Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Martin Pokorný

Poučka o čtyrúhelníku z tětiv

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 8 (1879), No. 3, 133--134

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/109275

$$HB = AB\,.\,1{\cdot}260164\,..$$

kdežto má býti, jak bylo již praveno,

$$AB\sqrt[3]{2} = AB\,.\,1{\cdot}25992\,..,$$

takže chyba činí tu

$$+ AB\,0{\cdot}00014\,..$$

V předcházejícím řešení vypadne strana hledaná kratší asi o osmistý díl hrany; v následujícím opět delší a sice o sedmitisícinu, tedy ještě o menší část, takže pro praksi jedna i druhá vystačí.

Poznámka. Kdo by nalezl důkaz první nebo druhé konstrukce, nechť jej zašle redakci; poznamenáno budiž jenom, že délku strany AB nejpohodlněji voliti jest za jednotku.

Poučka o čtyrúhelníku z tětiv.

Napsal

M. Pokorný,

ředitel realného gymnasia v Praze.

Jak známo, platí o úhlopříčnách čtyrúhelníku z tětiv (obr. 9.) mimo jiné tato poučka:

$$\frac{AC}{BD} = \frac{AB\,.\,AD + CB\,.\,CD}{BA\,.\,BC + DA\,.\,DC}\,.$$

Důkazů poučky této jest několik a to více méně složitých; důkaz jednodušší a přímější nežli jest v Šandově měřictví pro vyšší školy realní (pag. 93.), který neužívá pomocných čár, podávám tuto, jelikož mi odjinud znám není:

Poněvadž $\sphericalangle ADB = \sphericalangle ACB$,

jest $\triangle AOD \sim \triangle BOC$,

z čehož jde: $$\frac{AD}{BC} = \frac{AO}{BO} = \frac{DO}{CO}\,. \qquad (1)$$

Podobně jest $\triangle AOB \sim \triangle DOC$,

z čehož plyne $$\frac{AB}{DC} = \frac{AO}{DO} = \frac{BO}{CO}\,. \qquad (2)$$

Z rovnice (1) vyjde: $AO = \frac{AD}{BC} . BO$,

ze (2) pak: $CO = \frac{DC}{AB} . BO$,

což sečteno dá: $AC = \frac{AB . AD + CB . CD}{AB . BC} . BO$ (3)

Dále máme opět z rovnice (1):

$$BO = \frac{BC}{AD} . AO$$

a z (2): $DO = \frac{DC}{AB} . AO$

a sečtením $BD = \frac{BA . BC + DA . DC}{AB . AD} . AO$ (4)

Z výrazů (3) a (4) jde pak již:

$$\frac{AC}{BD} = \frac{AB . AD + CB . CD}{BA . BC + DA . DC} \cdot \frac{BO . AD}{AO . BC} \qquad (5)$$

a poněvadž dle rovnice (1)

$$BO . AD = AO . BC,$$

konečně srovnalost svrchu položená.

Poznámka redakce. Kdybychom směli použit pouček trigonometrických, přišli bychom rychleji k cíli.

Především víme, že úhlopříčné se k sobě mají jako sinusy protilehlých úhlů, tedy zde, zavedeme-li označení

$$AB = a, \ BC = b, \ CD = c, \ DA = d, \ AC = m, \ BD = n$$

$$\frac{m}{n} = \frac{\sin \alpha}{\sin \delta} = \frac{\sin \beta}{\sin \gamma};$$

dále obdržíme pro zdvojený obsah čtyrúhelníku buď

$$\sin \delta \, (ab + cd) \quad \text{neb} \quad \sin \alpha \, (ad + bc),$$

takže z toho plyne

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \delta} = \frac{ab + cd}{ad + bc},$$

a spojíme-li tuto srovnalost s první, konečně

$$\frac{m}{n} = \frac{ab + cd}{ad + bc},$$

jakož bylo dokázati.