Alois Strnad

O sestrojení pravidelného sedmnáctiúhelníka

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 36 (1907), No. 1, 81--86

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/109261`

Příloha k Časopisu pro pěstování mathematiky a fysiky.

O sestrojení pravidelného sedmnáctiúhelníka.

Napsal ředitel **A. Strnad** v Kutné Hoře.

Pravidelný sedmnáctiúhelník sestrojiti lze konstrukcí elementárně geometrickou, užívající toliko přímek a kružnic. Ve XXXIII. ročníku tohoto Časopisu (str. 543—558) podal jsem jednoduché sestrojení tohoto útvaru, které založeno jsouc na konstrukci Serretově, bylo z této po příhodné úpravě vyvozeno transformací převratnými průvodiči. Sestrojení to lze však ještě zjednodušiti a neodvisle odůvodniti užitím prostředků, které i mladým čtenářům těchto listů jsou přístupny.

a) Stanovme nejprve součet řady

$$S = \cos\varphi + \cos 2\varphi + \cos 3\varphi + \ldots + \cos k\varphi.$$

Znásobme ji součinem $2\cos\varphi$ a užijme vzorce

$$2\cos\alpha\cos\beta = \cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta);$$

obdržíme tak

$$2S\cos\varphi = 2S + 1 - \cos\varphi - \cos k\varphi + \cos(k+1)\varphi,$$

a z toho po náležitém zjednodušení

$$S = \frac{\cos\frac{k+1}{2}\varphi \cdot \sin\frac{k}{2}\varphi}{\sin\frac{\varphi}{2}}. \tag{1}$$

Je-li $\varphi = \frac{4R}{17}$, $k = 16$, jest

$$S = \frac{\cos\frac{17\varphi}{2}\sin 8\varphi}{\sin\frac{\varphi}{2}};$$

avšak $\frac{17\varphi}{2} = 2R$, $8\varphi = \frac{32R}{17} = 2R - \frac{2R}{17} = 2R - \frac{\varphi}{2}$, pročež

při dané hodnotě φ

$$cos\,\varphi + cos\,2\varphi + cos\,3\varphi + \,.\,.+ cos\,16\varphi = -1. \quad (2)$$

Uvážíme-li, že $17\varphi = 4R$, a tudíž

$$cos\,2\varphi = cos\,15\varphi,\ cos\,4\varphi = cos\,13\varphi, \text{ atd.},$$

můžeme pro liché násobky φ psáti

$$cos\,\varphi + cos\,3\varphi + cos\,5\varphi + \ldots + cos\,15\varphi = -\tfrac{1}{2}. \quad (3)$$

Rozložme tento součet dle *Gausse* a *Legendrea* *) ve dvě skupiny

$$\left.\begin{array}{l} cos\ \ \varphi + cos\,9\varphi + cos\,13\varphi + cos\,15\varphi = m \\ cos\,3\varphi + cos\,5\varphi + cos\ \ 7\varphi + cos\,11\varphi = n. \end{array}\right. \quad (4)$$

Dle rovnice (3) jest

$$m + n = -\tfrac{1}{2};$$

utvoříme-li součin mn, nabudeme

$$mn = 2\,(cos\,\varphi + cos\,2\varphi + cos\,3\varphi + \ldots + cos\,8\varphi)\,;$$

dle rovnice (2) jest však

$$\begin{array}{c} cos\,\varphi + cos\,2\varphi + cos\,3\varphi + \ldots + cos\,8\varphi = \\ cos\,9\varphi + cos\,10\varphi + cos\,11\varphi + \ldots + cos\,16\varphi = -\tfrac{1}{2}, \end{array}$$

pročež

$$mn = -1.$$

Jsou tudíž m, n kořeny kvadratické rovnice

$$m^2 + \tfrac{1}{2}m - 1 = 0;$$

jelikož $cos\ 5\varphi$, $cos\ 7\varphi$, $cos\ 11\varphi$ jsou záporné, $cos\ 3\varphi$ kladný, ale prosté hodnoty menší než $cos\ 7\varphi$, jest dle druhé z rovnic (4) n záporné, tudíž m kladné. Proto obdržíme řešíce poslední rovnici

$$m = \frac{\sqrt{17} - 1}{4},\quad n = -\frac{\sqrt{17} + 1}{4};$$

položíme-li $m = cotg\,\alpha$, bude $n = -\,tg\,\alpha$.

*) Viz na př. *Legendre*, Éléments de géométrie, 9ième édition, pag. 429 aneb *Gélin*, Éléments de trigonométrie, pag. 233.

Rozložme dále m a n ve skupiny dvojčlenné

$$\begin{aligned} \cos\ \varphi + \cos 13\varphi &= p \\ \cos 9\varphi + \cos 15\varphi &= q, \end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned} \cos 3\varphi + \cos\ 5\varphi &= r \\ \cos 7\varphi + \cos 11\varphi &= s. \end{aligned} \tag{6}$$

Bude pak

$$p + q = m,$$

$$2pq = \cos\varphi + \cos 2\varphi + \cos 3\varphi + \ldots + \cos 8\varphi = -\tfrac{1}{2},$$

$$pq = -\tfrac{1}{4};$$

jsou proto p, q kořeny kvadratické rovnice

$$p^2 - mp - \tfrac{1}{4} = 0.$$

Poněvadž $\cos\varphi$ i $\cos 13\varphi$ jsou kladné, jest též p kladným, q proto záporným. Jest tedy

$$p = \frac{m}{2} + \sqrt{\frac{m^2+1}{4}} = \frac{1}{2}(\operatorname{cotg}\alpha + \operatorname{cosec}\alpha) = \frac{1}{2}\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2},$$

$$q = \frac{m}{2} - \sqrt{\frac{m^2+1}{4}} = \frac{1}{2}(\operatorname{cotg}\alpha - \operatorname{cosec}\alpha) = -\frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}.$$

Rovněž tak jest

$$r + s = n, \quad rs = -\tfrac{1}{4},$$

$$r = \frac{n}{2} + \sqrt{\frac{n^2+1}{4}} = \frac{1}{2}(-\operatorname{tg}\alpha + \sec\alpha) = \frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{R-\alpha}{2}$$

$$s = \frac{n}{2} - \sqrt{\frac{n^2+1}{4}} = -\frac{1}{2}(\operatorname{tg}\alpha + \sec\alpha) = -\frac{1}{2}\operatorname{cotg}\frac{R-\alpha}{2}.$$

Vrátíme-li se k rovnicím (5) a (6), můžeme psáti

$$\cos\varphi + \cos 4\varphi = p,$$

$$\cos\varphi \,.\, \cos 4\varphi = \tfrac{1}{2}\, r,$$

ježto $$\cos 3\varphi + \cos 5\varphi = 2\cos\varphi\cos 4\varphi = r.$$

Proto jest také

$$\cos\varphi + \cos 4\varphi = \frac{1}{2}\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2},$$

$$\cos\varphi \,.\, \cos 4\varphi = \frac{1}{4}\operatorname{tg}\frac{R-\alpha}{2};$$

položíme-li pak

$$2 \cos \varphi = \lambda_1, \quad 2 \cos 4\varphi = \lambda_2,$$

jsou hodnoty λ_1, λ_2 kořeny rovnice

$$\lambda^2 - \lambda \cot g \frac{\alpha}{2} + tg\left(45^0 - \frac{\alpha}{2}\right) = 0. \tag{7}$$

Již tato rovnice mohla by graficky řešena přímo vésti k sestrojení pravidelného sedmnáctiúhelníka; k výhodnější však konstrukci dospějeme touto další úvahou.

b) Budiž $x^2 + y^2 = 1$ rovnice křivky kruhové,

$$y = -\lambda (x - 1)$$

rovnice dvou paprsků (pro λ_1 a λ_2) jdoucích bodem (1, 0) a protínajících kružnici ve dvou dalších bodech; spojnice R těchto průsečíků měj rovnici

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

Vyloučíme-li z posledních tří rovnic souřadnice x, y, dojdeme k rovnici kvadratické totožné s rovnicí (7). Vyjádříme za tím účelem

$$x = \frac{a(\lambda - b)}{\lambda a - b}, \quad y = \frac{b\lambda (a - 1)}{\lambda a - b},$$

a dosadíme do rovnice křivky kruhové; po snadné úpravě obdržíme

$$\lambda^2 - \frac{2a}{b(a-1)} \lambda + \frac{a+1}{a-1} = 0.$$

Rovnice tato jest totožna s rovnicí (7), klademe-li

$$\frac{2a}{b(a-1)} = \cot g \frac{\alpha}{2}, \quad \frac{a+1}{a-1} = tg\left(45^0 - \frac{\alpha}{2}\right);$$

odtud plyne

$$a = -\cot g \frac{\alpha}{2}, \quad b = \frac{2a}{a-1} \cdot tg \frac{\alpha}{2} = \frac{2}{1 + \cot g \frac{\alpha}{2}}.$$

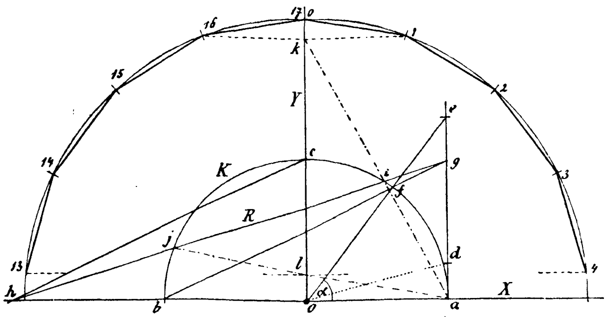
Jest pak rovnice přímky R

$$2x \, tg \frac{\alpha}{2} - y\left(1 + \cot g \frac{\alpha}{2}\right) + 2 = 0;$$

k sestrojení jejímu lze užíti úseku a a mimo to bodu $x = 1$; pro ten jest

$$y = c = 2\,tg\,\frac{\alpha}{2}\,.$$

Bude tedy sestrojení pravidelného sedmnáctiúhelníka toto:



Obr. 1.

V kružnici K poloměru $r = 1$ veďme průměr $\overline{ab}$, učiňme $oc \perp ab$, $ad \perp ab$, $ad = \frac{1}{4}$, $de = do$. Potom jest

$$\overline{ae} = \frac{1}{4} + \sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2 + 1} = \frac{1+\sqrt{17}}{4},$$

tudíž $$\sphericalangle\, aoe = \alpha;$$
dále pak jest

$$\sphericalangle\, abf = \frac{\alpha}{2}, \quad \overline{ag} = 2\,tg\,\frac{\alpha}{2} = c.$$

Učiníme-li $ch \parallel bg$, jest

$$\overline{oh} = -\,cotg\,\frac{\alpha}{2} = a,$$

proto $\overline{gh} \equiv R$. Spojnice tato stanoví v kružnici K body i, j, jimž přísluší paprsky ai, aj, pro které

$$\overline{ok} = \lambda_1 = 2\,cos\,\varphi, \quad \overline{ol} = \lambda_2 = 2\,cos\,4\varphi.$$

Opíšeme-li poloměrem 2 kružnici L soustřednou s K, a vedeme-li body k, l rovnoběžky s $X \equiv \overline{ab}$, protnou tyto L ve čtyřech vrcholech pravidelného sedmnáctiúhelníka. Jest totiž

$$\sphericalangle\, ko1 = \varphi, \quad \sphericalangle\, ko4 = 4\varphi.$$

Obdobným způsobem mohli bychom sestrojiti úhly

$$2\varphi \text{ a } 8\varphi, \quad 3\varphi \text{ a } 5\varphi, \quad 6\varphi \text{ a } 7\varphi,$$

na základě vztahů

$$\begin{aligned} \cos 2\varphi + \cos 8\varphi &= q \\ \cos 2\varphi \cdot \cos 8\varphi &= \frac{s}{2}, \end{aligned} \qquad (8)$$

$$\begin{aligned} \cos 3\varphi + \cos 5\varphi &= r \\ \cos 3\varphi \cdot \cos 5\varphi &= \frac{q}{2}, \end{aligned} \qquad (9)$$

$$\begin{aligned} \cos 6\varphi + \cos 7\varphi &= s \\ \cos 6\varphi \cdot \cos 7\varphi &= \frac{p}{2}, \end{aligned} \qquad (10)$$

vyvozených z rovnic (5) a (6).

O součtu čtverečných vzdáleností libovolného bodu od vrcholů daného mnohoúhelníka.

Píše ing. **Jos. Langr.**

I.

Buď určen n-úhelník $A_1 A_2 A_3 \ldots A_n$ v soustavě pravoúhelných os souřadných souřadnicemi svých vrcholů

$$A_1\,(x_1, y_1),\ A_2\,(x_2, y_2),\ \ldots\ A_n\,(x_n, y_n).$$

Libovolný bod B, jehož čtvercované vzdálenosti od vrcholů daného mnohoúhelníka chceme určovati, mějž souřadnice x, y. Mimo to položme

$$\overline{A_1 B} = v_1,\ \overline{A_2 B} = v_2,\ \ldots\ \overline{A_n B} = v_n$$

a

$$\sum_{k=1}^{k=n} v_k^2 = V.$$

Pro jednotlivá v jest

$$\begin{aligned} v_1^2 &= (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2, \\ v_2^2 &= (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2, \\ &\;\vdots \\ v_n^2 &= (x - x_n)^2 + (y - y_n)^2. \end{aligned}$$