně. K této lze z libovolného bodu B' v S_5 vésti 5 oskulačních S_4 (s dotykem 5-bodovým), jichž dotyčné body určují prostor S_4, jdoucí bodem B'; B' a tento S_4 jsou totiž sdruženy v nulovém systému prostoru S_5, stanoveném tam uvedenou racionální (normální) křivkou 5. stupně. Vrátíme-li se do S_6, nalézáme:

Libovolným bodem B v S_6 a bodem A křivky C_6 lze vésti 5 prostorů S_5, jež mají jinde s křivkou dotyk 5-bodový; prostor S_5, určený dotyčnými body těchto S_5 a bodem A křivky, prochází bodem B.

Podobnou cestou obdržíme větu: *Libovolným bodem v S_6 a trojsečnou rovinou křivky C_6 možno vésti 3 prostory S_5, mající s křivkou jinde dotyk 3-bodový; prostor S_5, položený dotyčnými těmito body a rovinou trojsečnou, prochází oním bodem.*

7. V prostoru S_6 vyskytují se přímky dvojího druhu: v některých se protíná 5 oskulačních S_5 křivky C_6, v jiných nikoli; oněch je ∞^5, protože tolikéž je pětisečných S_4 křivky C_6.

Prostor S_3 možno v S_6 voliti buď tak, že je obsažen v (jednom) pětisečném S_4 křivky C_6, nebo tak, že není obsažen v žádném takovém prostoru. Na základě polárnosti plyne odtud: *Rovina v S_6 obsahuje buď jednu přímku, v níž se protíná 5 oskulačních S_5 křivky C_6, nebo neobsahuje žádnou.*

Rovinou v S_6 neprochází žádný pětisečný S_4 křivky C_6 nebo jí prochází jeden takový prostor nebo nekonečně mnoho, jež tvoří varietu 2. stupně; jestliže je totiž rovina obsažena ve dvou pětisečných S_4, prochází jí ∞^1 takových prostorů. Z toho vyvozujeme:

V S_3 prostoru S_6 neexistuje buď žádná přímka, v níž se protíná 5 oskulačních S_5 křivky C_6, nebo existuje jedna nebo ∞^1 tvořících plochu 2. stupně (jednu soustavu plošných přímek jejích).

II.

8. Promítneme-li C_6 z bodu obecně položeného (středu projekce O) do prostoru S_5, vznikne v tomto racionální křivka 6. stupně, kterou označíme stručně C_5.

C_5 *má třídu* 10., t. j. libovolným bodem v S_5 lze k ní vésti 10 oskulačních S_4; neboť libovolná přímka (vedená bodem O) protíná 10 oskulačních S_4 křivky C_6.

C_5 má *tři rozvinutelné variety oskulační*: 2-rozměrnou *stupně 10.* tvořenou tečnami (libovolný S_3 protíná totiž 10 tečen křivky C_5), 3-rozměrnou *stupně 12.* tvořenou oskulačními rovinami křivky a 4-rozměrnou *12. stupně* tvořenou oskulačními prostory S_3.

Křivka C_5 *má 6 stacionárních*[9] *prostorů* S_4. Neboť bodem O v S_6 lze vésti 6 oskulačních S_5 ke křivce C_6, jež se promítají v stacionární S_4 křivky C_5.

9. Projekcí základní kvadratické variety polárnosti (uved. v odst. 2.) z bodu do S_5 vznikne 4-rozměrná varieta 2. stupně (vepsaná rozvinutelné varietě oskulačních S_3). *Stacionární prostory S_4 křivky C_5 dotýkají se této variety 2. stupně v dotyčných bodech svých na křivce.*

Z věty uvedené v odst. 4. — promítneme-li totiž útvar složený z křivky C_6, z jejích šesti oskulačních S_5 jdoucích bodem O a z tečen jejích — vyplývá:

Skupiny bodové, v nichž tečny křivky C_5 protínají jejích šest různých stacionárních prostorů S_4, jsou projektivní[10]).

Projekcí z bodu $O \equiv B$ odvozujeme z věty nalezené v odst. 6.:

Z bodu na křivce C_5 lze vésti 5 prostorů S_4 oskulačních ke křivce (jež mají s C_5 jinde dotyk 5-bodový); *prostor S_4 dotyčnými body jejich určený prochází oním bodem křivky.*

10. Všimněme si polohy bodu O k pětisečným prostorům S_4 křivky C_6. Snadno nahlédneme, že bod O nelze tak voliti, aby jím neprocházel žádný nebo procházel jeden pětisečný prostor S_4 křivky C_6; prochází jím vždy nekonečně mnoho takových prostorů.

Křivku C_6 možno totiž pokládati za výtvor dvou projektivních svazků 5. řádu přímek se středy A_1 a A_2 na křivce.

---

[9]) Stacionární prostor S_k křivky má s ní dotyk $(k+2)$-bodový.

[10]) Tuto a některé jiné vlastnosti odvozuje analyticky G. *Loria*, Intorno alle curve razionali d'ordine n dello spazio a $n-1$ dimensioni, Rendiconti d. Circolo matem. di Palermo 2. (1888).

Spojnici p_1 bodu O s bodem A_1 odpovídá ve svazku se středem A_2 přímka p_2, neprocházející bodem O (leží-li O mimo křivku, jak předpokládáme). Rovině p_2O odpovídá rovina jdoucí přímkou $p_1 \equiv A_1O$; výtvorem projektivních svazků 3. řádu s těmito rovinami jako osovými jest 3-rozměrná kuželová varieta 4. stupně s vrcholem v bodě O. Pětisečné prostory S_4 křivky C_6 jdoucí bodem O (v počtu ∞^3) obsahují vytvořující roviny této variety.

V S_5 proto platí: *Pětisečné prostory S_3 křivky C_5 obsahují vytvořující přímky plochy 4. stupně.*

11. Zvolíme-li střed projekce O v oskulačních prostorech křivky C_6, dostaneme promítnutím *speciální křivku* C_5; při tom sníží se její třída a zmenší se počet jejích prostorů stacionárních. Případu, kdy O je na křivce C_6, netřeba připomínati; projekcí v S_5 je tu racionální křivka 5. stupně (normální).

Je-li O v obecném bodě variety tvořené oskulačními S_4 křivky C_6, vznikne C_5 *třídy 9. se stacionárním prostorem* S_3, *mající jen 4 stacionární* S_4. Neboť libovolná přímka jdoucí bodem O (jenž je v oskulačním S_4) protíná už jen 9 jiných oskulačních S_4; oskulační S_4 obsahující O promítá se v stacionární S_3, který platí za 2 stacionární S_4, protože oskulační S_4 křivky C_6 je průsekem dvou sousedních oskulačních S_5.

Je-li O v průseku dvou oskulačních S_4 křivky C_6, dostaneme C_5 *třídy 8. s dvěma stacionárními* S_3 *a dvěma stacionárními* S_4. Jestliže zmíněné dva oskulační S_4 křivky C_6 jsou sousední, t. j. je-li O v obecném bodě variety tvořené oskulačními S_3, má vznikající C_5 (*třídy 8.*) *stacionární rovinu a tři stacionární* S_4.

C_5 *třídy 7. s jednou stacionární rovinou, jedním stacionárním* S_3 *a jedním stacionárním* S_4 nebo *se stacionární přímkou* (tečnou) *a dvěma stacionárními* S_4 vznikne, položíme-li O do průseku oskulačních S_3 a S_4 křivky C_6 resp. do obecného bodu variety tvořené oskulačními rovinami křivky C_6.

Konečně nejspeciálnější křivky C_5 obdržíme, zvolíce O na tečně křivky C_6 nebo v průsečíku její oskulační roviny a oskulačního S_4 nebo v průsečíku dvou oskulačních S_3 nebo v průsečíku tří oskulačních S_4; povstanou tak křivky C_5 *třídy 6.*, z nichž první *má hrot a jeden stacionární* S_4, druhá *stacionární* *tečnu a stacionární* S_3, třetí *dvě stacionární roviny* a čtvrtá *tři stacionární prostory* S_3.

12. Každá kollineace v S_6, při níž je C_6 invariantní, indukuje na této projektivnost její řady bodové; a naopak projektivnost na C_6 má za následek kollineaci prostoru ji obsahujícího, při níž je křivka invariantní. Aby taková souvislost existovala mezi kollineací prostoru S_5 a projektivností na invariantní křivce C_5, musí býti v S_6 invariantní střed projekce a tedy skupina oskulačních prostorů křivky jím procházejících, pročež i skupina dotyčných bodů prostorů těch na křivce. I platí věta:

Aby v S_5 *existovala kollineace s invariantní křivkou* C_5, *k tomu je nutno a stačí, aby na* C_5 *byla projektivnost s invariantní skupinou dotyčných bodů prostorů stacionárních* [11]).

Vskutku je-li v S_5 kollineace s invariantní křivkou C_5, jest v S_6 kollineace s invariantní C_6 a středem projekce, tedy s invariantní skupinou oskulačních prostorů bodem tím jdoucích a proto v S_5 na C_5 projektivnost s invar. skupinou dotyčných bodů prostorů stacionárních. Naopak, je-li na C_5 projektivnost s invariantní takovou skupinou, je na C_6 projektivnost obdobné vlastnosti a v S_6 kollineace s invariantní C_6 a bodem, proto v S_5 kollineace s invariantní C_5.

Protože existuje ∞^1 projektivností na C_5 s invariantními dvěma body, vyplývá z hořejší věty:

Křivky C_5 *třídy 6. s dvěma* (pouze) *prostory stacionárními jsou invariantní při* ∞^1 *kollineacích prostoru svého.*

Křivek takových jsou, jak uvedeno v odst. 11., tři typy; pro typus s dvěma stacionárními rovinami platí mimo to:

Křivka C_5 *s dvěma rovinami stacionárními jest invariantní při* ∞^1 *involutorních kollineacích svého prostoru.*

Při každé této involutorní kollineaci zaměňují se obě stacionární roviny. Dvě takové kollineace involutorní mají za produkt kollineaci prve uvedenou (a naopak).

---

11) *G. Loria* na místě cit. v pozn. 10).

III.

13. Racionální křivku 6. stupně v prostoru S_4 (označme ji C_4) obdržíme projekcí křivky C_6 z přímky obecně položené (p) nebo projekcí křivky C_5 z bodu mimo ni ležícího. Promítající kuželová varieta 6. stupně je v prvém případě složena z rovin, z druhém z přímek.

Obecná křivka C_4 je *třídy 12.* (libovolným bodem lze k ní vésti 12 oskulačních prostorů S_3), jak poznáme buď na základě křivky C_5 nebo C_6.

C_4 má *dvě rozvinutelné variety oskulační,* a to plochu tečen *stupně 10.* a 3-rozměrnou varietu oskulačních rovin *12. stupně* (t. j. libovolná přímka protíná 12 oskulačních rovin křivky C_4).

Obecná C_4 má *10 stacionárních prostorů* S_3. Vyvodíme to třebas odtud, že z libovolného bodu v S_5 (středu projekce) lze vésti k C_5 10 oskulačních S_4. Stacionární prostory S_3 křivky C_4 dotýkají se (3-rozměrné) variety 2. stupně.

14. Spojme přímku p (středovou přímku projekce) s bodem A_1 na křivce C_6; této rovině $\alpha_1 \equiv pA_1$ odpovídá ve svazku se středem A_2, který jest se svazkem středu A_1 projektivní a vytvořuje s ním křivku C_6, rovina α_2. Rovina α_2 může míti trojí polohu k p: buď neprotíná p nebo ji protíná nebo ji obsahuje. V posledním případě je p bisekantou křivky a promítáním vznikne v S_4 křivka 4. stupně; zbývají tedy dva případy.

V prvém položme rovinou α_2 a přímkou p prostor S_4, jemuž ve svazku se středem A_1 odpovídá prostor, jenž s ním má společnou rovinu jdoucí přímkou p. Pětisečné tyto prostory S_4 křivky C_6 jsou osovými prostory svazků, jež vytvořují 5-rozměrnou kuželovou varietu 2. stupně s vrcholovou rovinou. V druhém případě určují rovina α_2 a přímka p prostor S_3; tento a jemu odpovídající prostor bodem A_1 jsou osovými prostory svazků, které vytvořují 4-rozměrnou kuželovou varietu 3. stupně s vrcholovou přímkou p; vytvořující S_3 této variety jsou obsaženy v pětisečných S_4 křivky, jež jdou přímkou p.

Docházíme takto pro C_4 k výsledku: *Křivek C_4 jsou dva druhy: jejich pětisečné roviny buď tvoří 3-rozměrnou kuželovou* *varietu 2. stupně s vrcholem v bodě nebo obsahují vytvořující přímky plochy 3. stupně.*

15. Na C_4 existuje *involuce 6. stupně 1. řádu* I_1^6 (t. zv. *fundamentální*), konjugovaná k involuci I_4^6, vymezené na křivce prostory S_3. Obě involuce ty jsou průměty [12]) involucí vytčených na C_6 prostory S_5, jež patří jednak do svazku s osovým S_4, jednak do svazku s osovým S_1, při čemž S_1 je přímka, z níž C_6 promítáme v C_4, S_4 pak prostor k S_1 polární vzhledem k C_6. Skupiny fundamentální involuce jsou na C_4 tvořeny také projekcemi (ze středové přímky) bodů křivky C_6, v nichž se křivky té dotýkají oskulační prostory její, jdoucí jednotlivými body přímky středové. Z této povahy fundamentální involuce vyplývá:

Křivka C_4 je invariantní při kollineacích prostoru S_4 ji obsahujícího, jež jsou určeny projektivnostmi na křivce, při kterých je invariantní fundamentální involuce její [13]).

16. Duálním elementem k pětisečnému prostoru S_4 křivky C_6 je přímka, v níž se protíná 5 oskulačních S_5 křivky té. Promítneme-li C_6 do S_4 z takové přímky, obdržíme C_4 *s pěti hyperoskulačními* [14]) S_3 (s dotykem 6-bodovým). Protože tečny křivky C_6 protínají pevné oskulační prostory S_5 v projektivních skupinách bodů, platí:

Hyperoskulační prostory S_3 křivky C_4 (jsou-li různé) *vymezují na tečnách křivky projektivní skupiny bodové.*

O křivce C_4 s pěti hyperoskulačními S_3 platí dále:

Každá skupina fundamentální involuce na křivce skládá se z pěti dotyčných bodů hyperoskulačních S_3 a kteréhokoli bodu na křivce.

Neboť pět hyperoskulačních S_3 křivky C_4 jsou průměty pěti oskulačních S_5 křivky C_6 z jejich průseku, středové přímky. Prostor S_4, polární k této přímce vzhledem k C_6, určen jest

---

[12]) *L. Berzolari*, Sulle curve razionali di uno spazio lineare ad un numero qualunque di dimensioni, Annali di matem. (2) 21. (1893).

[13]) Srv. *G. Marletta*, Sulle curve razionali del quinto ordine, l. c.[2]) p. 105.

[14]) Hyperoskulační (také stacionární singulární) prostory křivky n tého stupně slují prostory, jež mají s křivkou dotyk nejvyššího stupně (n-bodový).

dotyčnými body uvedených pěti oskulačních S_5; prostory S_5 svazku s osovým oním S_4 protínají C_6 v involuci, jejímž průmětem na C_4 je involuce fundamentální. Je tedy patrno, že každá skupina fundam. involuce na C_4 obsahuje dotyčné body jejích S_3 hyperoskulačních.

Z podmínky pro automorfní kollineaci křivky C_4 (uved. v odst. 15.) vyvozujeme vzhledem k větě právě vytčené:

Křivka C_4 s pěti hyperoskulačními S_3 je invariantní při kollineacích prostoru S_4, jež přísluší k projektivnostem na křivce s invariantní skupinou dotyčných bodů prostorů hyperoskulačních.

IV.

17. Racionální křivku 6. stupně v obyčejném prostoru (C_3) lze pokládati za projekci buď křivky C_6 z roviny nebo křivky C_5 z přímky nebo křivky C_4 z bodu. Středové elementy projekce nesmějí ovšem býti incidentní s křivkou promítanou.

Obecná C_3 je třídy 12.; vyplývá to na př. odtud, že přímka protíná 12 oskulačních rovin křivky C_4 (S_3 protíná 12 oskulačních rovin křivky C_6). *Rozvinutelná plocha tečen křivky C_3 je stupně 10.* (třídy 12., jak uvedeno); libovolná přímka protíná tedy 10 tečen křivky. Plocha ta je průmětem oskulačních ploch (tvořených tečnami) racionálních křivek 6. stupně ve vyšších prostorech.

Obecná C_3 má 12 stacionárních rovin; plyne to na př. z třídy křivky C_4 (bodem — středem projekce lze vésti 12 oskulačních S_3 k C_4) nebo ze stupně variety oskulačních S_3 křivky C_6 (rovina, středová pro projekci, protíná 12 oskulačních S_3 křivky C_6).

18. Oskulační prostory S_3 křivky C_6 dotýkají se kvadratické základní variety polárnosti, kterou C_6 v S_6 určuje. Odtud vychází promítnutím:

Stacionární roviny křivky C_3 dotýkají se plochy 2. stupně.

Protože průmět křivky C_3 v S_2 musí býti racionální, prochází bodem v S_3 10 bisekant křivky C_3 (tečny v to počítaje) čili *obecná křivka C_3 má 10 zdánlivých bodů dvojných.*

Z bodu křivky C_3 lze k ní vésti 6 trisekant. Neboť ze svého bodu promítá se C_3 do roviny v racionální křivku

5. stupně, tedy s 6 body dvojnými; každý z nich je průsečíkem trisekanty s rovinou. Jest tedy C_3 šestinásobnou křivkou plochy, kterou vytvořují její trisekanty.

19. V S_6 jsou zajisté prostory S_4, jež nejsou pětisečnými prostory křivky C_6. Každý z nich je protat pětisečnými S_4 v ∞^5 rovinách; poněvadž má rovin ∞^6, existují v S_6 roviny, jimiž nelze vésti pětisečný S_4 ke křivce C_6. Jsou tam ovšem i roviny, jimiž prochází jeden pětisečný S_4 křivky C_6. Jakmile však možno rovinou vésti ke křivce C_6 dva pětisečné S_4, lze takových prostorů vésti ∞^1, které tvoří 5-rozměrnou kuželovou varietu 2. stupně se středovou rovinou. Neboť ony dva S_4 lze zvoliti za osové prostory dvou svazků prostorů S_5, jichž korrespondující členy (promítající týž bod křivky) protínají se v pětisečných S_4, jdoucích jejich rovinou. Projekcí do S_3 vyvozujeme z uvedeného:

V prostoru S_3 existují tři druhy racionálních křivek 6. stupně: Křivka C_3 buď nemá žádnou nebo má jednu pětisečnou přímku nebo má nekonečně mnoho přímek pětisečných; v posledním případě tvoří tyto přímky plochu 2. stupně (jednu soustavu plošných přímek jejích) [15]).

Vzhledem k třetímu typu křivek C_3 můžeme říci: *Má-li křivka C_3 dvě pětisečné přímky, má jich ∞^1 tvořících soustavu plochy 2. stupně. Dva svazky rovin, jimiž se body křivky C_3 z jejích dvou pětisečných přímek promítají, jsou projektivní; korrespondující roviny protínají se v pětisečných přímkách křivky, jež vytvořují plochu 2. stupně.*

20. Na C_3 existuje *fundamentální involuce I_2^6*, jejíž skupiny jsou konjugovány (apolární) ke skupinám bodovým, vyme-

---

[15]) Racionální křivky 6. stupně jsou křivky *nejnižšího stupně*, kterých v S_3 existují s tohoto hlediska *tři druhy* (u křivek n-tého stupně existuje totiž také druh bez $(n-1)$-sečné přímky jen pro $n \gtreqless 6$). Racionální křivka 5. stupně musí už míti aspoň jednu čtyrsečnou přímku; o známé této vlastnosti křivek 5. stupně (kterou dokázali *E. Bertini*, *Em. Weyr* a j.) můžeme se jednoduše přesvědčiti takto: Čtyrsečné S_3 racionální normální křivky 5. stupně v S_5 protínají S_3, který není čtyrsečným, v ∞^4 přímek; není proto v S_5 přímek, jimiž by neprocházel čtyrsečný S_3. Projekcí z přímky do S_3 nalézáme tedy, že neexistuje rac. křivka 5. stupně v S_3 bez čtyrsečné přímky (průmětu čtyrsečného S_3).

zeným na C_3 rovinami prostoru. Fundam. tato involuce jest průmět oné involuce na křivce C_6 (z níž vznikla projekcí C_3), kterou tam stanoví prostory S_5 svazku 2 řádu s osovým prostorem S_3. polárním k středové rovině projekce vzhledem k C_6.

Fundamentální involuce na C_3 je důležitá při vyšetřování kollineací prostoru S_3, při nichž je C_3 invariantní (v. odst. 15.). Neboť platí:

Projektivnost na C_3, při níž jest invariantní fundamentální involuce na křivce, určuje v S_3 kollineaci s invariantní křivkou C_3.

21. Křivka C_3 může míti nejvýše *4 hyperoskulační roviny.* Neboť jen 4 oskulační S_5 protínají se u C_6 v téže rovině; jejich průměty z této roviny do S_3 jsou roviny hyperoskulační.

Z vlastnosti tečen křivky C_6, uvedené v odst. 4., plyne (protože přímky protínající čtyři roviny v čtveřinách téhož dvojpoměru tvoří t. zv. tetraedrální komplex přímek):

Tečny křivky C_3, jež má čtyři různé roviny hyperoskulační, náležejí tetraedrálnímu komplexu, jehož základní čtyrstěn tvoří tyto roviny.

O uvažované křivce platí: *Skupiny fundamentální involuce na křivce C_3 se čtyřmi hyperoskulačními rovinami obsahují vesměs dotyčné body čtyř těchto rovin a dva kterékoli body křivky*[16]. Neboť prostory S_5 vymezující na C_6 involuci, jejímž průmětem je fundam. involuce na C_3, procházejí prostorem S_3, polárním k středové rovině projekce vzhledem k C_6. Tento S_3 určen je však dotyčnými body čtyř oskulačních S_5 křivky C_6, které se promítají (z jejich průseku) v hyperoskulační roviny křivky C_3; obsahují tedy prostory S_5, jdoucí uvedeným S_3, jen dva proměnlivé body křivky.

Ze složení fundamentální involuce křivky C_3 s čtyřmi rovinami hyperoskulačními a z významu této involuce pro kollineace prostoru S_3 s invariantní křivkou C_3 vyvozujeme:

Křivka C_3 se čtyřmi rovinami hyperoskulačními je invariantní při kollineacích, určených projektivnostmi na křivce, při nichž je invariantní skupina dotyčných bodů těchto rovin.

---

[16]) *E. Ciani,* Sopra le curve gobbe razionali dotate di quattro punti d'iperosculazione, Rendiconti d. Circolo matem. di Palermo 26. (1908), s odvozením analytickým.

Podle toho, zdali skupina čtyř dotyčných bodů hyperoskulačních rovin křivky C_3 je obecná nebo harmonická nebo ekvianharmonická, možno rozeznávati tři typy křivek C_3 se čtyřmi rovinami hyperoskulačními [17]).

22. Položíme-li středovou rovinu projekce do průseku dvou oskulačních prostorů S_4 křivky C_6, obdržíme jako průmět křivku C_3, jež má *dvě tečny s dotykem 5-bodovým*. Křivku tuto možno pokládati za speciální případ křivky, o níž jednáno v odst. 21.

Křivka C_3 o dvou tečnách s dotykem 5-bodovým *je invariantní při* ∞^1 *dvojosých kollineací involutorních*; každá kollineace tato určena je involutorní projektivností na křivce, jež zaměňuje dotyčné body obou uvedených tečen. Křivka ta je však *invariantní i při* ∞^1 *kollineací* (neinvolutorních), které příslušejí k projektivnostem na křivce s oněmi dvěma body jako samodružnými. Každá z těchto kollineací je produktem dvou involutorních kollineací hořejších.

V.

23. Racionální křivku 6. stupně v rovině (C_2) lze obdržeti projekcí buď křivky C_6 ze středového S_3 (jenž s ní nemá společného bodu) nebo křivky C_5 ze středové roviny nebo křivky C_4 ze středové přímky nebo konečně křivky C_3 z bodu jako středu (za obdobných podmínek).

C_2 a křivka 10. stupně 6. třídy, jež je řezem 5-rozměrné oskulační variety křivky C_6 s rovinou křivky C_2, jsou polárně reciproké vzhledem ke kuželosečce, v níž rovina křivky C_2 protíná kvadratickou základní varietu polárnosti stanovené křivkou C_6.

24. *Fundamentální involuce* na křivce C_2 je I_3^6. Obdržíme ji tím, že zvolíme v S_6 rovinu polární k onomu prostoru S_3, z něhož C_6 promítáme v C_2 (v polárnosti určené v S_6 křivkou C_6), protneme křivku C_6 prostory S_5 svazku 3. řádu s onou rovinou jako osovou a vymezené takto skupiny bodové promítneme do roviny; dají skupiny fundam. involuce.

---

[17]) Grupami automorfních kollineací těchto křivek zabývá se *E. Ciani* na uv. místě [16]).

Z uvedené polárnosti vyplývá, že skupiny fundam. involuce na C_2 určeny jsou také body středového prostoru S_3; každá skupina této involuce je totiž průmětem skupiny dotyčných bodů šesti oskulačních S_5 jdoucích bodem prostoru S_3 ke křivce C_6. Odtud také je patrno, že skupiny fundam. involuce jsou apolární ke skupinám involuce I_2^6, jež na C_2 jsou vytčeny přímkami roviny její; jeť podmínkou apolárnosti dvou skupin bodových incidence elementů, jimiž skupiny ty jsou stanoveny.

Jako pro C_4 a C_3 platí i pro C_2: *Projektivnost na křivce* C_2, *při které je invariantní fundamentální involuce křivky, určuje kollineaci roviny s invariantní* C_2.

25. Křivka C_2 může míti nejvýš *3 hyperoskulační přímky* (tečny); vznikne z C_6 projekcí z takového S_3, který je průsekem tří oskulačních S_5 křivky té.

Uvedené tři oskulační prostory S_5 křivky C_6 dotýkají se ve svých dotyčných bodech na křivce (spolu s ostatními oskul. S_5) základní kvadratické variety polárnosti, stanovené křivkou C_6 v S_6; odtud projekcí dostáváme:

U křivky C_2 *s třemi přímkami hyperoskulačními náležejí tyto přímky a jejich dotyčné body* (jako tečny a body) *téže kuželosečce* [18]).

Protože rovina polární v S_6 k středovému S_3 projekce obsahuje dotyčné body tří oskulačních S_5, z nichž vznikají tečny hyperoskulační, platí: *Fundamentální involuce křivky* C_2 *s třemi hyperoskulačními tečnami má skupiny, jež všechny obsahují dotyčné body těchto tří tečen a tři libovolné body na* C_2.

Vzhledem k významu fundam. involuce (vytčenému v odst. 24.) patří ke každé projektivnosti na C_2 s invariantní skupinou tří dotyčných bodů přímek hyperoskulačních kollineace roviny s invariantní křivkou C_2. I máme větu:

Křivka C_2, *jež má tři tečny s dotykem šestibodovým, je invariantní při grupě šesti kollineací své roviny.*

Kollineace této grupy odpovídají těm projektivnostem na křivce, při nichž tři uvedené body její se zaměňují. Grupa ta obsahuje mimo identitu tři kollineace involutorní a dvě cyklické s periodou 3.

[18]) *L. Brusotti*, Sulle curve piane razionali dotate di tre punti d'iperosculazione, Rendiconti d. Ist. Lombardo 37. (1904).